应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号:1000-0887(2003)04-0405-09

拟线性椭圆型方程广义解的最大值原理*

王向东, 徐小增, 梁鋈廷

(佛山科学技术学院 理学院,广东佛山 528000)

(张石生推荐)

摘要: 在允许自由项关于解梯度的增长阶满足自然增长条件时,证明了拟线性椭圆型方程不恒等于常数的有界广义解成立解的最大值原理.

关 键 词: 拟线性椭圆型方程; 广义解; 最大值原理

中图分类号: O175.25 **文献标识码**: A

1 引言与主要结果

1950年以来,对于多个自变量的二阶线性散度型的椭圆型方程广义解的正则性的研究得到飞速发展并在拟线性椭圆型方程的理论中起重要作用[1,2]. 但是,尽管 Morrey[3]对散度型的二阶线性椭圆型方程的广义解的可解性证明成立 Fredholm 备择原理,尽管广义解的唯一性定理和最大值原理对二阶线性椭圆型方程广义解的存在乃至在拟线性椭圆型方程的求解中的作用是重要的,但70年代以前对广义解的唯一性定理和最大值原理的研究发展却相对缓慢. Bicadze[4]给出了特殊情况下解的唯一性结果. Trudinger[5]给出了线性椭圆型方程广义解唯一性的完备结果. 而70年代以后,情况就不大相同了. 不仅有多种方法证明对散度型的二阶线性椭圆型方程的广义解成立弱最大值原理,而且解的最大值原理成立(见[1,2],[6~8]等). 特别[9]中对拟线性椭圆型方程的广义解证明了其弱最大值原理成立. 而[10]又把对线性方程广义解成立的最大值原理推广到拟线性方程:

$$\int_G \{\nabla v\cdot A(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}\mathrm{d}x=0$$
$$\forall v\in \overset{0}{W}{}_p^1(G)\cap L_\infty(G), \tag{1}$$

其中 $p>1$, $u\in W_p^1(G)$, G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界连通区域, $W_p^1(G)$ 和 $\overset{0}{W}{}_p^1(G)$ 是通常的 Sobolev 空间. $A(x,u,\xi)$ 和 $B(x,u,\xi)$ 是在 $G\times E^1\times E^n$ 上定义的 Carathéodory 函数,即 A、B 对任何 u、ξ 和固定的 x 连续,对固定的 u、ξ 关于 x 可测. 在[10]中,假定

$$\begin{cases}\nabla u\cdot A(x,u,\nabla u)\geqslant|\nabla u|^p,\\ |A(x,u,\nabla u)|\leqslant\kappa|\nabla u|^{p-1},\end{cases}\tag{2}$$

$$|B(x,u,\nabla u)|\leqslant C(x)|\nabla u|^{p-1}, \tag{3}$$

* 收稿日期: 2000-12-18; 修订日期: 2002-11-19

作者简介: 王向东(1962—),男,教授,从事非线性分析理论研究(E-mail:dong6210@163.com).

其中常数 $\kappa \geqslant 1$, $C(x)$ 满足适当的可积性条件. 在上述(2)、(3) 的假定下, Serrin[11] 和 Trudinger[12]证明了方程(1)的非负上解成立如下 Harnack 不等式

$$\left(\rho^{-n}\int_{B(2\rho)} |u(t)|^t \mathrm{d}x\right)^{1/t} \leqslant C_{B(\rho)}^{\mathrm{ess\,inf}\,u},$$

$$\begin{cases} t < \dfrac{n(p-1)}{n-p} & \text{当 } p \leqslant n, \\ t \leqslant +\infty & \text{当 } p > n. \end{cases}$$

应用与[2]、[7]类似的方法和上述不等式,在[10]中得到了方程(1)的广义解的最大值原理.

本文我们将继续这方面的工作,证明 $B(x,u,\xi)$ 关于 ξ 的增长阶高于 $p-1$ 时,即当 $B(x,u,\xi)$ 满足

$$|B(x,u,\nabla u)| \leqslant C(x)|\nabla u|^{\gamma}, \tag{4}$$

$$p-1 < \gamma \leqslant p \tag{5}$$

时,对方程(1)的有界广义解成立最大值原理. 这里

$$C(x) \in L_r(G)\begin{cases} r = +\infty & \text{当 } \gamma = p, \\ r = \dfrac{n}{p-\gamma} & \text{当 } 1 < p < n,\ p-1 < \gamma < p, \\ r > \dfrac{n}{p-\gamma} & \text{当 } p = n,\ p-1 < \gamma < p, \\ r = \dfrac{p}{p-\gamma} & \text{当 } p > n,\ p-1 < \gamma < p. \end{cases} \tag{6}$$

