应用数学和力学, 第 24 卷 第 期(2003 年月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 0 _0 37_08

二维热传导方程的三层显式差分格式*

刘继军

(东南大学 数学系, 南京 210096)

(张鸿庆推荐)

摘要: 对二维热传导方程构造了一个稳定的三层显式差分格式求其数值解, 其背景源于高维热力学反问题迭代算法中对正问题小计算量算法的需求· 首先建立一个含参数的一般差分格式去逼近微分方程, 并得到了最优截断误差· 然后导出了参数应满足的条件以保证差分格式的稳定性· 最后给出了数值的例子并和其它算法进行比较, 说明了格式在精度上的有效性和计算量上的优越性·

关 键 词: 热传导方程; 差分格式; 误差估计; 稳定性
中图分类号: O17 .26 文献标识码: A

引 言

设 Ω 为二维矩形域 $[0, \pi]^2$, 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) & ((x, y, t) \in \Omega \times (0, +\infty)), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & (t > 0), \\ u|_{t=0} = \phi(x, y) & ((x, y) \in \Omega) \cdot \end{cases} \tag{1}$$

对此经典的问题, 已经有很多差分格式如 Crank_Nicolson 格式和 Du Fort 格式来求其数值解[1]· 该问题也可以用分离变量法求解, 即

$$u(x, y, t) = \sum_{n, m=1}^{\infty} C_{n, m} \sin(nx) \sin(ny) \exp[-(n^2 + m^2) t], \tag{2}$$

系数 $C_{n, m} = 4\pi^{-2}\int_{\Omega}\phi(x, y)\sin(nx)\sin(ny)\,dx\,dy$· 众所周知, Crank_Nicolson 格式是截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$ 的隐式格式, 而 Du Fort 格式是截断误差为 $O((\tau/h)^2 + h^2)$ 的显式格式, 其中 $\tau = \Delta t$, $h = \Delta x = \Delta y$· 对很多实际问题, 这样的误差是不能令人满意的· 分离变量解的表达式(2) 求解(1) 时可以得到满意的精度, 但计算量要比 $\Omega \times [0, T]$ 上具有相同节点的差分格式大得多· 对热传导方程的逆源问题, 由迭代算法求初始温度分布 $\phi(x, y)$ 是一个常用的方法, 此时在每一步迭代时都要解正问题(1), 经典的差分格式难以得到满意的反演结果[2]· 因此为了得到有效的反演算法, 必须同时考虑求解(1) 时的精度和计算量·

* 收稿日期: 2000_01_10; 修订日期: 2002_12_1
基金项目: 中国博士后科学基金资助项目(2002031224)
作者简介: 刘继军(196 —) , 男, 江苏南通人, 教授, 博士, 研究方向: 不适定问题和微分方程反问题 (E_mail: jjliu@ seu. edu. cn)·

带参数的显式差分格式是求解(1)的一个有效工具．通过调整参数，可以得到具有改进截断误差的稳定的差分格式．1980 年，文[3]提出了一个三层参数的显式格式，减少了 Crank_Nicolson 的计算量但得到相同的截断误差 $O(\tau^2+h^2)$．当 $u(x,y,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=0 \tag{3}$$

时截断误差可改进为 $O(\tau^2+\tau h^2)$．当然该条件对一般初值在实际中是难以满足的．[4]对三维热传导方程提出了一个三层参数格式，得到的截断误并为 $O(\tau^2+h^4)$．[3]和[4]中的格式都具有一定的对称性．因此下面的问题无论从理论还是从实际而言，都是很有意义的：

1) 对一般的带参数的三层差分格式，最优截断误差如何？

2) 如何选择参数使得达到最优截断误差并且差分格式是稳定的？

对一般的对称三层带参数的差分格式，本文讨论了这两个问题，[3]和[4]中的格式都是本文的特例．我们首先证明了最优截断误差为 $O(\tau^2+\tau h^2+\tau^2h^2+h^4)$ 并且不可改进为 $O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)$，然后给出了选取参数以得到最优截断误差 $O(\tau^2+\tau h^2)$ 和稳定的差分格式的两种方法．这里的格式改进了[3]的精度，如果(3)成立，截断误差为 $O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)$．本文提出的差分格式已经被成功地应用于二维热传导方程的逆源反问题中[ ]．

