

文章编号:1000-0887(2003)04-0385-06

磁性刚体航天器的混沌姿态运动^{*}

陈立群^{1,2}, 刘延柱³

(1.上海大学力学系,上海 200436; 2.上海市应用数学和力学研究所,上海 200072;
3.上海交通大学工程力学系,上海 200030)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究在地球万有引力场和磁场中的磁性刚体航天器在圆轨道上的混沌姿态运动. 利用动量矩原理建立了系统的动力学模型. 应用 Melnikov 方法证明了存在复杂非游荡 Cantor 集. 分别采用时间历程、功率谱、Poincaré 映射和 Liapunov 指数对系统动力学行为进行了数值研究. 数值仿真表明,随着磁场力矩的增强,系统准周期环面破裂而出现混沌.

关键词: 航天器姿态动力学; 混沌; Melnikov 方法; 数值仿真

中图分类号: O322;V412 **文献标识码:** A

引言

航天器姿态动力学是有重要意义的科学研究领域^[1,2]. 随着混沌研究的深入和广泛,航天器混沌姿态运动的研究也愈来愈受到人们重视. 它不仅为探索混沌提供了明确的工程背景,也为航天器的设计提供了新的观点. 研究表明,几类航天器模型如万有引力场中圆轨道上的自旋卫星、陀螺体卫星、绳系卫星等存在混沌姿态运动^[3,4]. 但几乎所有研究均仅考虑了引力场中的航天器运动. 也有若干例外情形. Beletsky, Pivovarov 和 Starostin 用数值方法研究了不计引力矩时极地圆轨道上磁性刚体航天器^[5,6]. 陈立群和刘延柱研究了忽略阻尼^[7]和计及阻尼^[8]时磁性刚体航天器的混沌姿态运动,但他们的工作局限于航天在近地球赤道平面内圆轨道运动. 本文研究同时受引力场和磁场作用的任意形状非自旋航天器的平面天平动. 所研究的航天器在地球圆轨道上运动. 基于其动力学模型,进行了 Melnikov 分析和数值研究.

1 动力学模型

考虑在地球引力场和磁场中圆轨道上以轨道角速度 ω_0 运行的磁性刚体航天器. 以地心 O_0 为原点建立惯性坐标系 $(O_0-X_0Y_0Z_0)$, 其中 Z_0 轴沿地球极轴, X_0 轴指向升交点, 基矢量为 i_0, j_0, k_0 . 以航天器质心 O 为原点建立主轴坐标系 $(O-xyz)$, 其基矢量为 i', j', k' . 任意形状航天器的主惯性矩分别为 A, B 和 C , 不失一般性, 设 $B > A$. 再建立轨道坐标系 $(O-XYZ)$, 其

* 收稿日期: 2000-10-18; 修订日期: 2002-11-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10082003)

作者简介: 陈立群(1963—), 男, 上海人, 教授, 博士, 主要从事非线性动力学和控制研究(E-mail: lqchen@online.sh.cn).

中 X 轴沿 O_c 到 O 的矢径, Z 轴沿轨道平面法线, 其基矢量为 i, j, k . 设轨道平面内的天平角为 φ , 则航天器所受的引力场力矩为^[2]

$$M_g = -3\omega_c^2(B-A)\sin\varphi\cos\varphi k. \quad (1)$$

设地球磁场的磁极轴与地球极轴重合. 将给定时刻 t_p 的地球磁场强度 H_m 在坐标系 $(O_c-X_0Y_0Z_0)$ 中分解, 得到^[2]

$$H_m = \left(-\frac{3\mu_m}{2r^3}\sin i \sin 2\omega_c t_p\right) i_0 + \left(-\frac{3\mu_m}{4r^3}\sin 2i(1-\cos 2\omega_c t_p)\right) j_0 + \frac{\mu_m}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i(1-\cos 2\omega_c t_p)\right) k_0, \quad (2)$$

