

文章编号:1000-0887(2003)04-0342-09

电流变液中粒子成链机理的理论模型^{*}

刘玉岚, 王彪, 王殿富

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 建立了一理论模型用来解释在电场作用下电流变液中粒子集束成链的机理. 通过假设在成链过程中释放的电磁能等于由于粘性流体而导致的能量耗散,建立了控制链长大的微分方程. 基于这样的能量方程,可以预报成链的速度及电流变液的响应时间. 该模型也预报了电场强度温度,以及诸如微粒的含量,介电常数等微结构参数对电流变液响应的影响.

关键词: 电流变液; 响应时间; 动力学模型

中图分类号: O361.4; O37 **文献标识码:** A

引言

电流变液是由高介电常数的微粒及低介电常数及低粘度系数的液体共同组成的悬浮液. 在电场作用下,它的表观粘度急剧增加. 如果外加电场超过某一临界值时,电流变液在表面上会变成粘塑性固体状态,而且它的屈服强度随着外加电场强度的增加得以进一步加强. 这一转变从表观上来看,几乎完全可逆. 当电场撤去后,系统几乎同时就恢复到原来的液体状态. 转变的时间在毫秒量级. 电流变液的这种特殊的现象最早由 Winslow(1949)^[1]发现,因此,有时也被定义为“Winslow effect”. 因为它的快速响应及低能耗,电流变液使机械器件与电子系统之间的快速控制成为可能. 电流变液的这些特性对未来的技术也很有吸引力. 要预报它们的响应,关键是要对电流变液现象的物理机制有清晰的了解. 考虑这样一个系统:介电常数为 ϵ_p 的微粒悬浮在介电常数为 ϵ_f 的液体中, $\epsilon_p > \epsilon_f$. 把这个系统放在加有电压的两个平行板之间. 当微粒的密度接近于液体的密度时,浮力抵消了重力而造成了微重力环境. 在加电场之前,热运动使粒子自由分布而形成液体悬浮液. 在加电场后,粒子受到一个感应偶极子力矩. 当所加电场强度增加时,这些已极化的粒子开始聚集,并沿着电场方向形成链结构. 因为这些链的形成,电流变液的剪切强度和粘度相应增加,因此,链的形成成为电流变液现象的基础.

许多研究人员研究了这种结构形成的机理. Tao 等(1991)^[2]利用从无序状态到有序状态的相转变理论去解释这种结构的形成,并发表了一系列关于在外电场作用下电流变液内这种结构形式方面的工作. Klingenberg 等(1989)^[3]进行了关于这种电流变液悬浮液的结构形式的二维和三维的分子动力学数值模拟. 最近又有很多研究者致力于新电流变液综合性质的研究,例如:流变学,电学,化学及摩擦学性质. 人们主要合成的是具有较大屈服应力及很短的响应

* 收稿日期: 2001-11-27; 修订日期: 2003-03-04

作者简介: 刘玉岚(1962—),女,吉林人,副教授,博士(E-mail: myliu51@hotmail.com).

时间的高性能电流变液材料,关于这些机理研究的详细工作可以在 Parthasarathy 和 Klingenberg (1996)^[4]的论文中查到。

要想把电流变液应用于工程中或发展新的高性能材料,理解链结构的形成机理是至关重要的。从目前阶段我们对电流变液了解的情况看,分子动力学模拟广泛应用在研究粒子的运动和聚集中。但这种分析受到数值计算的限制。本文基于热动力学分析建立了链形成过程的广义虚功原理。假定链的形状是椭球,选择它的长径比为系统的广义自由度。可以建立链形成的控制微分方程。基于这种能量模型,可以预报链形成的速度以及电流变液的响应时间。

1 链生长过程的广义虚功原理

综上所述,在给定温度下,为电流变液施加强电场,极化粒子会沿电场方向聚集成链。随着电场强度的增大,更多的粒子聚集到链上而形成粗柱。因为电极的镜像效应,柱通常是两端宽而在中间部分却是相对窄。本文只考虑链形成的最初阶段而不去考虑后来的聚集和链变粗的过程。因此,本文只考虑一支链并假定它将沿着电场方向生长。为了简化分析,假定单链是半轴为 a_1 和 a_3 的扁长球体,其中 a_1 是粒子半径。链形成的过程由 a_3 或 $\beta = a_3/a_1$ 随着时间 t 变化决定。我们认为在这个系统里极化粒子形成链。在链形成的过程中,大环境温度保持不变。因此,系统的温度也可认为保持不变。事实上,在链形成的过程中,由于摩擦力而消散的能量将转化成热能而传给环境。