1　三层参数差分格式

用矩形网格 $\Delta x=\Delta y=h=\pi/M$ 来划分 Ω 并取时间步长为 $\Delta t=\tau$．记 $\alpha=a^2\tau/h^2$ 并引进下面标准的差分记号 $(n=0,1,\cdots,j;\ k=0,1,\cdots,M)$：

$$u^n_{j,k}=u(x_j,y_k,t_n)=u(jh,kh,n\tau),\quad(\Delta u^n)_{j,k}=u^{n+1}_{j,k}-u^n_{j,k},$$

$$(\delta_x^2u_{j,k})^n=u^n_{j-1,k}-2u^n_{j,k}+u^n_{j+1,k},$$

$$(\delta_y^2u_{j,k})^n=u^n_{j,k-1}-2u^n_{j,k}+u^n_{j,k+1}.$$

对(1)中方程在节点 (j,k,n) 的导数，用下面带有待定参数的差分来近似：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(j,k,n)}=\;&\eta_0\frac{(\Delta u^n)_{j,k}}{\tau}+\eta_1\frac{(\Delta u^{n-1})_{j-1,k}+(\Delta u^{n-1})_{j+1,k}}{\tau}+\\&\eta_2\frac{(\Delta u^{n-1})_{j,k}}{\tau}+\eta_1\frac{(\Delta u^{n-1})_{j,k-1}+(\Delta u^{n-1})_{j,k+1}}{\tau},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(j,k,n)}=\;&a_1\frac{(\delta_x^2u_{j,k})^n}{h^2}+a_2\frac{(\delta_x^2u_{j,k-1})^n+(\delta_x^2u_{j,k+1})^n}{h^2}+\\&a_3\frac{(\delta_x^2u_{j,k})^{n-1}}{h^2}+a_4\frac{(\delta_x^2u_{j,k-1})^{n-1}+(\delta_x^2u_{j,k+1})^{n-1}}{h^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(j,k,n)}=\;&a_1\frac{(\delta_y^2u_{j,k})^n}{h^2}+a_2\frac{(\delta_y^2u_{j-1,k})^n+(\delta_y^2u_{j+1,k})^n}{h^2}+\\&a_3\frac{(\delta_y^2u_{j,k})^{n-1}}{h^2}+a_4\frac{(\delta_y^2u_{j-1,k})^{n-1}+(\delta_y^2u_{j+1,k})^{n-1}}{h^2}.\end{aligned}$$

对导数的上述差分近似关于 x 和 y 是对称的．定义算子

$$\begin{cases}\Pi u^n_{j,k}=u^n_{j-1,k-1}+u^n_{j+1,k+1}+u^n_{j+1,k-1}+u^n_{j-1,k+1},\\ \Diamond u^n_{j,k}=u^n_{j,k-1}+u^n_{j-1,k}+u^n_{j,k+1}+u^n_{j+1,k}\end{cases}\tag{4}$$

和新参数 $(f_1,f_2,f_3,f_4)=(a_1-2a_2,2a_2,a_3-2a_4,2a_4)$，则(1)中微分方程的差分近似为

$$\frac{1}{\tau}\left[\eta_0(u^{n+1}_{j,k}-u^n_{j,k})+\eta_1(\Diamond u^n_{j,k}-\Diamond u^{n-1}_{j,k})+\eta_2(u^n_{j,k}-u^{n-1}_{j,k})\right]=$$

$$\frac{a^2}{h^2}\Big[f_1(\mathrm{cm}^3 u^n_{j,k}-4u^n_{j,k})+f_2(\Pi u^n_{j,k}-4u^n_{j,k})+$$
$$f_3(\mathrm{cm}^3 u^{n-1}_{j,k}-4u^{n-1}_{j,k})+f_4(\Pi u^{n-1}_{j,k}-4u^{n-1}_{j,k})\Big]\cdot \qquad (\quad)$$