其中 r 为轨道半径, μ_m 为地球磁场的磁矩常数, i 为轨道面倾角. 在基 i, j, k 上分解 i_0, j_0, k_0 得到

$$\begin{cases} i_0 = \cos\omega_c t_p i - \sin\omega_c t_p j, \\ j_0 = \cos i \sin\omega_c t_p i + \cos i \cos\omega_c t_p j - \sin i k, \\ k_0 = \sin i \sin\omega_c t_p i + \sin i \cos\omega_c t_p j + \cos i k. \end{cases} \quad (3)$$

设航天器的常磁矩 I 沿轴 X 方向, 即

$$I = Ii' = I(\cos\varphi i + \sin\varphi j), \quad (4)$$

地球磁场和航天器上安装的永磁元件相互作用而产生的磁力矩为

$$M_m = H_m \times I. \quad (5)$$

刚体航天器相对其质心的动量矩为

$$L = C\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt_p}\right) k. \quad (6)$$

将式(1)~(6)代入动量矩定理

$$\frac{dL}{dt_p} = M_g + M_m, \quad (7)$$

并将结果向轴 z 投影, 得到

$$C \frac{d^2\varphi}{dt_p^2} = -3\omega_c^2(B-A)\sin\varphi\cos\varphi - \mu_m \sin i r^{-3}(2\sin\varphi\sin\omega_c t_p + \cos\varphi\cos\omega_c t_p). \quad (8)$$

引入无量纲时间 $t = \omega_c t_p$ 并记 $K = 3(B-A)/(2C)$ 和 $\alpha = \sin i \mu_m / (C\omega_c^2 r^3)$, 可以得到所求的微分方程

$$\ddot{\varphi} + K\sin 2\varphi + \alpha(2\sin\varphi\sin t + \cos\varphi\cos t) = 0, \quad (9)$$

其中导数是关于无量纲时间 t .

2 Melnikov 分析

设磁参数 α 为小量并令 $\alpha = \varepsilon\alpha_1$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), 则式(9)为受弱扰动的 Hamilton 可积系统

$$\ddot{\varphi} + K\sin 2\varphi = -\varepsilon\alpha_1(2\sin\varphi\sin t + \cos\varphi\cos t). \quad (10)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 相应的无摄动平面 Hamilton 系统(10)有初积分

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = K\sin^2\varphi = H. \quad (11)$$

当 $H = K$ 时, 可积系统(11)有 2 个双曲鞍点 $(\pm\pi/2, 0)$, 其稳定流形和不稳定流形构成异宿环.

起始于 $(0, \pm\sqrt{2K})$ 的异宿轨道 Γ^\pm 为

$$(\varphi_{\pm}(\nu), \dot{\varphi}_{\pm}(\nu)) = (\pm \arcsin(\text{th}(\sqrt{2K\nu})), \pm \sqrt{2K} \text{sech}(\sqrt{2K\nu})). \quad (12)$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 若 Melnikov 函数

$$M_{\pm}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\alpha_1(2\sin\varphi_{\pm}(t)\sin(t+\tau) + \cos\varphi_{\pm}(t)\cos(t+\tau))] \dot{\varphi}_{\pm}(t) dt \quad (13)$$

有简单零点, 则式(10)的 Poincaré 映射存在横截相交的异宿环^[9]. 式(12)代入式(13)可以计算应用于异宿轨道 Γ^+ 和 Γ^- 的函数 Melnikov 为

$$M_{\pm}(\tau) = -\alpha_1 \pi \left(\frac{1}{2K} + \frac{1}{\sqrt{2K}} \right) \text{csch} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2K}} \right) \sin \tau, \quad (14)$$

故对一切 $\alpha \neq 0$, $M_+(\tau)$ 和 $M_-(\tau)$ 有简单零点. 系统(9)的 Poincaré 映射存在横截异宿环. 这意味着 Smale 马蹄和复杂非游荡 Cantor 集.

