

文章编号:1000-0887(2004)01-0053-14

# 三维非定常/定常不可压缩流动 N-S 方程基于人工压缩性方法的数值模拟<sup>\*</sup>

温功碧<sup>1</sup>, 陈作斌<sup>2</sup>

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 湍流与复杂系统研究国家重点实验室, 北京 100871;

2. 中国空气动力研究和发展中心, 四川 绵阳 621000)

(本刊原编委吴望一推荐)

**摘要:** 基于人工压缩性方法提出一中心与迎风混合的算法, 以数值模拟 N-S 方程的定常/非定常解。对半离散方程的左端采用中心差分, 方程右端数值流量采用迎风 Roe 近似算法, 其精度可达三阶。湍流模式利用 Baldwin-Lomax 代数模式。计算例子包括二维平板、机翼剖面、扁椭球、颅动脉瘤等。计算结果表明, 压力和摩擦系数与实验符合, 在分离涡旋区计算值与实验有差别, 这或许是由于湍流模式不够精确的缘故。

**关键词:** 不可压缩流 N-S 方程; 数值模拟; 人工压缩性; 中心和迎风混合算法; 绕扁椭球流动; 非定常/定常流动

**中图分类号:** R318.01      **文献标识码:** A

## 引 言

不可压缩流 N-S 方程的数值模拟有着广泛的需求, 例如空气动力学中的低速流, 喷气推进的内流, 生物流动分析等。当低速飞行器作机动飞行时, 还要求解时间精度的不可压缩 N-S 方程。

可压缩与不可压缩流之间一个基本的差别。在于, 在不可压缩流中压力并不是热力学变量, 而是流场的一个原始变量; 在连续方程中不包含压力项, 只是给出一散度为零的速度场约束条件, 在方程中组速度和压力并不直接耦合。这样, 速度和压力之间关系模式便成为数值模拟不可压缩流 N-S 方程的关键。

已经有不少求解不可压缩 N-S 方程的方法。每一方法都集中在如何处理速度和压力的关系, 使散度为零的连续方程得以满足。本文方法是首先被 Chorin<sup>[1]</sup> 提出并被称为人工压缩性方法。在这个方法中, 虚拟时间导数被加到坐标变换后的连续方程中, 这样压力和速度不仅直接耦合, 而且改变后的方程变为双曲型方程, 可应用可压缩流中的时间推进算法。最初应用人工压缩性方法限于定常问题<sup>[2,3,4]</sup>, 目前已被推广到非定常流动<sup>[5,6,7]</sup>。

本文首先对方程进行线化和有限体积近似得半离散 N-S 方程, 为了避免求流量 Jacobian

\* 收稿日期: 2002-06-18; 修订日期: 2003-07-22

作者简介: 温功碧(1935—), 女, 四川梁平人, 教授

(联系人. Tel: 86-10-62752334; E-mail: wengb@mech.pku.edu.cn).

的数值导数,对半离散方程的左端进行因式分解或进一步对角化,并采用中心差分加二阶人工粘性;对右端在网格界面上的数值流量采用基于 Roe 的近似 Riemann 解算法,高分辨率迎风分裂格式<sup>[8]</sup>,其精度可达三阶精度. 非定常解是对每一物理时间步  $n$ ,通过  $m$  次迭代以满足散度精度得到的. 湍流模式采用 Baldwin-Lomax 代数模式<sup>[9]</sup>.

远场边界条件采用特征边条件和普通边界条件两种. 对于定常流动,物面压力由压力法向梯度为零确定,无滑移的物面不可渗透条件和对称条件是隐式满足的;对于非定常流动,物面压力由满足物面条件的动量方程给出. 计算例子包括二维平板、机翼剖面、椭球、颅动脉瘤. 计算结果表明,在无分离区,压力和摩擦系数与实验符合. 最大差别在分离区,此处 Baldwin-Lomax 代数模式不能精确描述流动.

## 1 控制方程和人工压缩性方法

设  $x, y, z$  为直角坐标系,  $t$  为物理时间,  $\tau$  为虚拟时间,  $p$  为压力,  $u, v, w$  分别为沿坐标  $x, y, z$  的速度分量.  $x, y, z$  以特征长度  $L$  来无量纲化,  $t$  和  $\tau$  以  $L_\infty/U_\infty$ ,  $u, v, w$  以  $U_\infty$ , 粘性系数  $\mu$  以  $\mu_\infty$ ,  $\rho$  和粘性力以  $\rho_\infty U_\infty^2$  分别无量纲化. 其中  $U_\infty, \mu_\infty, \rho_\infty$  分别为来流的速度、粘性系数和来流密度. 设曲线坐标为

$$\xi = \xi(x, y, z, t), \quad \eta = \eta(x, y, z, t), \quad \zeta = \zeta(x, y, z, t). \quad (1)$$

人工压缩性方法就是在转换后的曲线坐标  $(\xi, \eta, \zeta)$  中的连续方程左端引进一虚拟的压力对时间的导数项. 在动量方程中,对于非定常问题,除物理时间外,也引进一虚拟时间,将连续方程和动量方程写为统一的三维人工压缩守恒型 N-S 方程,即是<sup>[6]</sup>

$$I_m \frac{\partial \mathbf{q}}{J \partial t} + \frac{\partial \mathbf{q}}{J \partial \tau} + \frac{\partial(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial \zeta} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

也就是连续方程中没有物理时间导数项,只有虚拟时间导数. 对于定常流,动量方程中对物理时间  $t$  的导数项消失,只剩下对虚拟时间的导数项.

$$\text{其中 } I_m = \text{diag}(0, 1, 1, 1), \quad (3)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta(\theta_k - k_t) \\ k_x p + u \theta_k \\ k_y p + v \theta_k \\ k_z p + w \theta_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ T_{k1} \\ T_{k2} \\ T_{k3} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$\theta_k = k_t + uk_x + vk_y + wk_z, \quad (5)$$

$$\begin{cases} k = \xi, \quad \mathbf{K} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}_v = \mathbf{E}_v, \quad \theta_k = U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \\ k = \eta, \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{S}_v = \mathbf{F}_v, \quad \theta_k = V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \\ k = \zeta, \quad \mathbf{K} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{S}_v = \mathbf{G}_v, \quad \theta_k = W = \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} T_{k1} = \frac{\mu}{Re} \left[ (2k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial u}{\partial k} + k_x k_y \frac{\partial v}{\partial k} + k_x k_z \frac{\partial w}{\partial k} \right], \\ T_{k2} = \frac{\mu}{Re} \left[ (k_x^2 + 2k_y^2 + k_z^2) \frac{\partial v}{\partial k} + k_x k_y \frac{\partial u}{\partial k} + k_y k_z \frac{\partial w}{\partial k} \right], \\ T_{k3} = \frac{\mu}{Re} \left[ (k_x^2 + k_y^2 + 2k_z^2) \frac{\partial w}{\partial k} + k_x k_z \frac{\partial u}{\partial k} + k_y k_z \frac{\partial v}{\partial k} \right], \end{cases} \quad (7)$$

$J$  是坐标变换的 Jacobian, 即

$$J^{-1} = x_{\xi}(y_{\eta}z_{\zeta} - z_{\eta}y_{\zeta}) - y_{\xi}(x_{\eta}z_{\zeta} - z_{\eta}x_{\zeta}) + z_{\xi}(x_{\eta}y_{\zeta} - y_{\eta}x_{\zeta}), \quad (8)$$

$Re = (\rho_{\infty} U_{\infty} L) / \mu_{\infty}$  为来流的雷诺数.  $\mu = \mu_t + \mu_e$ ,  $\mu_t, \mu_e$  分别为分子粘性系数和湍流粘性系数, 湍流粘性采用 Baldwin-Lomax 代数模式<sup>[9]</sup>,  $\beta$  称为人工压缩性因子, 一般取 1 到 10.

