应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0545_06

几类非线性发展方程的解析解*

胡建兰, 张汉林

(北京工业大学 应用数理学院, 北京 100022)

(戴世强推荐)

摘要: 研究下列偏微分方程: 广义五阶 KdV 方程, 水波方程, Kupershmidt 方程, 耦合 KdV 方程• 通过引进一个二阶常微分方程, 采用不同的 ansatzes 方法找到了这些问题的解析解•

关 键 词: 非线性发展方程; ansatz 方法; 解析解
中图分类号: O175; O241. 7 文献标识码: A

引 言

众所周知, 许多重要的动力系统都可以用特殊的非线性偏微分方程来描述• 当一个非线性偏微分方程被用来描述一个具有某些传播或聚集性质的物理参数时, 最重要的物理动机之一是求解偏微分方程的具有某种类型的行波解• 在过去几十年中, 数学家、物理学家们在此领域中已有许多的尝试[1]~[16], 然而, 由于数学方面的复杂性, 获得的技术和方法极为有限•

在已取得的方法中, 最有效的求解偏微分方程的精确的解析解方法之一是 ansatz 方法•

本文我们通过引进一个二阶常微分方程采用不同的 ansatzes 方法得到广义五阶 KdV 方程, 水波方程, Kupershmidt 方程, 耦合 KdV 方程的清晰的解析解• 此二阶常微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} = bv^2 + cv, \tag{1}$$

这里 b 和 c 是待定常数• 我们可容易地得到以上微分方程的解• 方程(1) 两边同乘 v', 然后对它积分一次可得

$$v'^2 = \frac{2}{3}bv^3 + cv^2, \tag{2}$$

方程(2) 有如下形式的解

$$v = -\frac{3c}{2b}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0)\right] \text{ 或 } v = \frac{3c}{2b}\mathrm{csch}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - \xi_0)\right], \tag{3}$$

这里 c 是一个正常数•

1 广义五阶 KdV 方程

在这节中, 我们考虑下列广义五阶 KdV 方程的精确的解析解

* 收稿日期: 2001_11_01; 修订日期: 2002_11_05
作者简介: 胡建兰(1965—) , 女, 广东人, 讲师, 硕士(Tel: 010- 62582647) ;
张汉林(1961—) , 女, 湖北人, 副教授, 研究生, 硕士生导师•

$$u_t+\delta(1+\beta u^\alpha)u^\alpha u_x+\gamma u_{5x}=0, \tag{4}$$

这里 α, δ, γ 是正实常数, β 是负的实常数•

以下我们将求方程(4)的解析解• 令 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=x-\lambda t$, 这里 λ 是传波速度, 因此方程(4)转换为一个如下形式的非线性常微分方程

$$-\lambda u'+\delta(1+\beta u^\alpha)u^\alpha u'+\gamma u^{(5)}=0, \tag{5}$$

这里“$'$”代表 $d/d\xi$• 对方程(5)进行积分, 我们有

$$-\lambda u'+\frac{\delta}{1+\alpha}u^{\alpha+1}+\frac{\delta\beta}{2\alpha+1}u^{2\alpha+1}+\lambda u^{(4)}=0• \tag{6}$$

我们考虑如下 ansatz:

$$u=Av^h,\quad v''=bv^2+cv, \tag{7}$$

这里 A, b, c 和 h 是待定实数, 所以我们可有

$$u^{(4)}=A\left[\frac{b^2}{9}h(h+1)(2h+1)(2h+3)v^{h+2}+\right.$$
$$\left.\frac{bc}{3}h(2h+1)(2h^2+2h+1)v^{h+1}+h^4c^2v^h\right]• \tag{8}$$

将(7)和(8)代入(6), 然后平衡方程两边非线性项并比较 v 的同次幂, 我们可以得到 $h=1/\alpha$, 及

$$-\lambda A+A\frac{c^2}{\alpha^4}=0, \tag{9}$$

$$\frac{\delta}{\alpha+1}A^{\alpha+1}+A\gamma\frac{bc(\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)}{3\alpha^4}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\delta\beta}{2\alpha+1}A^{2\alpha+1}+A\gamma\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(3\alpha+2)}{9\alpha^4}=0• \tag{11}$$