当施加的机械荷载为零时,系统所做的虚功等于自由度发生无限小的变化的 $\delta\beta$ 电场、磁场、粘性阻力和惯性力所做的虚功之和。因此,广义虚功原理能以下面的形式给出:

$$\delta W_e + \delta W_m + \delta W_f + \delta W_i - T\delta S = 0, \quad (1)$$

其中, δW_e 、 δW_m 、 δW_f 和 δW_i 分别是系统通过电场、磁场、粘性阻力及惯性力所做的虚功, δS 是 $\delta\beta$ 引起的熵变。下面本文将逐一推导出方程(1)中各项并计算 β 的数值。

2 电场和磁场做的虚功

考虑由小介电常数的液体和具有很好介电性的粒子组成的悬浮液被放置在两个平行的平板电极间,当施加的电场为零或非常小的时候,热力学运动使得粒子随机分布而形成悬浮液(图1)。当电场增加时,粒子产生导极化。由于将要形成链的粒子组成的系统在粒子聚集之前有一定量的静电能。粒子聚集成链时,系统的静电能有所变化。链的形成是一个动力过程,故导致在链的周围形成一个磁场。因此,在链的形成过程中,系统有一定量的磁场能变化。电场和磁场所做的功与系统电磁能量的减少量相等。因此,如果可以得出系统电磁能量的变化,就可以得出电场和磁场所做的功。

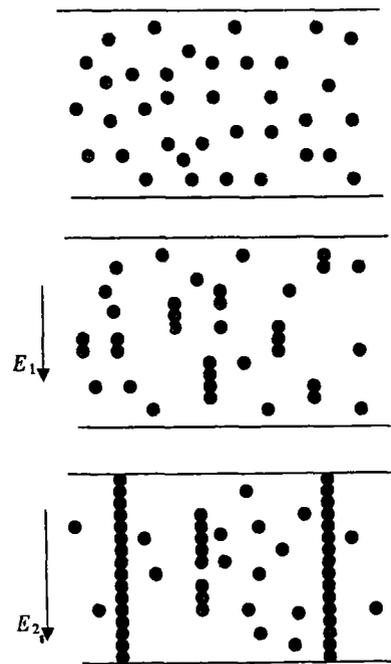


图1 电场作用下电流变液中粒子聚集成链的过程

2.1 球形粒子的电磁能量

聚集前, 电流变液系统中有 N 个球状粒子, 可以得到系统的电磁场能量的表达式. 首先考虑在外电场作用下的单个球状粒子, 该粒子由极化强度为 P_s 的均质材料构成. 内部的电磁能量可写成:

$$f = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E}^e + \Delta \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D}^e + \Delta \mathbf{D}) dv = \frac{1}{2} \iiint_V E_i^e D_i^e dv - \iiint_V E_i^e p_i^s dv - \frac{1}{2} \iiint_V \Delta E_i p_i^s dv, \quad (2)$$

其中, \mathbf{E}^e 、 \mathbf{D}^e 为施加的电场强度和相应的电位移; $\Delta \mathbf{E}$ 、 $\Delta \mathbf{D}$ 是由指定的极化微小粒子 P_s 所产生的电场强度和电位移. 由引入单粒子而导致的交互能量为

$$\Delta f = - \iiint_V E_i^e p_i^s dv - \frac{1}{2} \iiint_V \Delta E_i p_i^s dv, \quad (3)$$

因为极化率是常量的球形粒子, $\Delta \mathbf{E}$ 可由 $\Delta \mathbf{E} = (-p_s/6\epsilon)\mathbf{k}$ 决定. 由于系统包含 N 个极化粒子, 极化强度可由以下形式给出: $P_j^s = \sum_{i=1}^N p_j^s H(\Omega_i)$, 其中, $H(\Omega_i)$ 是由 i -th 粒子定义的 Heaviside 函数. 不考虑粒子间的交互作用, 总的交互能量可得:

$$\Delta F = - \iiint_V E_i^e P_i^s dv - \frac{1}{2} \iiint_V \Delta E_i (P_s) P_i^s dv, \quad (4)$$