## 2 方程离散和因式分解

$$\text{令 } \hat{\mathbf{R}} = \frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v), \quad (9)$$

方程(2)变为

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{J \partial \tau} = -\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{I}_m \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}. \quad (10)$$

方程(10)左端虚拟时间导数采用一阶欧拉隐式, 即

$$\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^{n+1, m+1}}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{q}^{n+1, m+1} - \mathbf{q}^{n+1, m}}{J \Delta \tau}. \quad (11)$$

方程(10)右端物理时间导数采用二阶三点后差公式, 即

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{n+1, m}}{\partial t} = \frac{3\mathbf{q}^{n+1, m} - 4\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (12)$$

其中  $n$  表示第  $n$  层物理时间,  $m$  表示第  $m$  层虚拟时间. 此式表示, 对每一物理时间由  $n$  层推进到  $n+1$  层时, 方程被  $m$  次迭代求解, 以使得当散度趋于零时,  $\mathbf{q}^{n+1, m+1}$  趋向新的  $\mathbf{q}^{n+1}$ . 对于定常情况, 则只有虚拟时间. 方程(10)右端  $\hat{\mathbf{R}}$  是  $\mathbf{q}$  的非线性函数, 为节省计算时间和避免数值导数, 将  $\hat{\mathbf{R}}$  线性化, 即

$$\hat{\mathbf{R}}^{n+1, m+1} = \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m} + \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m}}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}^{n+1, m}, \quad (13)$$

其中

$$\Delta \mathbf{q}^{n+1, m} = \mathbf{q}^{n+1, m+1} - \mathbf{q}^{n+1, m}, \quad (14)$$

于是(10)右端变为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m+1} + \mathbf{I}_m \frac{\partial \mathbf{q}^{n+1, m+1}}{J \partial t} &= \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m} + \left( \mathbf{I}_m \frac{3}{2J\Delta t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m}}{\partial \mathbf{q}^{n+1, m}} \right) \times \\ &(\mathbf{q}^{n+1, m+1} - \mathbf{q}^{n+1, m}) + \mathbf{I}_m \frac{3\mathbf{q}^{n+1, m} - 4\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{2J\Delta t}. \end{aligned} \quad (15)$$

将(11), (12)和(15)代入(10)整理后得

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I}_d + J\Delta\tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m}}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \mathbf{q}^{n+1, m} &= \\ - J\Delta\tau \left( \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m} + \mathbf{I}_m \frac{1.5\mathbf{q}^{n+1, m} - 2\mathbf{q}^n + 0.5\mathbf{q}^{n-1}}{J\Delta t} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{其中 } \mathbf{I}_d = \text{diag} \left( 1, 1 + 1.5 \frac{\Delta\tau}{\Delta t}, 1 + 1.5 \frac{\Delta\tau}{\Delta t}, 1 + 1.5 \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right). \quad (17)$$

令

$$\mathbf{RHS} = - J\Delta\tau \left( \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m} + \mathbf{I}_m \frac{1.5\mathbf{q}^{n+1, m} - 2\mathbf{q}^n + 0.5\mathbf{q}^{n-1}}{J\Delta t} \right), \quad (18)$$

并代入(16)式得

$$\left( \mathbf{I}_d + J\Delta\tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}^{n+1, m}}{\partial \mathbf{q}} \right) \Delta \mathbf{q}^{n+1, m} = \mathbf{RHS}. \quad (19)$$

$\partial \hat{\mathbf{R}} / \partial \mathbf{q}$  可由(9)对  $\mathbf{q}$  求导数, 并交换  $\mathbf{q}$  与  $\xi, \eta$  和  $\zeta$  的微分次序, (16)化为

$$\left\{ I_d + J\Delta\tau \left[ \frac{\partial}{\partial\xi}(A - \Gamma_1) + \frac{\partial}{\partial\eta}(B - \Gamma_2) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(C - \Gamma_3) \right] \right\}^{n+1,m} \Delta q^{n+1,m} = RHS. \quad (20)$$

由(4)第二式求导数可得无粘流量的 Jacobian 矩阵  $\partial K_i / \partial q_j = \bar{K}$  为

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \hat{k}_x & \beta \hat{k}_y & \beta \hat{k}_z \\ \hat{k}_x & \hat{\theta}_k + u \hat{k}_x & u \hat{k}_y & u \hat{k}_z \\ \hat{k}_y & v \hat{k}_x & \hat{\theta}_k + v \hat{k}_y & v \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & w \hat{k}_x & w \hat{k}_y & \hat{\theta}_k + w \hat{k}_z \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\hat{k}_m = \frac{k_m}{J}, \quad m = x, y, z, \quad (22)$$

$$\text{其中 } \hat{\theta}_k = \hat{k}_t + \hat{k}_x u + \hat{k}_y v + \hat{k}_z w = \frac{\theta_k}{J}, \quad (23)$$

$$\text{当 } k = \xi, \quad \bar{K} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A}, \quad \hat{\theta}_k = \frac{U}{J}, \quad (24a)$$

$$\text{当 } k = \eta, \quad \bar{K} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}, \quad \hat{\theta}_k = \frac{V}{J}, \quad (24b)$$

$$\text{当 } k = \zeta, \quad \bar{K} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}, \quad \hat{\theta}_k = \frac{W}{J}. \quad (24c)$$

至于粘性 Jacobian  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , 因在方程左端, 采用正交曲线坐标近似, 即忽略粘性交叉项, 保留正交项, 这只对收敛过程有影响, 于是可得<sup>[10]</sup>

$$\Gamma_i = \frac{1}{ReJ} \nabla k (\nabla k_j J_m \frac{\partial}{\partial k_j}), \quad (25)$$

其中  $i = 1, 2, 3; k = \xi, \eta, \zeta$ ; 分别对应于

$$\Gamma_1 = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \mathbf{q}}, \quad \Gamma_2 = \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{q}}, \quad \Gamma_3 = \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \mathbf{q}}.$$

采用中心差分加二阶人工粘性以抑制高频振荡, (20)式因式分解后得

$$\begin{cases} [I_d + J\Delta\tau\delta_\xi(A - \gamma_1 I_m \delta_\xi) - I\epsilon_i \nabla_\xi \Delta_\xi] \Delta \mathbf{q}^{**} = RHS, \\ [I + J\Delta\tau\delta_\eta(B - \gamma_2 I_m \delta_\eta) - I\epsilon_i \nabla_\eta \Delta_\eta] \Delta \mathbf{q}^* = \Delta \mathbf{q}^{**}, \\ [I + J\Delta\tau\delta_\zeta(C - \gamma_3 I_m \delta_\zeta) - I\epsilon_i \nabla_\zeta \Delta_\zeta] \Delta \mathbf{q}^n = \Delta \mathbf{q}^*, \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{其中 } \gamma_i = \frac{1}{Re} J \nabla k \cdot \nabla k. \quad (27)$$

(26)每一方程是一三对角块方程, 每块为  $4 \times 4$  的矩阵. 为减少三对角块求逆的时间, 也可将每块对角化, 得到标量三对角矩阵. 但数值计算表明对角化的结果不如块三角矩阵的结果好, 因为又引进了对角化误差.