从(9)~(11), 我们有

$$\lambda=-\frac{\delta(2\alpha+1)(3\alpha+2)}{\beta(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)^2}, \tag{12}$$

$$c=\alpha^2\sqrt{-\frac{\delta(2\alpha+1)(3\alpha+2)}{\beta(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)^2}}, \tag{13}$$

$$A=\left[-\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+1)(3\alpha+2)}{9\alpha^4\delta\beta}b^2\right]^{\frac{1}{2\alpha}}• \tag{14}$$

从(3), (7), (12)~(14), 我们有

$$u=Av^h=\left(\frac{(2\alpha+1)(3\alpha+2)}{2\beta(\alpha^2+2\alpha+2)^2}\right)^{1/\alpha}\operatorname{sech}^{2/\alpha}\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right] \tag{15}$$

或

$$u=\left(\frac{(2\alpha+1)(3\alpha+2)}{2\beta(\alpha^2+2\alpha+2)^2}\right)^{1/\alpha}\operatorname{csch}^{2/\alpha}\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]• \tag{16}$$

很明显解(15)和(16)与文[4]中用另一种 ansatz 方法得到的解是相同的•

2 水 波 方 程

本节我们考虑下列由 Olver[6] 提出的描述浅水平底上长、小波的水波方程的精确的解析解

$$u_t+u_x+c_1uu_x+c_2u_{3x}+c_3u_xu_{xx}+c_4uu_{3x}+c_5u_{5x}=0, \tag{17}$$

令 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=x-\lambda t$, 这里 λ 是传播速度, 所以方程(17)就转化为如下一个非线性常微分方程

$$(1-\lambda)u' + c_1uu' + c_2u''' + c_3u'u'' + c_4uu''' + c_5u^{(5)} = 0, \tag{18}$$

积分方程(18),我们有

$$(1-\lambda)u + \frac{c_1}{2}u^2 + c_2u'' + \frac{c_3-c_4}{2}u'^2 + c_4uu'' + c_5u^{(4)} = 0 \tag{19}$$

然后,我们作以下 ansatz:

$$u = a_1v + a_2v^2, \quad v'' = bv^2 + cv, \tag{20}$$

这里 α_1, α_2, b 和 c 是待定实数.

从(20),我们有

$$u'^2 = \frac{8}{3}a_2^2bv^5 + \left(\frac{8}{3}a_1a_2b + 4a_2^2c\right)v^4 + \left(\frac{3}{2}a_1b + 4a_1a_2c\right)v^3 + a_1^2cv^2,$$

$$u'' = \frac{10}{3}a_2bv^3 + (4a_2c + a_1b)v^2 + a_1cv,$$

$$u^{(4)} = \frac{70}{3}a_2b^2v^4 + \frac{10}{3}[13a_2bc + a_1b^2]v^3 + [16a_2c^2 + 5a_1bc]v^2 + a_1c^2v,$$

将 u'^2, u'', $u^{(4)}$ 和(20) 代入(19),比较 v 的同次幂的系数,我们有

$$a_2^2b[5p_5 + 4p_3] = 0, \quad a_1c^2p_6 + a_1cp_4 + a_1p_1 = 0,$$

$$\frac{70}{3}a_2b^2p_6 + \left[4a_2^2c + \frac{13}{3}a_1a_2b\right]p_5 + \left(\frac{8}{3}a_1a_2b + 4a_2^2c\right)p_3 + a_2^2p_2 = 0,$$

$$\frac{10}{3}[13a_2bc + a_1b^2]p_6 + (5a_1a_2c + a_1^2b)p_5 + \frac{10}{3}a_2bp_4 + \left(\frac{2}{3}a_1^2b + 4a_1a_2c\right)p_3 + 2a_1a_2p_2 = 0,$$

$$(16a_2c^2 + 5a_1bc)p_6 + a_1^2cp_5 + (4a_2c + a_1b)p_4 + a_1^2cp_3 + a_1^2p_2 + a_2p_1 = 0,$$