像本文假设的那样, 被吸引的粒子一个个的沿所施加电场的方向聚集而形成链, 在系统中, 游离的粒子随时间变化越来越少. 因此, 电磁能量的变化率随着游离粒子减少:

$$\Delta \dot{U} = \frac{d(\Delta F)}{dt} = \left[- \iiint_V E_i^e p_i^s dv - \iiint_V \Delta E_i p_i^s dv \right] \frac{dN}{dt}. \quad (5)$$

2.2 球状链的电磁能

在链形成的过程中, 部分电磁能随着游离粒子的减少而消失. 同时, 部分电磁能随着粒子的聚集而产生. 下面考虑随着链生长的电磁能的变化率. 在电流变液有限体 V 中, 有一个极化粒子链(图 2), 在外加电场作用下链的电磁能可写成:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv, \quad (6)$$

其中, V 是电流变材料元素的总体积. 能量变化率为:

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \right] = \iiint_V [-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] dv. \quad (7)$$

在导出方程(7)时, 我们利用了 Maxwell 等式替换积分方程中时间导数因子方程. 方程(7)也被称为符号 Poynting 定理. $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 其中, \mathbf{S} 称为 Poynting 因子, 是能量通量或者说单位面积的能量流速.

2.3 通过边界输入的电磁能量

外部环境通过边界输入的能量速度为:

$$\dot{W} = - \iint_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}. \quad (8)$$

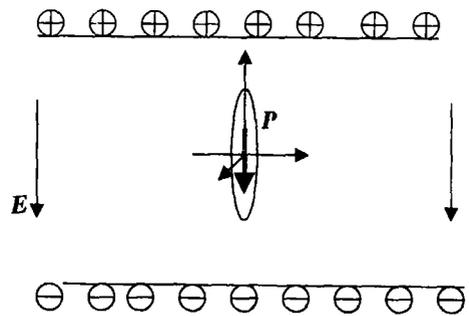


图 2 电场作用下形成的球状极化粒子链

2.4 电场和磁场做的功

系统电磁能量的变化速率为:

$$\dot{G} = \dot{W} - \dot{U} + \Delta\dot{U} = p_s \iint_S E_3^1 \dot{R}(t) ds - \iint_S [S] \cdot ds + \Delta\dot{U} = \iint_S \{ p_s E_3^1 \dot{R}(t) - [S_i] n_i \} ds + \Delta\dot{U}, \quad (9)$$

这里是对链的表面所求的积分。如上所述,电场和磁场对系统所做的功应该等于系统电磁能的减少。因而:

$$\dot{W}_e + \dot{W}_m = -\dot{G}. \quad (10)$$

事实上, \dot{G} 提供了链生长的动力。当 $\dot{G} > 0$ 时,链生长时电场和磁场对系统做正功。由椭球形夹杂的内部和外部的电场和磁场的表达式,可以得到能量的变化速率:

$$\dot{G} = \frac{p_s^2}{\epsilon_f} \frac{dN}{dt} v_a \left[\frac{1}{6} - \frac{I_3(\beta)}{8\pi} \right] - \frac{p_s^2}{4\pi\epsilon_f} \frac{1}{c_f^2} \iint_\Gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \dot{R}(t) ds, \quad (11)$$

式中,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \frac{1}{2} [I(\lambda) - x_n x_n I_N(\lambda)], \\ x_n x_n I_N(\lambda) &= x_1^2 I_1(\lambda) + x_2^2 I_2(\lambda) + x_3^2 I_3(\lambda), \\ \begin{cases} I(\lambda) = \frac{4\pi a_1 a_3}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \operatorname{arccosh} \bar{b}, \\ I_3(\lambda) = 4\pi\beta (\operatorname{arccosh} \bar{b} - \bar{d}/\bar{b}) / (\beta^2 - 1)^{3/2}, \\ I_1(\lambda) = I_2(\lambda) = 2\pi\beta (\bar{b}\bar{d} - \operatorname{arccosh} \bar{b}) / (\beta^2 - 1)^{3/2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

式中,

$$\bar{b} = \sqrt{(a_3^2 + \lambda)/(a_1^2 + \lambda)}, \quad \bar{d} = \sqrt{(a_3^2 - a_1^2)/(a_1^2 + \lambda)},$$