容易验证,[3]中的差分格式(2)是本文( )中 $a_2=a_4=0,\ a_1=1-\theta,\ a_3=\theta$ 的特例,而[4]中的差分格式(1.1)在二维的情形就是 $a^2=\sigma$ 和

$$(\eta_0,\eta_1,\eta_2,f_1,f_2,f_3,f_4)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r},0,\frac{1}{2}-\frac{1}{12r},d,\frac{c}{2},f,\frac{e}{2}\right)$$

的特例• 下面 $u(x,y,t)$ 的导数表示其在节点 (j,k,n) 的值• 将( )中的 $u(x,y,t)$ 在节点 (j,k,n) 用 Taylor 级数展开得到

引理 1 差分算子 Π 和 cm^3 有下列渐近展开:

$$\frac{\mathrm{cm}^3 u^n_{j,k}-4u^n_{j,k}}{h^2}=u_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{12}\left(\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}\right)h^2+O(h^4),$$

$$\frac{\mathrm{cm}^3 u^{n-1}_{j,k}-4u^{n-1}_{j,k}}{h^2}=u_{xx}+u_{yy}-\left(\frac{^3u}{x^2\ t}+\frac{^3u}{y^2\ t}\right)\tau+\frac{1}{12}\left(\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}\right)h^2-$$
$$\frac{1}{12}\left(\frac{u}{x^4\ t}+\frac{u}{y^4\ t}\right)h^2\tau+O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4),$$

$$\frac{\Pi u^n_{j,k}-4u^n_{j,k}}{h^2}=2(u_{xx}+u_{yy})+\left[\frac{1}{6}\left(\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}\right)+\frac{^4u}{x^2\ y^2}\right]h^2+O(h^4),$$

$$\frac{\Pi u^{n-1}_{j,k}-4u^{n-1}_{j,k}}{h^2}=2(u_{xx}+u_{yy})-\left(\frac{2\ ^3u}{x^2\ t}+\frac{2\ ^3u}{y^2\ t}\right)\tau+$$
$$\left[\frac{1}{6}\left(\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}\right)+\frac{^4u}{x^2\ y^2}\right]h^2-$$
$$\frac{1}{6}\left(\frac{u}{x^4\ t}+\frac{u}{y^4\ t}\right)h^2\tau+O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4),$$

$$\frac{\mathrm{cm}^3 u^n_{j,k}-4u^{n-1}_{j,k}}{\tau}=4\frac{u}{t}-2\frac{^2u}{t^2}+\left(\frac{^3u}{x^2\ t}+\frac{^3u}{y^2\ t}\right)h^2-$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{^4u}{x^2\ t^2}+\frac{^4u}{y^2\ t^2}\right)h^2\tau+O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)\cdot$$

据此结果和(1)中的微分方程,( )的两边变为

$$\text{左边}=(\eta_0+4\eta_1+\eta_2)\frac{u}{t}+\frac{\eta_0-4\eta_1-\eta_2}{2}\frac{^2u}{t^2}\tau+a^2\eta_1\left[\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}+\frac{2\ ^4u}{x^2\ y^2}\right]h^2-$$
$$a^4\frac{\eta_1}{2}\left(\frac{^6u}{x^6}+\frac{^6u}{y^6}+\frac{3\ ^6u}{x^4\ y^2}+\frac{3\ ^6u}{x^2\ y^4}\right)h^2\tau+O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)\cdot \qquad (6)$$

$$\text{右边}=(f_1+2f_2+f_3+2f_4)\frac{u}{t}-(f_3+2f_4)\frac{^2u}{t^2}\tau+$$
$$a^2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{^4u}{x^4}+\frac{^4u}{y^4}\right)(f_1+2f_2+f_3+2f_4)+\frac{^4u}{x^2\ y^2}(f_2+2f_4)\right]h^2-$$
$$a^4\frac{f_3+2f_4}{12}\left(\frac{^6u}{x^6}+\frac{^6u}{y^6}+\frac{^6u}{x^4\ y^2}+\frac{^6u}{x^2\ y^4}\right)h^2\tau+O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)\cdot \qquad (7)$$