这里 $p_6 = c_5$, $p_5 = c_4$, $p_4 = c_2$, $p_3 = (c_3 - c_4)/2$, $p_2 = c_1/2$, $p_1 = 1-\lambda$, 解以上代数方程,我们可以得到以下四对解

$$a_1 = -\frac{10bp_6}{2p_2 + 3p_5}, \quad a_2 = 0, \quad c = \frac{10p_2p_6 - 2p_4p_5}{5p_5p_6}, \quad p_1 = -cp_4 - c^2p_6; \tag{21}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad 5p_5 + 4p_3 = 0, \quad a_2 = -\dfrac{910p_6^2}{3(p_4p_5 + 13p_2p_6)}b^2, \\ c = -\dfrac{p_4}{13p_6}, \quad p_1 = \dfrac{36p_4^2}{169p_6}, \end{cases} \tag{22}$$

$$p_6 = 0,\ 5p_5 + 4p_3 = 0,\ a_1 = -\frac{2p_4}{p_2}b,\ a_2 = \frac{p_4p_5}{p_2^2}b^2,\ c = \frac{p_2}{p_5},\ p_1 = cp_4 \tag{23}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{70p_6b}{3p_5}, \quad a_2 = \dfrac{35(12p_2p_6 - p_4p_5)}{27p_2^2}b^2, \quad c = \dfrac{p_2}{p_5}, \\ p_1 = -cp_4 - c^2p_6, \quad p_4^2p_5^2 - 13p_2p_4p_5p_6 + 15p_2^2p_6^2 = 0, \end{cases} \tag{24}$$

从(21)~(24),我们可得到方程(7)的四对解.

$$u = a_1v = \frac{15cc_5}{c_3+c_4}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right],\ \text{或}\ u = -\frac{15cc_5}{c_3+c_4}\mathrm{csch}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right], \tag{25}$$

这里 $c = \dfrac{5c_1c_5 - 2c_2c_4 - c_2c_3}{5c_4c_5} > 0$, $\lambda = 1 + cc_2 + c^2c_5$.

$$u = a_2v^2 = -\frac{1365c_5^2}{169(2c_2c_4 + 13c_1c_5)}\mathrm{sech}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right] \quad \text{或}$$

$$u=-\frac{1365c_5^2}{169(2c_2c_4+13c_1c_5)}\operatorname{csch}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right],\tag{26}$$

这里 $c=-\frac{c_2}{13c_5}$, $(2c_2c_4+13c_1c_5)\neq 0$, $\lambda=1-\frac{36c_2^2}{169c_5}$, $2c_3+3c_4=0$•

$$\begin{cases} u=a_1v+a_2v^2=-\frac{3c_2}{c_4}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c0}}{2}(\xi-\xi_0)\right]+\frac{9c_2}{c_4}\operatorname{sech}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right] \text{ 或} \\ u=\frac{3c_2}{c_4}\operatorname{csch}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]+\frac{9c_2}{c_4}\operatorname{csch}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right], \end{cases}\tag{27}$$

这里 $c_5=0$, $2c_3+3c_4=0$, $c=-\frac{c_1}{2c_4}$, $\lambda=1-\frac{c_1c_2}{2c_4}$•

$$\begin{cases} u=a_1v+a_2v^2=\frac{35c_1c_5}{2c_4^2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]- \\ \qquad \frac{35(6c_1c_5-c_2c_4)}{12c_4^2}\operatorname{sech}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right] \text{ 或} \\ u=-\frac{35c_1c_5}{2c_4^2}\operatorname{csch}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]-\frac{35(6c_1c_5-c_2c_4)}{12c_4^2}\operatorname{csch}^4\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right], \end{cases}\tag{28}$$

这里 $2c_3+3c_4=0$, $4c_4^2c_2^2-26c_1c_2c_4c_5+15c_1^2c_5^2=0$, $c=c_1/(2c_4)>0$, $\lambda=1-cc_2+c^2c_5$• 许多作者曾讨论过水波方程, 例如 H. J. Lu 和 M. X. Wang[16], 他们采用 ansatz $u(\xi)=My/(1+y)^2$, $y=e^{k\xi}$ 得到了此问题 的具有钟型波 的解• 事实上, 这个解是我们的解(25) 的前半部分• 所以, 在本篇文章中我们得到了水波方程的更多类型的精确的孤立子解•