本文主要结果叙述为

定理 设 G 是 E^n中的有界连通区域,设 $p > 1$, $u \in W_p^1(G) \cap L_\infty(G)$ 满足方程(1). 且设条件(2),(4) ~ (6) 满足. 如果 u 不是常数,则有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{G'} u < \operatorname*{ess\,sup}_{G}, \qquad \forall\, G' \subset\subset G. \tag{7}$$

注 $u \in L_\infty(G)$ 的条件可减弱. 当 $p-1 < \gamma < p-1+n/p$, $1 < p < n$, 只要 $u \in W_p^1(G)$, 当 $p-1+n/p < \gamma < p$, $1 < p < n$, 只要 $u \in W_p^1(G) \cap L_t(G)$($t$ 足够大), 可以证明 u 在 G 内局部有界, 后者对证明(7) 完全足够. 只有 $\gamma = p$ 的情形, 才必需要求 $u \in L_\infty(G)$.

简记 $B(x_0,\rho) = \{|x - x_0| < \rho\}$, $B(\rho) = B(0,\rho)$. 为证明定理成立,我们要用到下面的

引理 设 $u \in W_p^1(B(\rho))$, $p \geqslant 1$. 设在 $B(\rho)$ 的某个正测度集 S 上, $u = 0$. 设 $\eta(x) = \eta(|x|)$ 是 $|x|$ 的取值在$[0,1]$ 的非增连续函数,又设

$$\eta(x) = 1 \qquad \text{当 } x \in S,$$

那么

(ⅰ) 对 $B(\rho)$ 内任何可测子集 e,成立

$$\int_e |u(x)|\eta(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{C(n)\rho^n}{\mathrm{mes}S}\mathrm{mes}^{1/n}e\int_{B(\rho)} |\nabla u(x)|\eta(x)\mathrm{d}x;$$

(ⅱ) 当 $1 \leqslant p < n$ 时,成立

$$\left(\int_{B(\rho)} |u(x)\eta(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant C\left(n,p,\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}S}\right)\left(\int_{B(\rho)} [|\nabla u|\eta(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

其中 $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$;

(ⅲ) 当 $p > n$ 时,成立

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(\rho)} |u(x)|\eta(x) \leqslant$$
$$C\left(n,p,\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}S}\right)\mathrm{mes}^{1/n-1/p}(B(\rho)\setminus S)\left(\int_{B(\rho)}[|\nabla u(x)|\eta(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

以上断言中的常数 $C > 0$ 只依赖于它标出的量.

证明 断言(ⅰ)是[13]中第二章引理5.1的结论. 断言(ⅱ)可在[10]中找到. 下面给出断言(ⅲ)的证明.

据引理的条件,对几乎所有的 $x \in B(\rho)$,成立

$$|u(x)|\eta(x) \leqslant C(n)\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}S}\int_{B(\rho)}\frac{|\nabla u(y)|\eta(y)}{|y-x|^{n-1}}\mathrm{d}y \tag{8}$$

(参见[13],p.90). 注意由于 u 在 S 上取值为0,故(8)式右端积分的有效区域只是 $B(\rho)\setminus S$. 所以在 $p > n$ 时,由 Hölder 不等式给出

$$|u(x)|\eta(x) \leqslant C(n)\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}S}\left(\int_{B(\rho)}[|\nabla u(y)|\eta(y)]^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\times$$
$$\left(\int_{B(\rho)\setminus S}|y-x|^{-p(n-1)/(p-1)}\mathrm{d}y\right)^{1-1/p}\leqslant$$
$$C\left(n,p,\frac{\rho^n}{\mathrm{mes}S}\right)\left(\int_{B(\rho)}[|\nabla u(y)|\eta(y)]^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\mathrm{mes}^{1/n-1/p}(B(\rho)\setminus S). \tag{9}$$

由此即可得到欲求的结果.

2 定理的证明

假定断言不真,那么我们有

$$\mathrm{mes}\{x\in G, u(x) < M\} > 0, M = \operatorname*{ess\,sup}_{G} u < +\infty,$$

并且存在某个 $G' \subset\subset G$,使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{G'} u = M.$$

那么一定有某个点,不妨设是坐标原点和有某个 $\rho > 0$,使 $B(2\rho)\subset G$,并使

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(\rho)} u = M,\ \mathrm{mes}B(\rho)\cap\{u(x) < M\} > 0, \tag{10}$$

否则,u 只能是 G 中的常数.

下证存在依赖于 u,ρ 的 $\tilde{\gamma} < 0$ 和 $\theta\in(0,1)$,使

$$\mathrm{mes}B(\rho)\cap\{u < M-\tilde{\gamma}\}\geqslant\theta\,\mathrm{mes}B(\rho), \tag{11}$$

不然的话,对任何正整数 m,都有

$$\mathrm{mes}B(\rho)\cap\left\{u < M-\frac{1}{m}\right\} < \frac{1}{m}\mathrm{mes}B(\rho).$$

从而

$$\mathrm{mes}B(\rho)\cap\{u < M\} = \lim_{m\to\infty}\mathrm{mes}B(\rho)\cap\left\{u < M-\frac{1}{m}\right\} = 0.$$

与(10)式矛盾.