λ 是方程的最大正数解,

$$\frac{x_1^2}{(a_1^2 + \lambda)} + \frac{x_2^2}{(a_2^2 + \lambda)} + \frac{x_3^2}{(a_3^2 + \lambda)} = 1. \quad (13)$$

当 x 在夹杂内部时, $\lambda = 0$ 。

能量的释放率可以写成以下形式

$$\dot{G} = g \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad (14)$$

其中, $g = \partial G / \partial \beta$ 是链的长径比产生单位长度增大时释放的能量,

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{dN}{dt}, \quad (15)$$

其中, dN/dt 是链上聚集的粒子数目的变化速率。从方程(10)中,可以得到:

$$\delta W_e + \delta W_m = -g \delta \beta, \quad (16)$$

式中

$$g = \frac{p_s^2}{\epsilon_f} v_a \left[\frac{1}{6} - \frac{I_3(\beta)}{8\pi} \right] - \frac{p_s^2}{4\pi\epsilon_f} \frac{1}{c_f^2} \iint_\Gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial R}{\partial \beta} ds. \quad (17)$$

考虑到 Φ 仅是 β 的函数,方程(17)可以改写为:

$$g = \frac{p_s^2}{\epsilon_f} v_a \left[\frac{1}{6} - \frac{I_3(\beta)}{8\pi} \right] -$$

$$\frac{p_s^2}{8\pi\epsilon_f} \frac{1}{c_f^2} \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \iint_R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \frac{\partial R}{\partial \beta} ds + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \iint_R \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial R}{\partial \beta} ds \right] =$$

$$A(\beta) \frac{d^2 \beta}{dt^2} + B(\beta) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + C(\beta), \quad (18)$$

式中

$$A(\beta) = - \frac{p_s^2}{8\pi\epsilon_f} \frac{1}{c_f^2} \iint_R \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial R}{\partial \beta} ds, \quad (19)$$

$$B(\beta) = - \frac{p_s^2}{8\pi\epsilon_f} \frac{1}{c_f^2} \iint_R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \frac{\partial R}{\partial \beta} ds, \quad (20)$$

$$C(\beta) = \frac{p_s^2}{\epsilon_f} v_a \left[\frac{1}{6} - \frac{I_3(\beta)}{8\pi} \right]. \quad (21)$$

3 惯性力做的虚功

在数值模拟时,惯性力通常被忽略。但如果在链的生长过程中,粒子的密度较大时,惯性力就应该在分析中得以体现。下面将提供两种简单的粒子运动的模型,进而得到惯性力所做的虚功。

1. 粒子以常数加速度向链运动

最初处于静态的粒子被吸引到链上时,粒子应该以加速的方式运动。这个加速度根据 D'Alembert 原理,将产生惯性力,粒子运动时它应该做一定量的功。这里,我们可以得到惯性力做功的表达式。为了简化模型,假定粒子以常加速度 a 向链移动。粒子与链之间的距离是 Δx ,根据粒子密度可以得到该值。如果链生长的速度为 β ,粒子聚集到链上的时间应该为:

$$t = 1/\beta. \quad (22)$$

当一个粒子附到链上时,相应的链的长径比 β 增大一个单位。因此,加速度可以通过下面等式确定:

$$\Delta x = \int_0^t v dt = \int_0^t a t dt = \frac{1}{2} \frac{a}{\beta^2}. \quad (23)$$

由方程(23)和(22)可以得出:

$$a = 2\Delta x \beta^2. \quad (24)$$

由于单位长径比的质量密度是一个粒子的质量,因此作用在微单元 $\delta\beta$ 上的惯性力为

$$f_i = m\delta\beta a = 2\Delta x \beta^2 m\delta\beta, \quad (25)$$

其中, m 是一个粒子的质量。惯性力的方向与加速度的方向相反,因而,系统通过惯性力作的功为:

$$\delta W_i^I = f_i \Delta x = 2\Delta x^2 \beta^2 m\delta\beta, \quad (26)$$

这意味着惯性力在系统中做负功。

2. 粒子聚集到链上时速度减为零

粒子最初保持静态。因此,如果假定粒子最初和最后的速度为零,动能将保持不变,因此,惯性力所做的功应为零。

$$\delta W_i^{II} = \int_0^{\Delta x} f_i dx = m\delta\beta \int_0^t v dt = m\delta\beta \int_0^t v dv =$$