### 3 数值流量

计算方程右端项 RHS 时, 需计算  $\hat{R}$ , 利用有限体积近似, (9)式离散为

$$\hat{R} = \delta_i(\hat{E} - \hat{E}_v) + \delta_j(\hat{F} - \hat{F}_v) + \delta_k(\hat{G} - \hat{G}_v), \quad (28)$$

其中  $\hat{E}, \hat{E}_v, \hat{F}, \dots$  为  $E, E_v, F, \dots$  在格子界面上取值, 表示通过格子界面上的数值流量, 它可用 Roe 近似 Riemann 解算法<sup>[8]</sup>得到. 就是构造一满足  $U$  特性的近似 Jacobian 矩阵  $\bar{K}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})$  (称 Roe 矩阵), 即在真实矩阵中的变量用 Roe 变量  $\bar{\mathbf{q}}$  代替.

所谓 Roe 变量, 为了满足  $U$  特性, 在不可压缩流中取简单的平均, 即

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(q^L + q^R), \quad (29)$$

其中  $q^L, q^R$  分别代表格子左边界面和右边界面上的变量。文献[11]给出

$$\begin{cases} q_{i+1/2}^L = q_i + \frac{\Phi}{4} [(1 - \Psi)(q_i - q_{i-1}) + (1 + \Psi)(q_{i+1} - q_i)], \\ q_{i+1/2}^R = q_{i+1} - \frac{\Phi}{4} [(1 - \Psi)(q_{i+2} - q_{i+1}) + (1 + \Psi)(q_{i+1} - q_i)], \end{cases} \quad (30)$$

其他两个方向类似。其中  $\Phi = 0$  为一阶迎风格式,  $\Phi = 1, \Psi = -1$  为二阶迎风格式,  $\Phi = 1, \Psi = 1/3$  为三阶迎风斜格式。一旦 Roe 变量确定后, Roe 矩阵及其左、右特征向量和数值流量便确定了。

本文的数值流量公式来自文献[12]。该文给出的在  $i + 1/2$  介面上的数值流量为

$$\begin{aligned} \hat{E}_{i+1/2} = & [E(q_i)]_{i+1/2} + \sum_{l=1}^m \sigma_{l,i+1/2}^- R_{i+1/2}^l + \\ & \frac{\Phi}{4} \sum_{l=1}^m \{ (1 - \Psi) [\sigma_{l,i-1/2}^+ - \sigma_{l,i+3/2}^-] + \\ & (1 + \Psi) [\sigma_{l,i+1/2}^+ - \sigma_{l,i+1/2}^-] \} R_{i+1/2}^l, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_{l,i+p/2}^\pm = \lambda_{i+1/2}^{\pm(l)} \cdot \alpha_{l,i+p/2} (p = -1, 1, 3), \\ \alpha_{l,i-1/2} = L_{i+1/2}^l (q_i - q_{i-1}), \\ \alpha_{l,i+1/2} = L_{i+1/2}^l (q_{i+1} - q_i), \\ \alpha_{l,i+3/2} = L_{i+1/2}^l (q_{i+2} - q_{i+1}), \end{cases} \quad (32)$$

矩阵  $L = R_k^{-1}$ , 它的行为 Roe 矩阵  $\bar{K}(q, \bar{q})$  的左特征向量,  $R_k$  的列为  $\bar{K}(q, \bar{q})$  的右特征向量, 它由无粘 Jacobi(21)式的相似变换得到。事实上<sup>[12]</sup>,

$$\bar{K} = R_k \Lambda_k R_k^{-1}, \quad (33)$$

$$\text{其中 } \Lambda_k = \text{diag}(\lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4) \quad (34)$$

为由特征值组成的对角矩阵。

特征值

$$\begin{cases} \lambda_k^1 = \lambda_k^2 = \theta_k = \hat{k}_i + \hat{k}_x u + \hat{k}_y v + \hat{k}_z w, \\ \lambda_k^3 = \theta_k - \frac{1}{2} \hat{k}_i + \epsilon, \\ \lambda_k^4 = \theta_k - \frac{1}{2} \hat{k}_i - \epsilon, \end{cases} \quad (35)$$

$\epsilon$  为人工音速, 其表达式为

$$\epsilon = \sqrt{\left(\theta_k - \frac{1}{2} \hat{k}_i\right)^2 + \beta(\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2)}. \quad (36)$$

同前  $k = \xi, \eta$  或  $\zeta$ , 矩阵  $R_k, R_k^{-1}$  分别为

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\bar{c}^- & -\bar{c}^+ \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{k}_x + \frac{u\lambda_k^3}{\beta|\nabla\bar{k}|} & \bar{k}_x + \frac{u\lambda_k^4}{\beta|\nabla\bar{k}|} \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{k}_y + \frac{v\lambda_k^3}{\beta|\nabla\bar{k}|} & \bar{k}_y + \frac{v\lambda_k^4}{\beta|\nabla\bar{k}|} \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{k}_z + \frac{w\lambda_k^3}{\beta|\nabla\bar{k}|} & \bar{k}_z + \frac{w\lambda_k^4}{\beta|\nabla\bar{k}|} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{R}_k^{-1} = \mathbf{L}_k = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} \frac{2\bar{c}}{\beta}(-u\phi_4 + v\phi_5 - w\phi_6) & 2\bar{c}\phi_4 & -2\bar{c}\phi_5 & 2\bar{c}\phi_6 \\ \frac{2\bar{c}}{\beta}(u\phi_7 - v\phi_8 + w\phi_9) & -2\bar{c}\phi_7 & 2\bar{c}\phi_8 & -2\bar{c}\phi_9 \\ \frac{\phi}{2\bar{c}} - \frac{2\bar{c}^+}{\beta}(\bar{\theta}_k - \bar{k}_t) & 2\bar{c}^+ \bar{k}_x & 2\bar{c}^+ \bar{k}_y & 2\bar{c}^+ \bar{k}_z \\ -\frac{\phi}{2\bar{c}} + \frac{2\bar{c}^-}{\beta}(\bar{\theta}_k - \bar{k}_t) & -2\bar{c}^- \bar{k}_x & -2\bar{c}^- \bar{k}_y & -2\bar{c}^- \bar{k}_z \end{bmatrix}, \quad (38)$$