在下面的证明中,把 $\tilde{\gamma}$、θ 视为常数,因为 u、ρ 是确定的,设 $\varepsilon > 0$,置

$$w = \ln\frac{\tilde{\gamma}}{M-u+\varepsilon}\quad(\tilde{\gamma}\text{ 为(11) 中的常数}), \tag{12}$$

$$v = \frac{\zeta^{\tau}(x)\mathrm{e}^{\lambda u(x)}(w-k)^{+}}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}}, \tag{13}$$

其中 $\lambda > 0$ 为待定常数，$k \geqslant 0$ 而 $\tau = p^2/(p-1)$．设 $\rho \leqslant \rho_1 < \rho_0 \leqslant 2\rho$，$\zeta(x) = \zeta(|x|)$ 为 $|x|$ 的逐段为线性的连续函数，满足

$$\zeta(x) = 1 \quad \text{当} \ |x| \leqslant \rho_1;\ \zeta(x) = 0 \quad \text{当} \ |x| \geqslant \rho_0,$$

对这样的 $\zeta(x)$，成立

$$|\nabla \zeta(x)| \leqslant \frac{1}{\rho_0 - \rho_1}.$$

由(12)、(13)定义的函数分别属于 $W_p^1(G) \cap L_\infty(G)$ 和属于 $\overset{0}{W}{}_p^1(G) \cap L_\infty(G)$．取这样的 v 作为试验函数，代入(1)给出

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} = 0, \tag{14}$$

$$\mathrm{I} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} \nabla (w-k)^+}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} \cdot A(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{II} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\lambda \zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k)^+ \nabla u}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} \cdot A(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{III} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\tau \zeta^{\tau-1} e^{\lambda u} (w-k)^+ \nabla \zeta}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} \cdot A(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{IV} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{p \zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k)^+ \nabla u}{(M-u+\varepsilon)^{p}} \cdot A(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{V} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k)^+}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} \cdot B(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x,$$

其中 $A(k,\rho_0) = B(\rho_0) \cap \{w(x) > k\}$ 是积分的有效域．根据(2)、(4)，分别有如下估计：

$$\mathrm{I} = \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k) \nabla u}{(M-u+k)^{p}} \cdot A(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x \geqslant$$
$$\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau e^{\lambda u} |\nabla w|^p \mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{II} \geqslant \int_{A(k,\rho_0)} \lambda \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k)}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} |\nabla w|^p \mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{III} \leqslant \int_{A(k,\rho_0)} \tau \zeta^{\tau-1} e^{\lambda u} (w-k) |\nabla \zeta| \kappa |\nabla w|^{p-1} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\delta \int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k) |\nabla w|^p \mathrm{d}x +$$
$$C(\delta) \int_{A(k,\rho_0)} \zeta^{p/(p-1)} |\nabla \zeta|^p e^{\lambda u} (w-k) \mathrm{d}x,$$

其中 $\delta > 0$ 可为任意正数，$C(\delta) > 0$ 为依赖于 δ、τ 和 κ 的常数；

$$\mathrm{IV} \geqslant \int_{A(k,\rho_0)} p \zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k) |\nabla w|^p \mathrm{d}x;$$

为得到V的估计式，我们分两种情况：

当 $\gamma = p$ 时，由(4)直接得

$$\mathrm{V} \leqslant \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k) C(x) |\nabla u|^p}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} \mathrm{d}x;$$

当 $p - 1 < \gamma < p$ 时，由 Hölder 不等式，有

$$\mathrm{V} \leqslant \int_{A(k,\rho_0)} \frac{\zeta^\tau e^{\lambda u} (w-k)}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}} C(x) |\nabla u|^\gamma \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\left(\int_{A(k,\rho_0)}\frac{\zeta^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda u}(w-k)}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}}C(x)^{1/\alpha}|\nabla u|^{p-1}\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\times$$
$$\left(\int_{A(k,\rho_0)}\frac{\zeta^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda u}(w-k)}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}}|\nabla u|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha}\leqslant$$
$$\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda u}(w-k)C(x)^{1/(p-\gamma)}|\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{A(k,\rho_0)}\frac{\zeta^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda u}(w-k)|\nabla u|^{p}}{(M-u+\varepsilon)^{p-1}}\mathrm{d}x\qquad(\alpha=p-\gamma\in(0,1)).$$

考虑到 $|u|\leqslant\|u\|_{L_\infty(G)}$，联合以上结果并取

$$\lambda=\begin{cases}\|C(x)\|_{L_\infty(G)} & \text{当 }\gamma=p,\\ 1 & \text{当 }p-1<\gamma<p,\end{cases}$$