$$\frac{1}{2} m\delta\beta [v^2(t) - v^2(0)] = 0. \quad (27)$$

4 粘性体摩擦力所做虚功

当粒子移动聚集到链上时,粒子将受到流体的粘滞阻力,如果粒子的速度用 v 表示,在其不太大时,即雷诺数 $Re \leq 0.2$ 的情况下,粒子所受的粘滞阻力可以通过 Stokes 阻力公式近似给出:

$$f_v = 6\pi\eta_0 a_1 v, \quad (28)$$

式中 η_0 是液体粘度, a_1 为粒子半径. 对微元 $\delta\beta$, 阻力为 $f_v\delta\beta$. 因此,经过位移 Δx , 摩擦力所做功如下所示:

$$\delta W_f = \int_0^{\Delta x} f_v \delta\beta dx = \int_0^t f_v \delta\beta v dt = 6\pi\eta_0 a_1 a^2 \delta\beta \int_0^t v^2 dt. \quad (29)$$

将公式(22)、(24)代入式(29),得

$$\delta W_f = 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \beta \delta\beta. \quad (30)$$

5 链形成的基本微分方程

将式(16)、(26)和(30)代入虚功表达式,公式(1)给出了链形成的基本微分方程:

$$A(\beta) \frac{d^2\beta}{dt^2} + [B(\beta) - 2m\Delta x^2] \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \frac{d\beta}{dt} + T \frac{dS}{d\beta} + C(\beta) = 0. \quad (31)$$

式(31)是链生长的控制方程,包含了我们所建能量模型中惯性力的影响,公式(31)与对一个粒子进行计算机模拟所使用的公式在形式上相似,其中含有温度和熵的项与布朗力相似.

表达式 $A(\beta)$ 和 $B(\beta)$ 如式(19)、(20)所示, c_f 表示电磁波在流体中的传播速度,它应该比链增长速度 $d\beta/dt$ 大得多,当链成形达到稳态时,式(31)中的第一项可以忽略,因此,式(31)变为:

$$2m\Delta x^2 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \frac{d\beta}{dt} - T \frac{dS}{d\beta} - C(\beta) = 0. \quad (32)$$

式(32)的解通过下式给出:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{4m\Delta x^2} \left\{ \sqrt{(8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2)^2 + 8m\Delta x^2 [C(\beta) + T dS/d\beta]} - 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \right\}, \quad (33)$$

其中,我们忽略了速率为负数的解.

从式(33)中,我们可以清楚地得到链形成的速度与施加的电场,液体的介电常数,粒子浓度、大小以及质量密度之间的关系.

如果我们采用微粒运动的第二种模型,将式(16)、(27)和(30)代入虚功表达式,公式(1)给出了链形成的基本微分方程:

$$A(\beta) \frac{d^2\beta}{dt^2} + B(\beta) \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \frac{d\beta}{dt} + T \frac{dS}{d\beta} + C(\beta) = 0. \quad (34)$$

利用得到式(32)同样的理论,能够得到:

$$8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \frac{d\beta}{dt} - T \frac{dS}{d\beta} - C(\beta) = 0. \quad (35)$$

速率如下所示:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2} [C(\beta) + T \frac{dS}{d\beta}]. \quad (36)$$

当 β 从 1 增大到无穷大时,式(21)中的 $C(\beta)$ 从 0 增加到 $p_s^2 v_a / 6\epsilon_f$, 式(36)所给出的速率与 β 的关系如图 3 所示. 其中,为简便起见,我们忽略了体系与外界的热传递. 从图中可以清

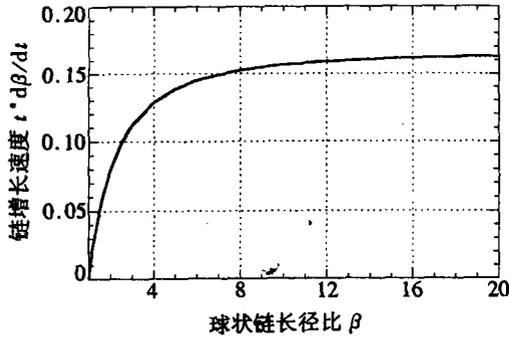
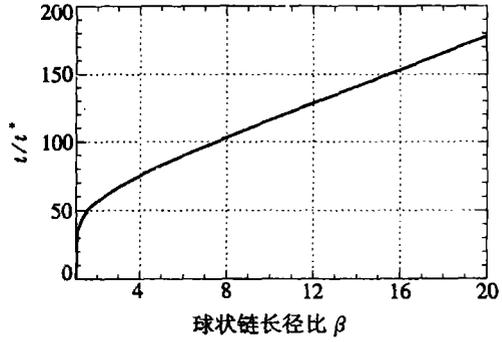
图3 球状链增长速度 $t^* d\beta/dt$ ($t^* = \bar{\mu}\epsilon_f \Delta x^2 / (p_s^2 v_a)$)随链长径比 β 的变化