由此可证明

定理 2 对(1)中微分方程的差分近似格式( ),其最优截断误差为 $O(\tau^2+\tau h^2+\tau^2h^2+h^4)$• 当参数满足

$$\begin{cases}\eta_0+4\eta_1+\eta_2=f_1+2f_2+f_3+2f_4,\\ \eta_0-4\eta_1-\eta_2=-2(f_3+2f_4),\\ f_1+2f_2+f_3+2f_4=12\eta_1,\\ f_2+2f_4=2\eta_1\end{cases} \tag{8}$$

时达到最优截断误差•

证明　比较(6)和(7)的系数易知, 当( )中的参数满足(8)时, 截断误差断 $O(\tau^2+\tau h^2+\tau^2h^2+h^4)$• 但如果要求截断误差为 $O(\tau^2+\tau^2h^2+h^4)$, 则参数除了满足(8)外还必需满足

$$\begin{cases}6\eta_1=f_3+2f_4,\\ 18\eta_1=f_3+2f_4,\end{cases} \tag{9}$$

故 $\eta_0=\eta_1=\eta_2=0$, 矛盾•

注解1　如果仅要求截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$, 则本文中的参数只要满足(8)的前两个方程即可• 特别, 如果取 $(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1-\theta,0,\theta,0)$, 则(8)的前两个方程就是[3]中的(7)• 但是, 如果[3]的格式的误差要达到 $O(\tau^2+\tau h^2+h^2)$, 则必须满足(3), 这是因为参数 f_2 和 f_4 被取为0• 如果在本文中也假定条件(3), 只要参数满足

$$\begin{cases}\eta_0+4\eta_1+\eta_2=f_1+2f_2+f_3+2f_4,\\ \eta_0-4\eta_1-\eta_2=-2(f_3+2f_4),\\ f_1+2f_2+f_3+2f_4=12\eta_1,\\ 6\eta_1=f_3+2f_4,\end{cases} \tag{10}$$

则本文格式的截断误差已达到 $O(\tau^2+\tau^2h^2+h^2)$•

注解2　据此结果, [4]中关于截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$ 的结论有必要进一步讨论, 因为[4]中的格式在二维的情形是本文的特例•

2 稳定性条件

现在讨论差分格式( )的稳定性条件• 设( )的真解为 $v^n_{j,k}$, 其数值解记为 $u^n_{j,k}$, 则计算误差为

$$\varepsilon^n_{j,k}=v^n_{j,k}-u^n_{j,k}\tag{11}$$

将 $\varepsilon^n_{j,k}$ 展开为有限项的Fourier级数,

$$\varepsilon^n_{j,k}=\sum_{m_x=1}^{M-1}\sum_{m_y=1}^{M-1}\rho^n\exp(\mathrm{i}m_xjh)\exp(\mathrm{i}m_ykh)=\sum_{m_x=1}^{M-1}\sum_{m_y=1}^{M-1}E^n_{j,k},\tag{12}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$• 由于差分格式是线性的, 只要考虑单项 $E^n_{j,k}$ 即可• 将 $E^n_{j,k}$ 的表达式代入( )得到差分格式的特征方程为

$$\begin{aligned}&\eta_0\rho^2-[\eta_0-\eta_2-\eta_1(4-s)-\alpha(f_1s+f_2t)]\rho-\\&\quad[\eta_1(4-s)+\eta_2-\alpha(f_3s+f_4t)]=0,\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$s=4\sin^2\frac{m_xh}{2}+4\sin^2\frac{m_yh}{2},\quad t=4\sin^2\frac{(m_x+m_y)h}{2}+4\sin^2\frac{(m_x-m_y)h}{2}•$$

显然有 $0\leqslant s,t\leqslant 8$ 和 $|s-t|\leqslant 8$• 下面来求 $(\eta_0,\eta_1,\eta_2,f_1,f_2,f_3,f_4)$ 满足的条件使得(13)的根满足 $|\rho|\leqslant 1$• 由于满足(8)的参数仍有三个自由度, 求这样的条件是不容易的, 必须对参数加上某些限制• 这里假定 (f_1,f_2,f_3,f_4) 还满足

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = 1 - \theta, \\ f_3 + f_4 = \theta \cdot \end{cases} \tag{14}$$

此时据(8)上述参数可表示为(记 $f_2 = f$)