3 数值仿真

现用数值方法积分式(9)以研究磁参数 α 对航天器姿态运动的影响. 就(9)式改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -K \sin 2x_1 - \alpha(2\sin x_1 \sin x_3 + \cos x_1 \cos x_3), \\ \dot{x}_3 = 1, \end{cases} \quad (15)$$

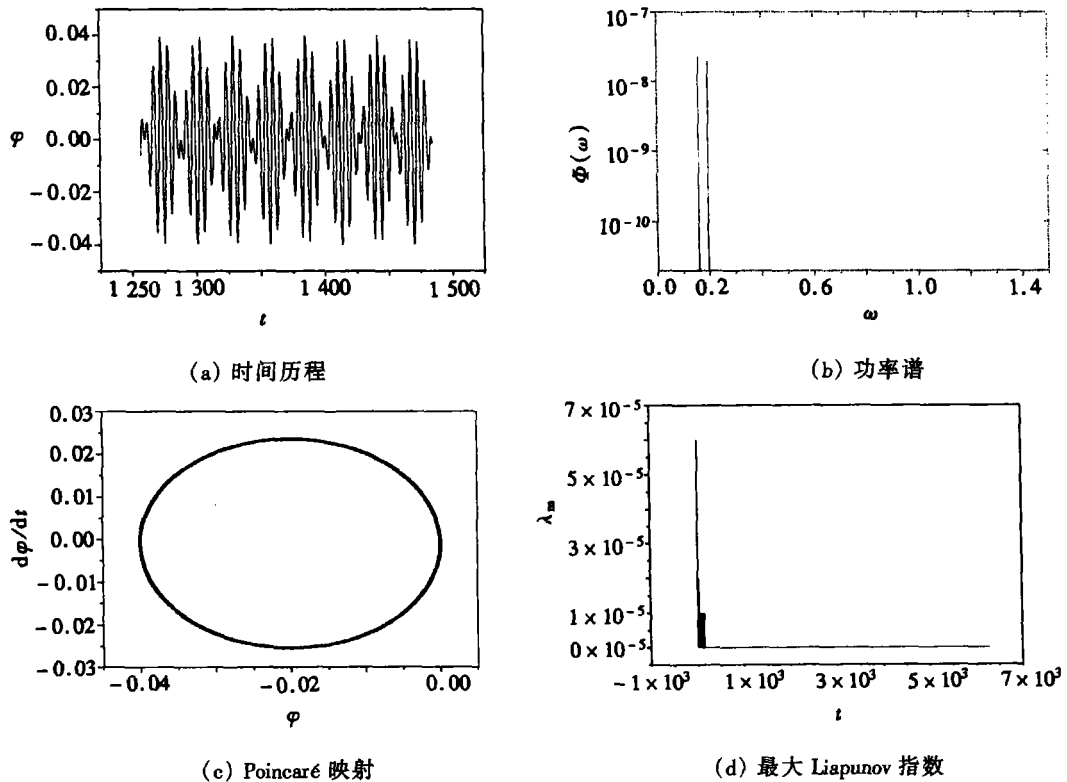


图 1 准周期运动 ($\alpha = 0.01$)

采用 4 阶 Runge-Kutta 法进行数值积分. 应用时间历程、功率谱、Poincaré 映射和 Liapunov 指数识别动力学行为. Liapunov 指数用 Wolf 等的算法^[10]计算. 式(15)的线性化系统由 Jacobi 矩阵