图4 链通过电极之间所需的时间

 t/t^* ($t^* = \bar{\mu}\epsilon_f \Delta x^2 / (p_s^2 v_a)$)

楚地看出,链形成的速率很快达到最大稳定值。从式(33)与(36),链形成的最大速率分别利用如下两式给出:

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{\max 1} = \frac{1}{4m\Delta x^2} \left\{ \sqrt{(8\pi\eta_0^2 a_1 \Delta x^2)^2 + 8m\Delta x^2 [p_s^2 v_a / 6\epsilon_f + T dS/d\beta]} - 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \right\}, \quad (37)$$

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_{\max 2} = \frac{1}{8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2} \left[\frac{p_s^2 v_a}{6\epsilon_f} + T \frac{dS}{d\beta} \right]. \quad (38)$$

式(36)也给出了链通过电极之间所需的时间,如图4所示,其中, $t^* = \bar{\mu}\epsilon_f \Delta x^2 / (p_s^2 v_a)$ 。从图3与图4中可以看出链开始增长后不久,就达到稳定增长速度。

如果我们定义相转变的临界场为引起链形成所施加电场的最低值,那么,电场可以根据以下条件确定:

$$C(\beta) + T \frac{dS}{d\beta} = 0. \quad (39)$$

当 $\beta \rightarrow \infty$ 时,我们能够决定导致成链的电场的更低值,

$$E_c = \sqrt{\frac{32\pi^2 RT}{3\alpha^2 \epsilon_f v_a}}, \quad (40)$$

式中 $R = -dS/d\beta$, 在方程(40)的推导中,我们利用了方程(31)。方程(40)的形式与 Tao 等人^[2]得到的结果相似,基于该模型,若要考虑温度效应,我们首先需要知道链形成过程中熵的改变。

6 理论分析结果与实验结果及分子动力学模拟结果的比较

基于我们的模型,我们把形成连结电极间的桥链所需时间定义为响应时间,可以通过对方程(36)积分得到:

$$\tau = 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \int_0^{L/a_1} \left[C(\beta) + T \frac{dS}{d\beta} \right]^{-1} d\beta, \quad (41)$$

其中, L 为电极间间隙距离,若链形成过程中热传递忽略不计,再把方程(21)代入方程(41)中,可得到:

$$\tau = 8\pi\eta_0 a_1 \Delta x^2 \frac{\epsilon_f}{p_s^2 v_a} \int_0^{L/a_1} \left[\frac{1}{6} - \frac{I_3(\beta)}{8\pi} \right]^{-1} d\beta. \quad (42)$$

由于电极矩密度 p_s 与外场 E^e 成比例,响应时间与 $1/(E^e)^2$ 成比例。因此,该预报与模拟结果

和实验结果符合。响应时间与颗粒的体浓度之间的关系用参数 Δx 表示, Δx 是颗粒聚集到链上所需移动的平均距离。由于颗粒在空间的随机分布, Δx 与颗粒体浓度之间的关系就成为一个复杂的几何问题。假设链是沿线 oo' 形成的, oo' 是指电极上下表面间的连线。假设体积 v 中颗粒的数量服从泊松分布等, 则, 体积 v 中包含 k 个颗粒的概率为:

$$Pr(i = k) = \frac{(nv)^k}{k!} e^{-nv}, \quad (43)$$

其中, n 为单位体积的颗粒平均数。为了获得颗粒与链所处位置 oo' 之间最短距离, 我们来考虑一个 oo' 近邻的半径为 r 的圆柱形。该区域不包含颗粒的概率为:

$$Pr(i = 0) = e^{-nv} = e^{-\pi n L r^2}, \quad (44)$$

颗粒位置的概率密度函数为 $2\pi n L r$ 。因此, 假如在半径为 r 的圆柱区域内无颗粒, 那么, 颗粒与 oo' 之间的最短距离概率密度函数是条件概率密度函数, 因此

$$f(r) = 2\pi n L r e^{-\pi n L r^2}. \quad (45)$$

平均距离 Δx 由下式积分可以得到

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^{\infty} r f(r) = \int_0^{\infty} 2\pi n L r^2 e^{-\pi n L r^2} dr = \\ &2\pi n L \int_0^{\infty} r^2 e^{-\pi n L r^2} dr = (\pi n L)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (46)$$