其中,特征向量 $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ 本文取曲线坐标的切向,归一化后为

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{|\nabla\bar{k}_l|^{1/2}} \begin{pmatrix} x_{k_{l+1}} \\ y_{k_{l+1}} \\ z_{k_{l+1}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{|\nabla\bar{k}_l|^{1/2}} \begin{pmatrix} x_{k_{l+2}} \\ y_{k_{l+2}} \\ z_{k_{l+2}} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

当 $l = 1, k_l = \xi, k_{l+1} = \eta, k_{l+2} = \zeta, l = 2$ 或 $3, \xi, \eta, \zeta$ 依次轮换.

$$\begin{cases} \phi_1 = \bar{k}_t + \frac{u\bar{\theta}_k}{\beta}, \phi_2 = \bar{k}_y + \frac{v\bar{\theta}_k}{\beta}, \phi_3 = \bar{k}_z + \frac{w\bar{\theta}_k}{\beta}, \\ \phi_4 = \bar{y}_2\phi_3 - \bar{z}_2\phi_2, \phi_5 = \bar{x}_2\phi_3 - \bar{z}_2\phi_1, \phi_6 = \bar{x}_2\phi_2 - \bar{y}_2\phi_1, \\ \phi_7 = \bar{y}_1\phi_3 - \bar{z}_1\phi_2, \phi_8 = \bar{x}_1\phi_3 - \bar{z}_1\phi_1, \phi_9 = \bar{x}_1\phi_2 - \bar{y}_1\phi_1, \\ \phi = 4\bar{c}[1 + \bar{\theta}_k(\bar{\theta}_k - \bar{k}_t)\beta], \end{cases} \quad (40)$$

上标或下标 $l$ 表示取第几个特征值,此处 $m = 4$ ,表示特征值的个数,下标 $i + 1/2$ 表示坐标变换的度量系数在格子界面上取值,并且变量为 Roe 变量(29)式.

## 4 边界条件

关于边界条件本文采用部分隐式,部分显式.在物面上满足粘附条件,即

$$\text{在定常时 } u = v = w = 0, \quad (41a)$$

$$\text{在非定常时 } u = x_\tau, v = y_\tau, w = z_\tau, \quad (41b)$$

物面压力由物面附近法向动量方程得到,设 $\zeta$ 是沿物面法线方向的坐标,则<sup>[13]</sup>有

$$\begin{aligned} p_n(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)^{1/2} &= (\xi_x\zeta_x + \xi_y\zeta_y + \xi_z\zeta_z)p_\xi + (\eta_x\zeta_x + \eta_y\zeta_y + \eta_z\zeta_z)p_\eta + \\ &(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)p_\zeta = \partial_\tau\zeta + u\partial_\tau\zeta_x + v\partial_\tau\zeta_y + w\partial_\tau\zeta_z, \end{aligned} \quad (42)$$

定常时化为

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (43)$$

在数值计算(42)式右端项时,碰到物面边界需要物体内点的值,这时压力和速度分别用偶开拓和奇开拓.若 $\eta$ 方向垂直于对称面,则在 $\eta = 0, 1$ 上对称边界条件有

$$v = 0, \frac{\partial(p, u, w)}{\partial \eta} = 0. \tag{44}$$

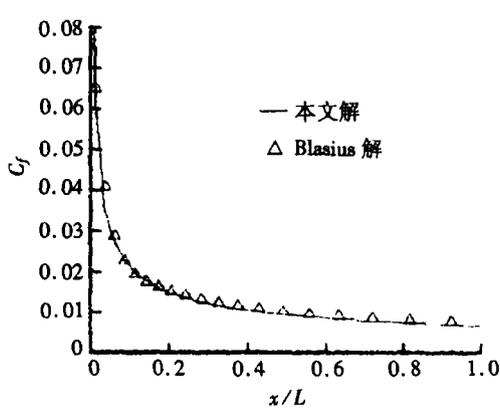


图1 绕平板层流的本文计算和 Blasius 解的摩擦系数 ( $Re = 10^4$ )

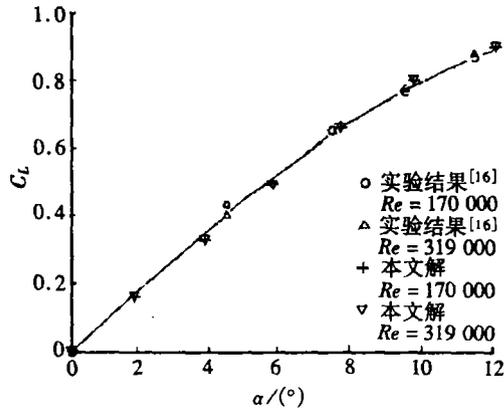
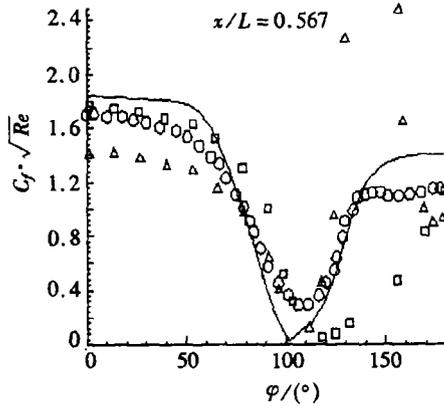
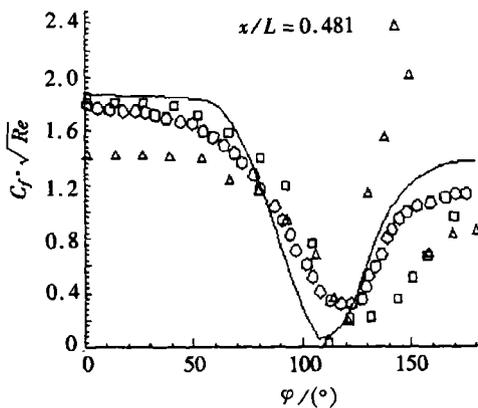
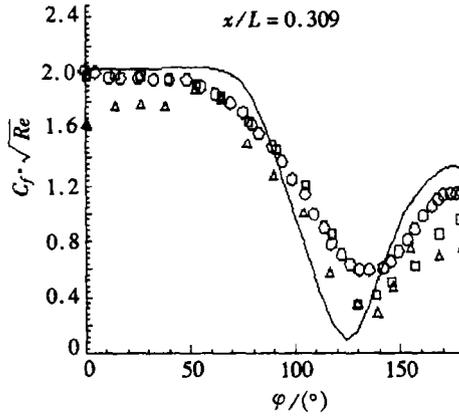
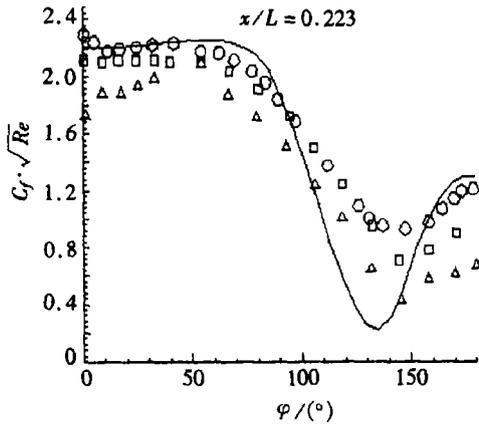