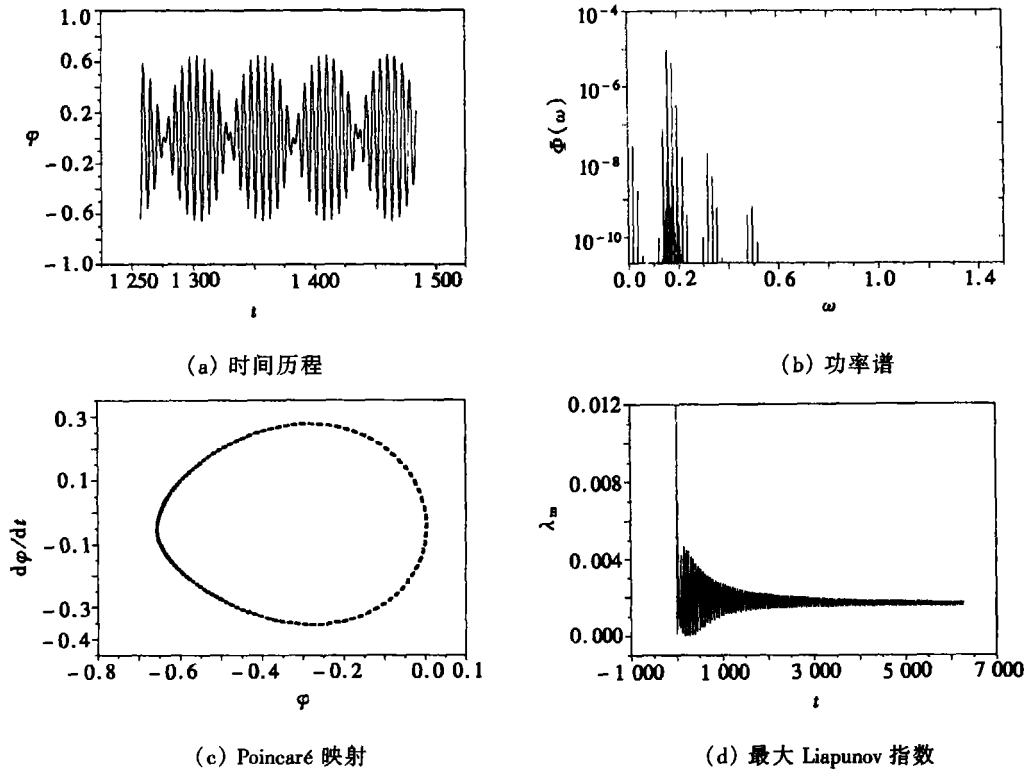


图2 环面的破裂 ($\alpha = 0.12$)