3 Kupershmidt 方程

本节我们考虑下列 Kupershmidt 方程[7]

$$u_t=u_{5x}+\frac{5}{2}uu_{xxx}+\frac{25}{4}u_{xx}u_x+\frac{5}{4}u^2u_x,\tag{29}$$

令 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=x-\lambda t$, 积分方程(29), 我们有

$$E-\lambda u=u^4+\frac{5}{2}uu''+\frac{5}{8}u'+\frac{5}{12}u^3,\tag{30}$$

这里 E 是积分常数• 对此问题作以下 ansatz

$$u=\alpha+v,\quad v''=bv^2+cv,\tag{31}$$

这里 a, b, c 是待定常数• 这样

$$u'=v',\quad u''=v''=bv^2+cv,\quad u'^2=v'^2=\frac{2}{3}bv^3+v^2,\quad u'''=2bvv'+cv',$$

$$u^{(4)}=2bv'^2+2bvv''+cv''=\frac{10}{3}bv^3+5bcv^2+c^2v,$$

$$uu''=(a+v)(bv^2+cv)=bv^3+(ab+c)v^2+acv,\quad E-\lambda u=E-a\lambda-\lambda v,$$

$$u^3=(a+v)^3=v^3+3av^2+2a^2v+a^3,$$

将以上代数方程代入(30), 比较 v 的同次幂系数, 我们有

$$\frac{10}{3}b^2+\frac{5}{2}b+\frac{5}{4}b+\frac{5}{12}=0,\quad 5bc+\frac{5}{2}(ab+c)+\frac{15}{8}c+\frac{5}{4}a=0,$$

$$c^2+\frac{5}{2}ac+\frac{5}{4}a^2=-\lambda,\quad E-\lambda a=\frac{5}{12}a^3,$$

所以

1)：$b=-1,\ c=-2a,\ \lambda=-\dfrac{a^2}{4}$，　2)：$b=-\dfrac{1}{8},\ c=-\dfrac{a}{4},\ \lambda=-\dfrac{11}{16}a^2$，

因此方程(29)有以下两对解

$$u=a-3a\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{-2a}}{2}(\xi-\xi_0)\right],\ \text{或}\ u=a+3a\,\mathrm{csch}^2\left[\frac{\sqrt{-2a}}{2}(\xi-\xi_0)\right]\cdot$$

这里 $\lambda=-a^2/4$•

$$u=a-3a\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{-a}}{4}(\xi-\xi_0)\right]\ \text{或}\ u=a+3a\,\mathrm{csch}^2\left[\frac{\sqrt{-a}}{4}(\xi-\xi_0)\right]$$

这里 $\lambda=-11a^2/16$•

4 耦合 KdV 方程

1981 年 Hirota 和 Satsuma[5]引进了如下方程组

$$\begin{cases} u_t-a(u_{xxx}+6uu_x)=2bvv_x, \\ v_t+v_{xxx}+3uv_x=0, \end{cases} \tag{32}$$

它是描述具有不同色散关系的两个长波的相互作用•

以下我们讨论如下形式的 HS 方程组:

$$\begin{cases} u_t+6\alpha uu_x-6vv_x+\alpha u_{xxx}=0, \\ v_t+3\alpha uv_x+\alpha v_{xxx}=0\text{•} \end{cases} \tag{33}$$

我们作下列 ansatz:

$$u=av,\quad v''=bv^2+cv$$

则 $u'=av'$，$v'''=(2bv+c)v'$，$u'''=av'''=(2abv+ac)v'$，所以方程(33)变成下列形式

$$\begin{cases} -\lambda av'+6\alpha av\,av'-6vv'+\alpha(2abv+ac)v'=0, \\ -\lambda a+6a^2\alpha v-6v+2ab\alpha v+\alpha ac=0, \end{cases} \tag{34}$$