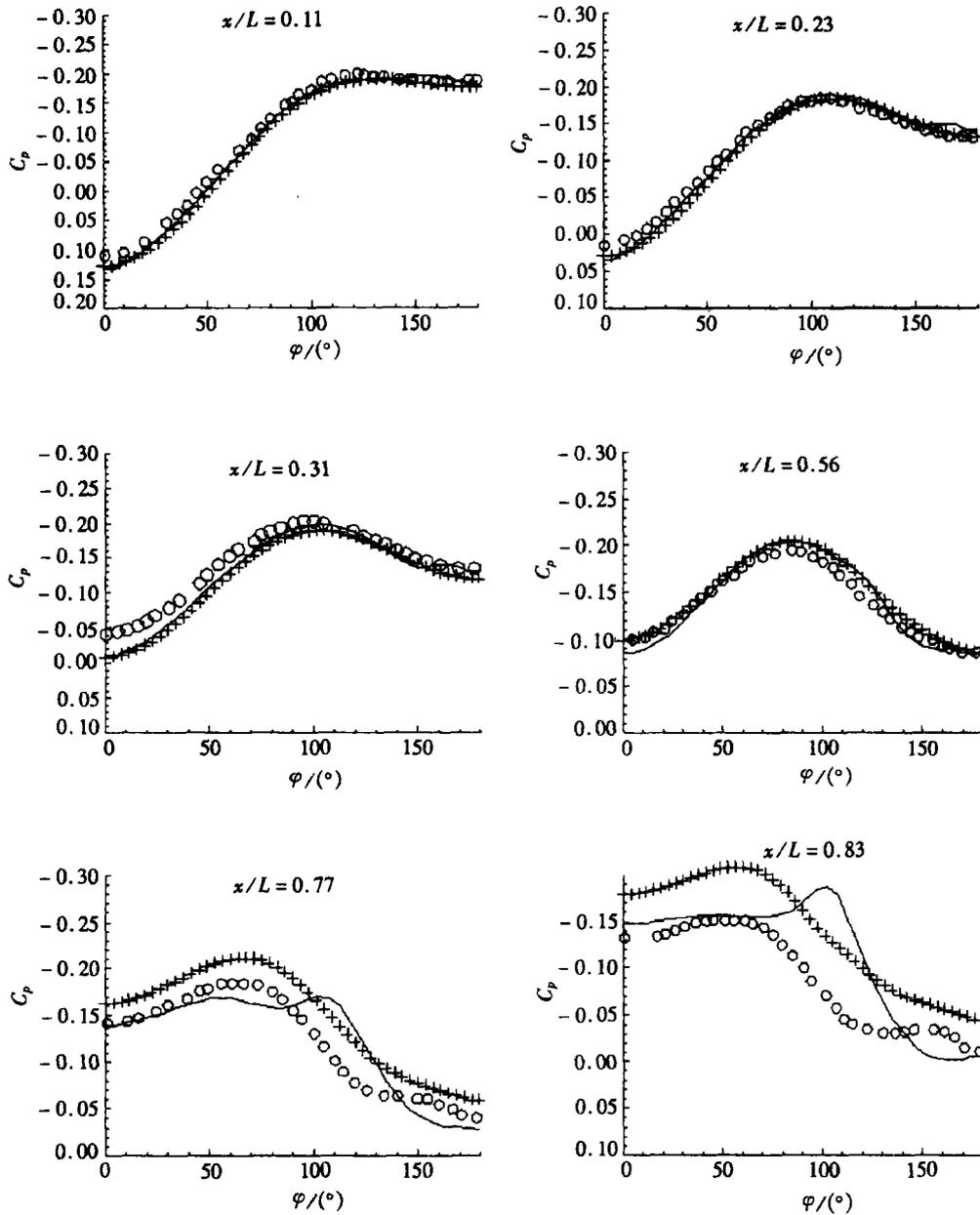
图2 NACA0012 机翼定常层流升力系数随攻角的变化



— 本文解; ○ 边界层解<sup>[17]</sup>; △ 边界层解<sup>[18]</sup>; □ 边界层解<sup>[19]</sup>

图3 对于6:1 椭球, 表面摩擦系数随周向的变化 ( $Re = 0.8 \times 10^6, \alpha = 10^\circ$ )

远场边条件对于定常, 通常比较简单的方法是若垂直于边界面的速度分量指向计算域时, 即入流边界, 流动参量取自由来流的值, 在出流边界, 假定压力恢复到自由来流值, 速度则用线性



— 本文解(49 × 33 × 41); + 本文解(73 × 49 × 49); ○ 实验<sup>[20]</sup>

图4 对于6:1椭圆,本文湍流计算和实验的压力系数沿周向的变化 ( $Re = 4.2 \times 10^6$ ,  $\alpha = 10^\circ$ )

内插。也可用特征边条件。本文计算表明,对于定常流动,简单边条件与特征边条件的结果基本相同。在非定常时,本文远场采用特征边界条件,就是在远场边界上根据特征线走向确定信息是进入求解域还是传出求解域,由特征关系确定边界上的物理量。本文推导出在边界上的速度和压力显式公式,详细推导和公式见文献[14]。