单位体积的颗粒平均数目与体积含量之间关系, 如下

$$n = \Psi / v_a \quad (47)$$

其中, Ψ 是颗粒的体浓度, v_a 是单个颗粒的平均体积。

把方程(47)代入(46)中, 可以看到

$$\Delta x = (\pi L)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{v_a}{\Psi}\right)^{1/2}, \quad (48)$$

再把方程(48)代入响应时间表达式(42)中, 我们发现响应时间有关系 $\tau \propto \Psi^{-1}$ 。Klingenberg 等人(1993)^[4] 对响应时间进行了实验测量, 他们发现实验数据分散性较大, 响应时间按 $\tau \propto \Psi^{-2.8}$ 变化, 然而, 他们的计算机模拟结果 $\tau \propto \Psi^{-3.2}$ 。就目前来看, 要对响应时间进行精确的实验测量依然是个挑战。

7 结 论

最后, 对本文所涉及的内容进行一下总结。

1) 在本文中, 基于热力学分析, 我们提出了电流变液中链形成过程的虚功原理。根据能量法则, 建立起了电流变液链形成的控制偏微分方程。这种能量方法同经典分子动力学模拟方程相比所具有的优势就好比拉格郎日分析方法同牛顿力学相比具有的优势一样。利用该能量法, 我们可以把许多参数看成广义坐标, 用以描述此系统的自由度。在本文中, 我们只把链的长径比 β 看作广义坐标。当然, 广义坐标的数量可能要比颗粒的数量少得多, 事实上, 在特例中, 假如我们指定了每个颗粒的 3 个自由度, 则通过这种能量法, 也可获得用于计算机模拟的动态控制方程。

2) 我们精确地获得了链形成的速度, 并发现, 一旦链开始传播, 它将以匀速进行。

3) 我们获得了电流变液系统的响应时间, 并将其与实验结果和数值结果进行了比较。

4) 虽然本文中提出的能量法对许多复杂的电流变液结构都具有通用性, 但在该研究中采

用了不计电极间的映像效应和把链看作是扁长的椭球状体等假设,限制了该结果的应用。为了能够处理更多的复杂结构,我们可以采用更多的广义坐标来描述系统的自由度,而不是单单使用链的长径比 β 这样一个广义坐标。

[参 考 文 献]

- [1] Winslow W M. Induced fibrillation of suspensions[J]. *J Appl Phys*, 1949, **20**:1137.
- [2] Tao R, Sun J M. Three-dimensional structure of induced electrorheological solid[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, **67**:398.
- [3] Klingenberg D J, Van Swol F, Zukoski C F. Dynamic simulation of electrorheological suspensions[J]. *J Chem Phys*, 1989, **91**:7888.
- [4] Parthasarathy M, Klingenberg D J. A microstructural investigation of the nonlinear response of electrorheological suspensions[J]. *Rheol Acta*, 1995, **34**:417.
- [5] Klingenberg D J, Van Swol F, Zukoski C F. The small shear rate response of electrorheological suspensions- II: Extension beyond the point-dipole limit[J]. *J Chem Phys*, 1991, **94**:6170.

A Theoretical Modelling of the Chain Structure Formation in Electrorheological Fluids

LIU Yu-lan, WANG Biao, WANG Dian-fu

(Research Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: A model was developed to understand the aggregation process of the particles in electrorheological (ER) fluids under the action of an applied electric field. By establishing a generalized virtual work principle based on the consideration that the released electromagnetic energy accompanying the growth of the chain should equal to the dissipated energy related with friction resistance of the viscous fluid in the chain formation, the governing differential equation of the chain growth was established. Based on this energy model, the velocity of the chain forming, and the response time of ER fluid can be predicted. The present model can also predict the effect of the temperature and some microstructural parameters, such as the dielectric constants and concentration of the particles, etc., on the response of an ER system.

Key words: electrorheological fluid; response time; dynamic model