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, f_1, f_2, f_3, f_4) = \left(\frac{2}{} - \theta + f, \frac{1}{10}, \frac{2}{} + \theta - f, 1 - \theta - f, \theta - \frac{1}{} + f, \frac{1}{} - f\right), \tag{1 }$$

从而(13)化为

$$\rho^2 + b\rho + c = 0, \tag{16}$$

其中系数

$$\begin{cases} b = -\dfrac{1}{\eta_0}\left[-\dfrac{2}{} + \dfrac{1}{10}s - \alpha s + (\alpha s - 2)\theta + (\alpha(s - t) + 2)f\right], \\ c = -\dfrac{1}{\eta_0}\left[\dfrac{4}{} - \dfrac{1}{10}s + \dfrac{1}{}\alpha(s - t) + (1 - \alpha s)\theta + (\alpha(t - s) - 1)f\right], \end{cases} \tag{17}$$

而 $\eta_0 = 2/ - \theta + f$• 显然由( )和(1)构成的差分格式对任何实数 (θ, f)，截断误差为 $O(\tau^2 + \tau h^2 + \tau^2 h^2 + h^4)$• 下面只要求 (θ, f) 满足的条件以保证差分格式的稳定性• 据(16)，此条件可由下述结果导出•

引理 3 对实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$，$|x| \leqslant 1$ 的充要条件是

$$\begin{cases} -(1 + c) \leqslant b \leqslant (1 + c), \\ -1 \leqslant c \leqslant 1, \end{cases} \tag{18}$$

如果 x 是复数，$|x|$ 为其模•

对由(17)给出的 (b, c)，由于 $\eta_0 < 0$ 时 $-(1 + c) \leqslant b$ 不成立；$\eta_0 > 0$ 时 $-(1 + c) \leqslant b$ 恒成立，故由(17)和(18)只要考虑 $\eta_0 > 0$ 和不等式

$$\frac{4}{} - \frac{1}{}s + \alpha s + \frac{1}{}\alpha(s - t) + 2(2 - \alpha s)\theta - 2[2 + \alpha(s - t)]f \leqslant 0, \tag{19}$$

$$\frac{2}{} - \frac{1}{10}s + \frac{1}{}\alpha(s - t) + (2 - \alpha s)\theta + [\alpha(t - s) - 2]f \leqslant 0, \tag{20}$$

$$-\frac{6}{} + \frac{1}{10}s - \frac{1}{}\alpha(s - t) + \alpha s\theta - \alpha(t - s)f \leqslant 0 \tag{21}$$

即可• 我们的任务是求 (θ, f) 的条件使得 $\eta_0 > 0$ 并且(19)～(21)对一切的 $0 \leqslant s, t \leqslant 8$ 成立• 有下列结果：

定理 4 设 $0 < \alpha < 1/4$• 如果 (θ, f) 满足下列两条件之一：

$$\begin{cases} -\dfrac{1 + 12\alpha}{(1 - 4\alpha)} < \theta < \min\left(0, \dfrac{1 - 12\alpha - 32\alpha^2}{20\alpha(1 - 4\alpha)}\right), \\ \theta + \dfrac{1 + 12\alpha}{(1 - 4\alpha)} \leqslant f \leqslant \dfrac{1 - 4\alpha}{20\alpha}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \theta \leqslant -\dfrac{1 + 12\alpha}{(1 - 4\alpha)}, \\ \max\left(\dfrac{1 - 4\alpha}{1 + 4\alpha}\theta + \dfrac{1 + 12\alpha}{(1 - 4\alpha)}, \dfrac{-1 + 4\alpha}{20\alpha}\right) \leqslant f \leqslant \dfrac{1 - 4\alpha}{20\alpha}, \end{cases} \tag{23}$$