## 5 计算例子

人工压缩性方法由于引进了人工压缩项  $1/\beta(\partial p/\partial t)$ ,粘性扩散和压力变化可能耦合。

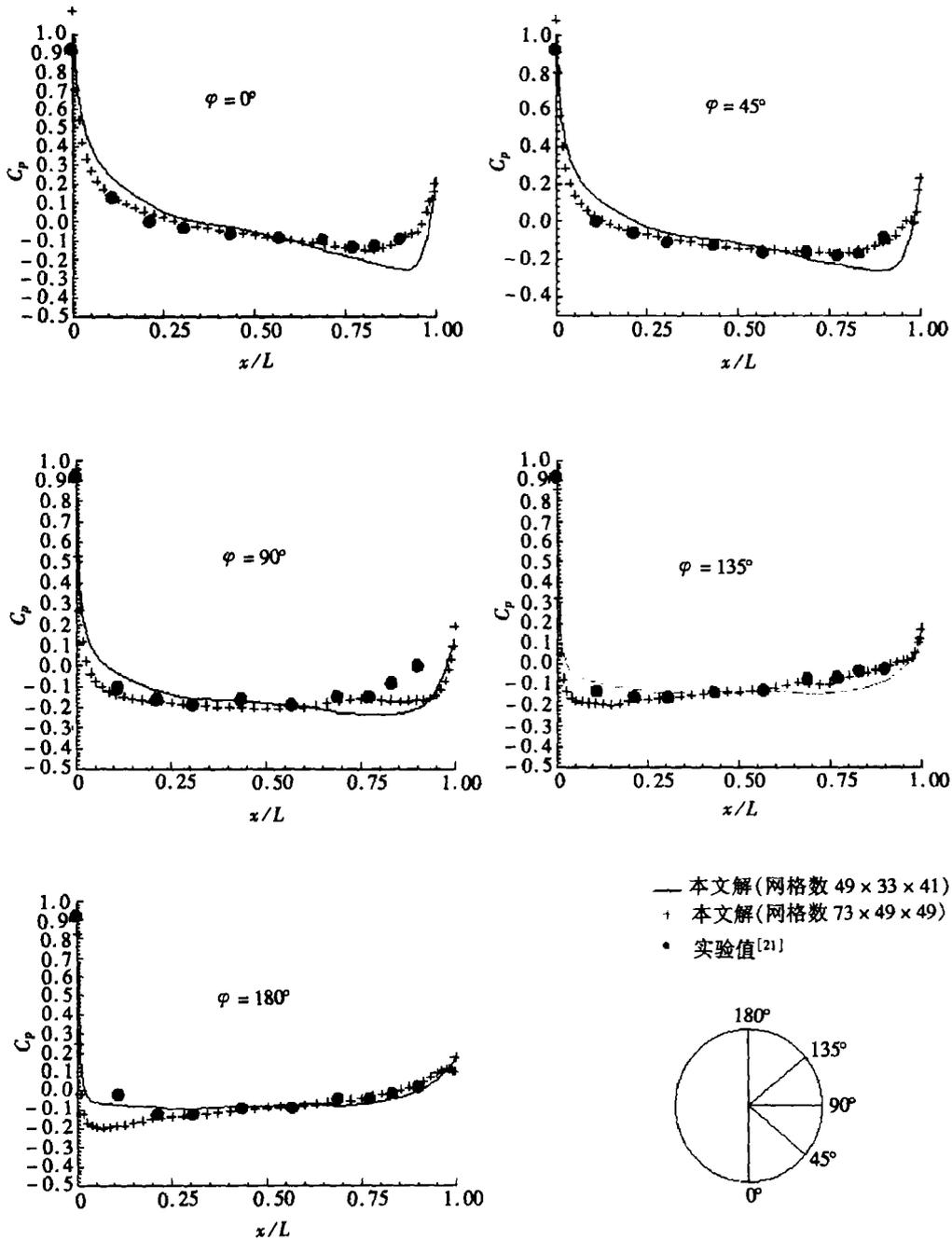


图5 对于6:1 椭球在不同网格数下,本文湍流计算和实验的表面压力系数沿轴向的分布 ( $Re = 4.2 \times 10^6$ ,  $\alpha = 10^\circ$ )

为了克服这一困难,使得散度在时间推进的过程中逐渐趋于零,就需要对  $\beta$  进行限制, $\beta$  便成为人工压缩性方法的关键参数. 文献[4] 对于一维不可压缩情形,根据压力变化应比粘性快的物理事实得到  $\beta$  的下限. 这一下限尽管很难应用于实际计算,但说明对于粘性层  $\beta$  是愈大愈好. 可是,对于无粘外流,  $\beta$  就不能太大. 事实上,对于一维无粘外流分析<sup>[15]</sup> 表明,对于无粘外流,最小值  $\beta = 1$  为好. 本文分区选  $\beta$  值. 即在无粘外流区(某一坐标线后),取  $\beta = 1$ ; 对于粘性层,则让  $\beta$  从某一大于1的值,如3或5但小于10(因太大,因式分解误差太大)线性变

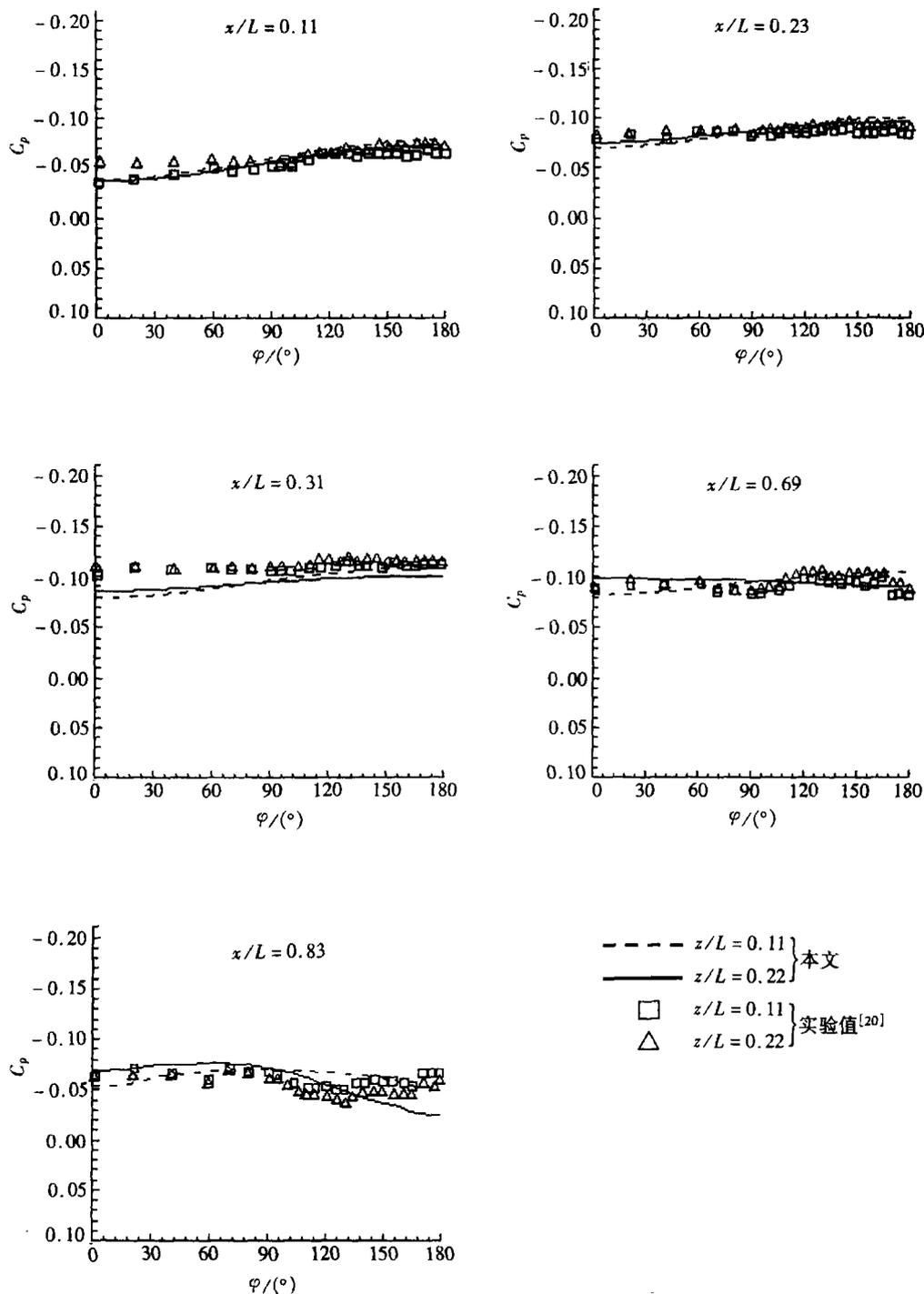


图 6 对于 6:1 椭球作下沉运动在不同高度的表面压力分布沿周向的变化, 湍流计算值与实验的比较,  $Re = 4.2 \times 10^6$ , 基于自由来流的无因次下沉速度  $dz/dt = 0.02$

化到 1. 数值实验表明, 收敛比全流场取一个  $\beta$  值稍快些. 当然, 外流和粘性层的  $\beta$  不能相差太大. 若为了简单, 全流场取一个  $\beta$  值, 那么  $\beta = 1$  收敛最快. 本文大部分计算取  $\beta = 1$ .