从(34)，我们得到

$$-\lambda a+\alpha ac=0,\quad 6\alpha a^2=6+2\alpha ab=0,$$

$$-\lambda+\alpha c=0,\quad 3\alpha a+2b\alpha=0,$$

所以 $\lambda=\alpha c$，$3a+2b=0$，$(3a^2+ab)\alpha=3\ (a\neq 0)$，因而我们可得到 $a^2=2/a$，$b=-3a/2=-(3/2)(\pm\sqrt{2/\alpha})=\mp 3/\sqrt{2\alpha}$，$c$ 是任意常数• 问题(33)有下面形式的解

$$u=av=a\left(-\frac{3c}{2b}\right)\mathrm{sceh}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]=c\ \mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right],$$

$$v=-\frac{3c}{2b}\mathrm{sceh}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi-\xi_0)\right]\cdot$$

对于问题(33)，有些作者[13, 14, 15]得到了和我们的不同形式的精确的孤立子解• 另外作者[19]得到了具有钟型波的的解•

自此，我们通过采用不同的 ansatzes 找到了广义五阶 KdV 方程，水波方程，Kupershmidt 方程以及 Hirota_Satsuma 系统的解• 本文的 ansatze 可能会产生孤立子行波解和奇异解，因此以上方法可以成为解决其它高阶的非线性物理模型的一个很好的借鉴•

[参 考 文 献]

[1] LI Zheng_yuan. The existence of travelling front solutions for reaction_diffusion system[J]. J Partial Differential Equations, 1992, **5**(1): 17—22.

[2] Ablowitz M J, Zepetella A. Explicit solutions of Fisher' s equation for a special wave speed[J]. Bull Math Bial, 1979, **41**(4): 835—840.

[3] Abdlkaser M A. Travelling wave solutions for a generalized Fisher equation[J]. J Math Anal Appl, 1982, **85**(2): 287.

[4] Wilson G. The affine lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma[J]. Phys Lett A, 1982, **89**(7): 332.

[5] Hirota R, Satsuam J. Soliton solutions of a coupled Korteweg_de Vries equation[J]. Phys Lett A, 1981, **85**(8- 9): 407.

[6] Olive P L. Hamiltonian and non_hamiltonian models for water waves[A]. In: Lecture Notes in Physics[M]. No 195, New York: Springer_verlag, 1984, 273—290.

[7] Fuchssteiner B, Oevel W, Wiwianka W. Computer_algebra methods for investigation of hereditary operators of high order soliton equations[J]. Comput Physics Comm, 1987, **44**(1): 47—55.

[8] Murray J D. Mathematical Biology[M]. New York: Springer, 1989.

[9] LU Bao_quan, et al. Solitary wave solutions of some systems of coupled nonlinear equations[J]. Phys Lett A, 1993, **180**(1- 2): 61.

[10] WANG Ming_xin, XIONG Shu_lin, YE Qi_xiao, et al. Explicit wave front solutions of Noyes_field systems for the Belousov_Zhabotinskii reaction[J]. J Math Anal Appl, 1994, **182**(3): 705.

[11] WANG Ming_xin. Nonlinear Equations of Parabolic Type[M]. Beijing: Science Press, 1994.

[12] FENG Xue_shang. Exact wave front solutions to two generalized coupled nonlinear physical equations[J]. Phys Lett A, 1996, **213**(3- 4): 167.

[13] WANG Ming_liang, ZHOU Yu_bin, LI Zhi_bin, et al. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 1996, **216**(1- 5): 67.

[14] FAN En_gui, ZHANG Hong_qiang. New exact solutions to a system of coupled KdV equations[J]. Phys Lett A, 1998, **245**(5): 389.

[15] FAN En_gui, ZHANG Hong_qiang. A note on the homogenerous balance method[J]. Phys Lett A, 1998, **246**(5): 403.

[16] LU Hong_jun, WANG Ming_xin. Exact soliton solutions of some nonlinear physical models[J]. Phys Lett A, 1999, **255**(4- 6): 249.

Analytical Solutions for Some Nonlinear Evolution Equations

HU Jian_lan, ZHANG Han_lin

(Institute of Applied Science, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022, P. R. China)

Abstract: The following partial differential equations are studied: generalized fifth_order KdV equation, water wave equation, kupershmidt equation, couples KdV equation. The analytical solutions to these problems via using various ansatzes by introducing a second_order ordinary differential equation are found out.

Key words: nonlinear physical model; ansatz method; analytical solution