则由( )和(1)给出的差分格式是稳定的•

证明 由于 $\eta_0 > 0$，(θ, f) 应首先满足

$$\frac{2}{} - \theta + f > 0 \cdot \tag{24}$$

情形 1: $\theta < 0, f < 0$• 由于 $0 \leqslant s, t \leqslant 8$, 欲(19) ~ (21) 成立, 只要下列不等式成立:

$$\frac{4}{\ } + 8\alpha + \frac{8}{\ }\alpha + 4(1-2\alpha)\theta - 4(1+\alpha)f \leqslant 0, \qquad (2\ )$$

$$\frac{2}{\ } + \frac{8}{\ }\alpha + 2(1-4\alpha)\theta - 2(1+4\alpha)f \leqslant 0, \qquad (26)$$

$$-\frac{6}{\ } + \frac{8}{\ } + \frac{8}{\ }\alpha - 8\alpha f \leqslant 0, \qquad (27)$$

据此得到 (θ, f) 应满足

$$f \geqslant \frac{1-4\alpha}{1+4\alpha}\theta + \frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)}, \quad f \geqslant \frac{1-4\alpha}{1+4\alpha}\theta + \frac{1}{\ }, \quad f \geqslant \frac{-1+4\alpha}{20\alpha}\text{•} \qquad (28)$$

由于 $\theta < 0, f < 0$, 该条件导出

$$1-4\alpha > 0, \quad \theta \leqslant -\frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)}\text{•} \qquad (29)$$

联立(24), (28) 和(29) 得到

$$\max\left(\frac{1-4\alpha}{1+4\alpha}\theta + \frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)}, \frac{-1+4\alpha}{20\alpha}\right) \leqslant f \leqslant 0\text{•} \qquad (30)$$

情形 2: $\theta < 0, f > 0$• 类似于上述讨论, 由(19) ~ (21) 的要求可取 α 和 (θ, f) 满足 $0 < \alpha < 1/4$ 和

$$\theta < 0, \quad \max\left(0, \theta + \frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)}\right) \leqslant f \leqslant \frac{1-4\alpha}{20\alpha}\text{•} \qquad (31)$$

为使该不等式有意义, θ 还应该满足

$$\theta + \frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)} \leqslant \frac{1-4\alpha}{20\alpha} \text{ 当 } \theta + \frac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)} \geqslant 0\text{•} \qquad (32)$$

因此(31) 和(32) 对 $0 < \alpha < 1/4$ 导出

$$\begin{cases} \theta \leqslant -\dfrac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)}, \\ 0 \leqslant f \leqslant \dfrac{1-4\alpha}{20\alpha}, \end{cases} \qquad (33)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)} < \theta < \min\left(0, \dfrac{1-12\alpha-32\alpha^2}{20\alpha(1-4\alpha)}\right), \\ \theta + \dfrac{1+12\alpha}{(1-4\alpha)} \leqslant f \leqslant \dfrac{1-4\alpha}{20\alpha}\text{•} \end{cases} \qquad (34)$$

联立(29), (30) 和(33) 得到(23), (34) 就是(22)• 定理完毕•

注解 3 当然也可以类似讨论 $\theta > 0, f > 0$ 和 $\theta > 0, f < 0$ 两种情形• 但是前一种情形对 α 要求更严($0 < \alpha < (-1+\sqrt{17})/32$), 后一种情形(19) ~ (21) 不成立•

注解 4 据此证明, $0 < \alpha < 1/4$ 对同时保证差分格式的稳定性和高精度($O(\tau^2 + \tau h^2 + \tau^2 h^2 + h^4)$) 是必要的• 当然, 如果只要求截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$, 稳定性条件可以对 α 无任何限制, 即差分格式是绝对稳定的([3])•

3 数值试验

本节取 $a = 1$, 初值为

$$\phi(x, y) = 10\sin(x)\sin(y) \qquad ((x, y) \in \Omega)$$

来检验本文提出的差分格式, (1) 的精确解为 $u(x, y, t) = 10\sin(x)\sin(y)\exp(-2t)$• 我们把本文的方法(dif 2) 和谱方法(spec, 基于(2) 的积分方法) 及[3] 中的差分方法(dif1) 进行了比较• 时

间方向取 0层, 谱方法的级数取前20项• 三个典型的结果如表 1, 其中(θ_1, η_1) 是[3] 中的参数, (θ_2, f_2) 是本文的参数, 表中第一行为(1) 的精确解•