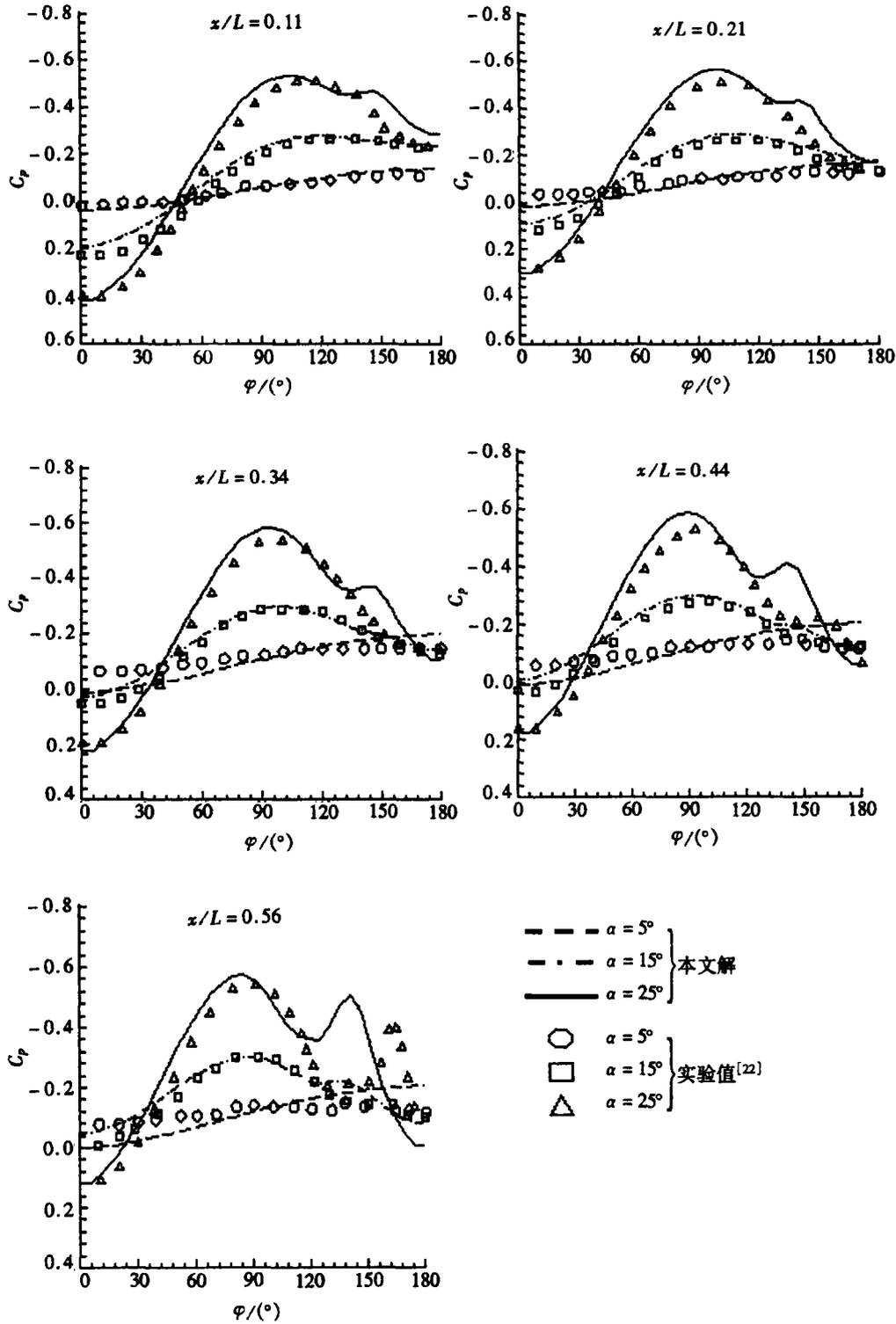


图7 对于6:1 椭球绕中心轴作俯仰运动,最大俯仰角  $\alpha_{\max} = 25^\circ$ ,湍流计算的表面压力周向的分布与实验的比较,  $Re = 4.2 \times 10^6$ , 基于自由来流速度和物体长度的无量纲俯仰速度  $F_k = 0.047$

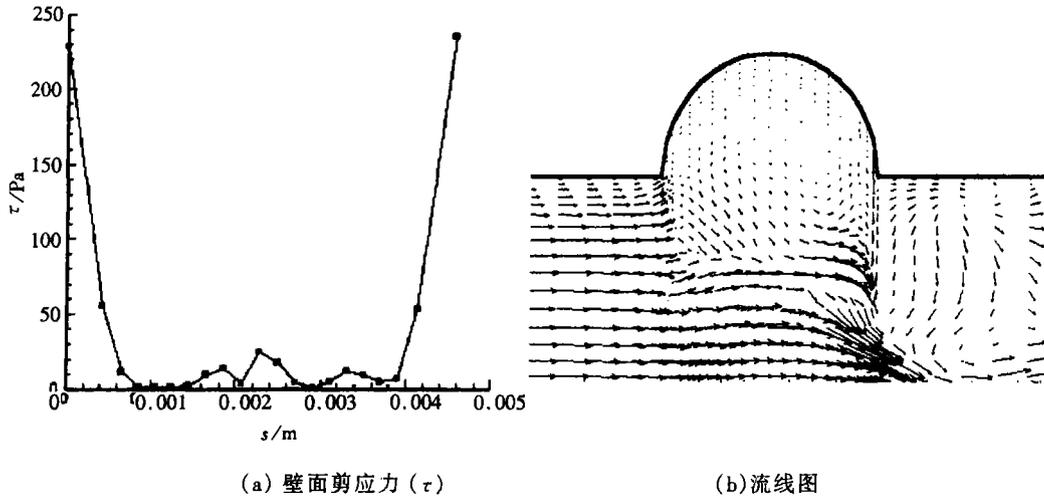


图 8 在中平面上壁面剪应力沿颅内肿瘤表面( $S$ )的分布和流线图

### 1. 平板

图 1 表示平板表面的摩擦系数,显然,计算值与 Blasius 准确解符合较好.