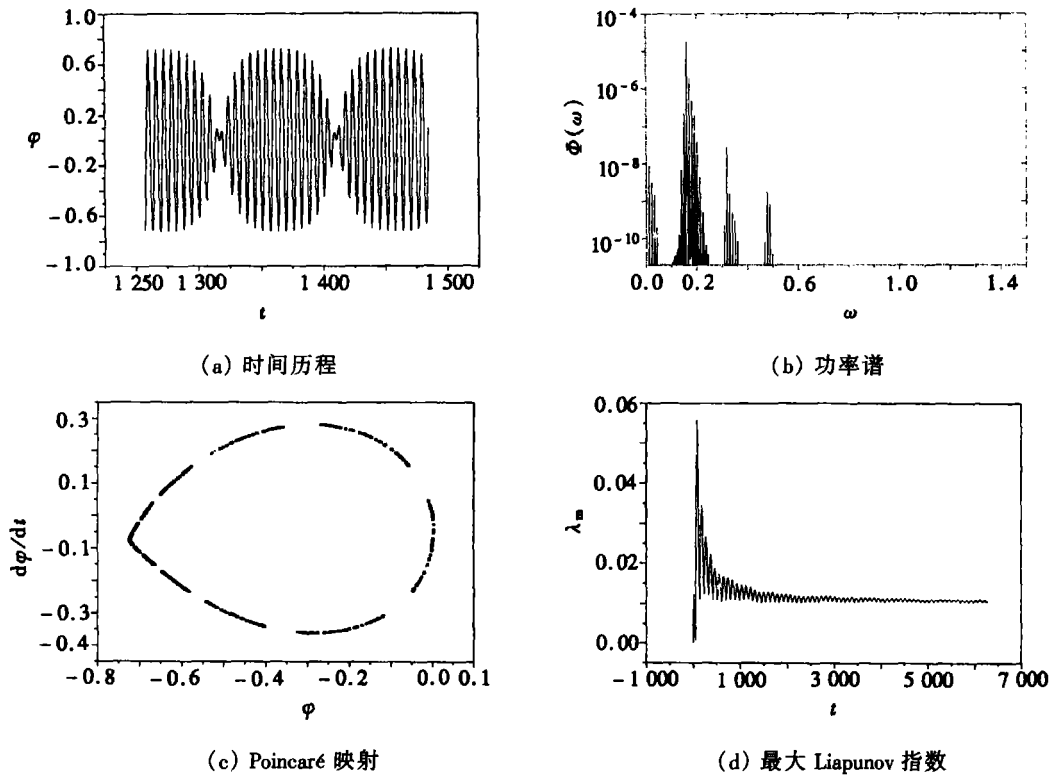


图3 环面的破裂 ($\alpha = 0.12175$)

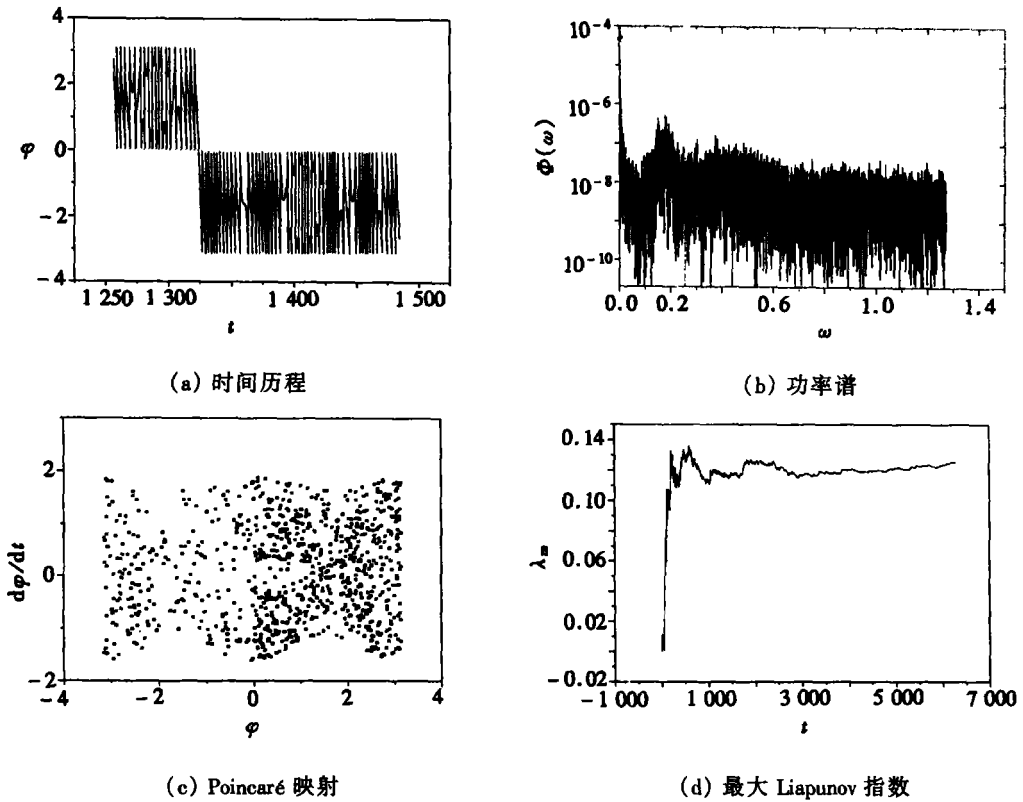


图4 混沌运动 ($\alpha = 0.12176$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K\cos 2x_1 - \alpha(2\cos x_1 \sin x_3 - \sin x_1 \cos x_3) & 0 & -\alpha(2\sin x_1 \cos x_3 - \cos x_1 \sin x_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