表 1 $(\tau, M, \theta_1, \eta_1, \theta_2, f_2) = (1E-04, 20, -0.8, 0.0, -0.8, 10)$ 的结果

	u(, , 0)	u(10, 10, 0)	u(1 , 1 , 0)	u(20, 20, 0)	计算时间(s)
实际值	4.9 0 248 79	9.900 498 33	4.9 0 2 0 29	2.2 72E_13	
dif 1	4.9 0 347 72	9.900 696 20	4.9 0 349 22	0.000 000 00	0.01
dif 2	4.9 0 246 83	9.900 494 41	4.9 0 248 32	0.000 000 00	0.01
sepc	4.9 0 248 24	9.900 498 39	4.9 0 2 1 10	2.2 72E_13	1

表 2 $(\tau, M, \theta_1, \eta_1, \theta_2, f_2) = (1E-04, 50, -5.0, 0.1, -0.7, 1.0)$ 的结果

	u(10, 10, 0)	u(20, 20, 0)	u(30, 30, 0)	u(40, 40, 0)	计算时间(s)
实际值	3.420 37 76	8.9 084 2	8.9 08 40	3.420 39 18	
dif 1	3.420 23 34	8.9 04676	8.9 047 64	3.420 24 76	0.01
dif 2	3.420 37 63	8.9 084 17	8.9 08 0	3.420 39 0	0.01
sepc	3.420 48 20	8.9 106 73	8.9 109 9	3.420 48 67	320

表 3 $(\tau, M, \theta_1, \eta_1, \theta_2, f_2) = (1E-03, 40, -20, 2.0, -4.0, 0.0)$的结果

	u(, , 0)	u(1 , 1)	u(30, 30, 0)	u(3 , 3 , 0)	计算时间(s)
实际值	1.32 103 9	7.723 270 06	4. 24 188 09	1.32 104	
dif 1	1.322 983 04	7.710 910 63	4. 16 948 10	1.322 983 83	0.01
dif 2	1.32 094 2	7.723 21 66	4. 24 1 6 20	1.32 09 01	0.01
sepc	1.32 103 99	7.723 276 13	4. 24 189 94	1.32 10 19	230

由此数值结果可看出

1) 谱方法精度最高• 这是由于仅对空间变量作了差分而时间方向是精确的• 但是, 由于双重求和, 计算量是太大了• 随着区域 Ω 网格的加细, 计算时间急剧放大•

2) 与[3]的差分格式相比, 本文的方法具有更高的精度, 但计算时间与[3] 几乎相同• 在某些时候, 本文的精度甚至优于谱方法(见表 2), 而计算时间比谱方法少得多• 并且网格的加细对计算时间的影响不大• 由于此特点, 本文的方法已被用于二维热传导方程逆时间问题的迭代反演算法中([ ])•

3) 本文的差分格式对满足定理 4 的参数不同选取, 均能获得满意的数值结果, 对此我们已经进行了许多数值试验•

[参 考 文 献]

[1] Smith G D. Numerical Solutions of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods [M]. New York: Oxford University Press, 198 .

[2] Munize W B. A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation[J]. J Comput Appl Math, 1999, **103**: 14 —163.

[3] 周顺兴. 解二维和三维抛物型偏微分方程绝对稳定的差分格式, 计算数学, 1980, **9**(1): 90—97.

[4] 孙鸿烈. 解高维热传导方程的一族高精度的显示差分格式[J]. 高校应用数学学报, A辑, 1999, **14**

(4): 427—432.

[ ] LIU Ji_jun. Numerical solution of forward and backward problem for 2_D heat conduction equation[J]. J Comput Appl Math, 2002, **14** (2): 4 9—482.

The 3_Layered Explicit Difference Scheme for 2_D Heat Equation

LIU Ji_jun

(Dpeartment of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)

Abstract: A 3_layered explicit difference scheme for the numerical solution of 2_D heart equation is proposed. Firstly, a general symmetric difference scheme is constructed and its optimal error is obtained. Then two kinds of condition for choosing the parameters for optimal error and stable difference scheme are given. Finally some numerical results are presented to show the advantage of the schemes.

Key words: parabolic equation; difference schemes; error estimate; stability