### 2. NACA 0012 机翼

图 2 是 NACA 0012 翼型湍流升力系数攻角的变化,计算值与实验<sup>[16]</sup>也符合比较好.

### 3. 扁椭球

图 3 是层流表面摩擦系数沿周向的分布,可以看出,在压力最小处约 120 度附近,边界层解<sup>[17,18,19]</sup>的值低. 图 4 为  $\alpha = 10^\circ$  的湍流表面压力沿周向的变化. 除了接近后缘(如  $x = 0.83$ )与实验相差明显外,应该说计算值与实验符合较好. 图 5 是同一攻角下表面压力沿轴向的分布对于不同网格( $49 \times 33 \times 41$  与  $73 \times 49 \times 49$ )的计算结果,如图所示,就总体而言,密网格比粗网格更接近实验<sup>[21]</sup>. 计算结果在后缘与实验的差别或许由于湍流模式的缘故. 非定常计算均以零攻角解作为初场. 图 6 是椭球作下沉运动,对于不同的下沉高度  $z/L$  和不同的轴向位置  $x/L$ ,表面压力分布沿周向的变化. 如图所示,除了接近后缘的位置外,其他截面计算值与实验都符合很好. 正如实验<sup>[20]</sup>所指出,除了头和尾部外,非定常下沉运动对压力几乎没什么影响. 该文还报导,压力分布的非定常效应,将产生一俯仰力矩,计算值也表示了这一特征. 图 7 为最大俯仰  $\alpha_{\max} = 25^\circ$ ,对俯仰历程(不同攻角)的计算. 由图可见,在中等攻角( $\alpha = 15^\circ$  以下),只要不是太接近后缘,计算值与实验<sup>[22]</sup>基本符合. 对于大攻角,在椭球后半部,计算值与实验值差别较大,计算的背风面第二个涡的位置和强度与实验不符. 这说明在分离区湍流模式需要改进.

### 4. 颅内动脉瘤

图 8 表示颅内动脉瘤内在中平面一个周期末时刻的剪应力沿动脉瘤表面的分布和流线图. 颅内动脉瘤颈的远端一侧的剪应力和压力(为节省篇幅,没给出图)最高,那里瘤子或许更容易被破裂.

## [参 考 文 献]

- [1] Chorin A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problem[J]. *Journal of Computation Physics*, 1967, 2:12—26.
- [2] Turkle E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low-speed compressible equations[J]. *Journal of Computation Physics*, 1987, 72(2):277—298.
- [3] Merkle C L, Choi D. Application of time-iterative schemes to incompressible flow[J]. *AIAA J*, 1985, 23(10):1518—1524.
- [4] Chang J L C, Kwak D. On the method of pseudo compressibility for numerically solving incompressible flows[R]. AIAA-84-0252.
- [5] Pan D, Chakravarthy S. Unified formulation for incompressible flows[R]. AIAA-89-0122.
- [6] Rogers S E, Kwak D, Kiri C. Steady and unsteady solution of the incompressible Navier-Stokes equation[J]. *AIAA J*, 1991, 29(4):603—610.
- [7] Whitefield D L, Taylor L K. Unsteady three-dimensional incompressible Euler and Navier-Stokes solver for stationary and dynamic grids[R]. AIAA-91-1650.
- [8] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 43(10):357—372.
- [9] Baldwin B S, Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows[R]. AIAA-78-257.
- [10] Rogers S E, Kwak D, Kaul U. On the accuracy of the pseudocompressibility method in solving the incompressible Navier-Stokes equations[R]. AIAA-85-1689.
- [11] Taylor L K, Arabshahi A, Whitefield D L. Unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes computations for a prolate spheroid undergoing time-dependent maneuvers[R]. AIAA-95-0313.
- [12] Taylor L K. Unsteady three-dimensional incompressible algorithm based on artificial compressibility[D] Ph D Dissertation. Mississippi State University, 1991.
- [13] Pulliam T H, Steger J L. Implicit finite-difference simulations of three-dimensional compressible flow[J]. *AIAA*, 1980, 18(2):159—167.
- [14] 温功碧. 三维定常/非定常不可压缩流动 N-S 方程基于人工压缩性方法的数值模拟[R]. 中国空气动力研究和发展中心 技术报告, 2001.
- [15] Choi D, Merkle C L. Application of time-iterative schemes to incompressible flow[J]. *AIAA*, 1985, 23(10):1518—1524.
- [16] Wu J C, Wang C M, Tuncer I H. Unsteady aerodynamics of rapidly pitched airfoils[R]. AIAA 86-1105.
- [17] Rosenfeld M, Israeli M, Wolfshtein M. Numerical study of the skin friction on a spheroid at incidence[J]. *AIAA*, 1988, 26(2):129—136.
- [18] Dallmann U. Topological structures of three dimension vortex flow separation[R]. AIAA 83-1735.
- [19] Hirsch R S, Cebeci T. Calculation of three dimension boundary layers with negative cross flow on bodies of revolution[R]. AIAA 77-683.
- [20] Hoang N T, Wetzel T G, Simpson R L. Surface pressure measurements over a 6:1 prolate spheroid undergoing time-dependent maneuvers[R]. AIAA 94-1908.
- [21] Sheng C, Taylor L K, Whitefield D L. A multigrid algorithm for three-dimensional incompressible high Reynolds number turbulent flows[J]. *AIAA*, 1995, 33(11):2073—2079.
- [22] Hoang N T, Wetzel T G, Simpson R L. Unsteady measurements over a 6:1 prolate spheroid undergoing a pitch-up maneuver[R]. AIAA 94-0197.

# Unsteady/Steady Numerical Simulation of Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations on Artificial Compressibility

WEN Gong-bi<sup>1</sup>, CHEN Zuo-bin<sup>2</sup>

(1. *Department Mechanics and Engineering Science, State Key Laboratory*

*for Turbulence and Complicated System Research,*

*Peking University, Beijing 100871, P. R. China;*

2. *China Aerodynamics Research and Development Center,*

*Mianyang Sichuan, 621000, P. R. China)*

**Abstract:** A central and upwind difference scheme mixed algorithm are presented for solving steady/unsteady three dimensional incompressible Navier-Stokes equations on artificial compressibility. The left side equations were implicit approximate factorized and used centered difference scheme. The numerical flux on the right side of semi-discretized equations was calculated using the Roe approximate Riemann solver with three order accuracy. The algebraic turbulence model of Badwin-Lomax was used. Two dimensional flat, airfoil, prolate spheroid and cerebral aneurysm were calculated as examples compared with experiment data. The results show that the coefficient of pressure and skin friction computed consistent with experimental data, the largest discrepancy occur in the separation region where Badwin-Lomax algebraic turbulence model could not exactly predict the flow.

**Key words:** incompressible Navier-Stokes equation; numerical simulation; artificial compressibility; central and upwind difference scheme mixed algorithm; flow over a prolate spheroid; unsteady/steady flow