给定。固定引力参数 $K = 0.75$, 改变磁参数 α 研究系统的动力学行为特征。数值积分的初始条件为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, 0)$ 。

对于充分小的 α , 系统出现准周期运动。 $\alpha = 0.01$ 时的时间历程、功率谱、Poincaré 映射和最大 Liapunov 指数如图 1 所示。Liapunov 指数为 $0.00, 0.00$ 和 0.00 。

对于相对较大的 α , 准周期环面破裂。 $\alpha = 0.12$ 和 $\alpha = 0.12175$ 时的时间历程、功率谱、Poincaré 映射和最大 Liapunov 指数如图 2 和图 3 所示。Liapunov 指数分别为 $0.00, 0.00, 0.00$ 和 $0.01, 0.00, -0.01$ 。

对于充分大的 α , 准周期环面完全破裂。混沌运动出现。 $\alpha = 0.12176$ 时的时间历程、功率谱、Poincaré 映射和最大 Liapunov 指数如图 4 所示。Liapunov 指数为 $0.12, 0.00$ 和 -0.12 。

4 结 论

万有引力矩和磁力矩作用下地球圆轨道上磁性航天器的平面天平动可由方程(9)描述。应用 Melnikov 方法证明了存在 Smale 马蹄意义上的混沌。采用时间历程、功率谱、Poincaré 映射和 Liapunov 指数说明随着磁力矩的增强, 系统由准周期运动而变为混沌运动。

[参 考 文 献]

- [1] Rimrott F J P. *Introductory Attitude Dynamics* [M]. Berlin: Springer, 1989, 1—310.
- [2] 刘延柱. 航天器姿态动力学 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995, 1—347.
- [3] LIU Yan-zhu, CHEN Li-qun. Nonlinear problems in spacecraft attitude dynamics [A]. In: CHIEN Wei-zang Ed. *Proc 3rd Int Conf Nonlinear Mech* [C]. Shanghai Univ Press, 1998, 80—86.
- [4] 刘延柱, 陈立群, 成功, 等. 航天器姿态动力学中的稳定性、分岔和混沌 [J]. 力学进展, 2000, 30(3): 351—357.
- [5] Beletsky V V. *Regular und Chaotisch Bewegung Sturrer Korper* [M]. Stuttgart: Teubner-Verlag, 1995, 31—65.
- [6] Beletsky V V, Pivoarov M L, Starostin E L. Regular and chaotic motions in applied dynamics of a rigid body [J]. *Chaos*, 1996, 6(2): 155—166.
- [7] CHEN Li-qun, LIU Yan-zhu, CHENG Gong. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in a circular orbit near the equatorial plane [J]. *Journal of the Franklin Institute: Engineering and Applied Mathematics*, 2002, 339(1): 121—128.
- [8] CHEN Li-qun, LIU Yan-zhu. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37(3): 493—504.
- [9] 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2002, 217—225.
- [10] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Liapunov exponents from a time series [J]. *Physica D*, 1985, 16(3): 285—317.

Chaotic Attitude Motion of a Magnetic Rigid Spacecraft

CHEN Li-qun^{1,2}, LIU Yan-zhu³

- (1. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;
 2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China;
 3. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
 Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in a circular orbit of the earth is treated. The dynamical model of the problem was derived from the law of moment of momentum. The Melnikov analysis was carried out to prove the existence of a complicated nonwandering Cantor set. The dynamical behaviors were numerically investigated by means of time history, Poincaré map, power spectrum and Liapunov exponents. Numerical simulations indicate that the onset of chaos is characterized by break of torus as the increase of the torque of the magnetic forces.

Key words: chaos; Melnikov's method; numerical simulation; spacecraft attitude dynamics