$\delta>0$ 足够小，由(14)我们可得

$$\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\leqslant C\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}|\nabla\zeta|^{p}(w-k)\mathrm{d}x\qquad\text{当 }\gamma=p,\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho_0)}(\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}+\zeta^{\tau}(w-k)|\nabla w|^{p})\mathrm{d}x\leqslant\\ &\quad C\Big\{\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}|\nabla\zeta|^{p}(w-k)\mathrm{d}x+\\ &\quad\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}(w-k)C(x)^{1/(p-\gamma)}|\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x\Big\}\qquad\text{当 }p-1<\gamma<p.\end{aligned}\tag{16}$$

出现在(15)、(16)中的常数 $C>0$ 和 ε、w、k、ρ_0、ρ_1 以及 ρ 都无关（只依赖于 n、p、κ、γ 和 $\|u\|_{L_\infty(G)}$）.

根据(11)和 w 的定义(12)，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{mes}B(\rho)\cap\{w\leqslant k\}\geqslant\mathrm{mes}B(\rho)\cap\{u<M-\tilde{\gamma}\}\geqslant\\ &\theta\,\mathrm{mes}B(\rho)=\frac{\theta}{2^{n}}\mathrm{mes}B(2\rho)\geqslant\frac{\theta}{2^{n}}\mathrm{mes}B(\rho_0).\end{aligned}\tag{17}$$

取

$$S=B(\rho)\cap\{w\leqslant k\},\ \eta=\zeta^{p/(p-1)},\ e=A(k,\rho_0),$$

在 $B(\rho_0)$ 上对 $(w-k)^{+}$ 应用引理的断言(ⅰ)，给出

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}(w-k)\mathrm{d}x\leqslant\\ &\quad C(n,p,\theta)\mathrm{mes}^{1/n}A(k,\rho_0)\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}|\nabla w|\mathrm{d}x;\end{aligned}\tag{18}$$

类似地应用引理断言(ⅱ)和(ⅲ)，分别给出

$$\begin{aligned}&\left(\int_{A(k,\rho_0)}|\zeta^{p/(p-1)}(w-k)|^{q}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant\\ &\quad C(n,p,\theta)\left(\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\qquad 1<p<n,\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}(w-k)\leqslant\\ &\quad C(n,p,\theta)\mathrm{mes}^{1/n-1/p}A(k,\rho_0)\left(\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\qquad p>n.\end{aligned}\tag{20}$$

下面进一步处理(16)式右端的第二项．首先考虑 $1 < p < n$ 的情形，根据(6)

$$C(x) \in L_r(G),\ r = \frac{n}{p-\gamma}.$$

考虑到 Lebesgue 积分的绝对连续性，有

$$\int_{G \cap \{C(x) > N\}} C(x)^r \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon(N) \to 0 \quad 当\ N \to \infty. \tag{21}$$

因为

$$\operatorname{mes} G \cap \{C(x) > N\} \leqslant \frac{1}{N}\int_G C(x)\mathrm{d}x \to 0 \quad 当\ N \to \infty,$$

故

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau (w-k) C(x)^{1/(p-\gamma)} |\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x = \\ &\quad \int_{A(k,\rho_0)\cap\{C(x)>N\}} \zeta^\tau (w-k) C(x)^{1/(p-\gamma)} |\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x + \\ &\quad \int_{A(k,\rho_0)\cap\{C(x)<N\}} \zeta^\tau (w-k) C(x)^{1/(p-\gamma)} |\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x = \\ &\quad J_1 + J_2.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式和(19)，有

$$\begin{aligned}J_1 \leqslant &\left(\int_{A(k,\rho_0)} |\zeta^{p/(p-1)}(w-k)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \varepsilon(N)^{1/(r(p-\gamma))} \times \\ &\left(\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau |\nabla w|^p \mathrm{d}x\right)^{1-1/p} \leqslant \\ &C(n,p,\theta)\varepsilon(N)^{1/n}\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau |\nabla w|^p \mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}J_2 \leqslant &N^{1/(p-\gamma)}\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau (w-k) |\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x \leqslant \\ &\delta\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau (w-k) |\nabla w|^p \mathrm{d}x + C(\delta,N)\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau (w-k)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{23}$$

联合(16)、(22)与(23)，取 $N > 0$ 足够大，$\delta > 0$ 足够小，即得当 $p-1 < \gamma < p$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau |\nabla w|^p \mathrm{d}x \leqslant \\ &\quad C\int_{A(k,\rho_0)} [\zeta^{p/(p-1)} |\nabla \zeta|^p (w-k) + \zeta^\tau (w-k)]\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{24}$$

其中的常数 $C > 0$ 和 ε、w、k、ρ_0、ρ_1、ρ 无关．

当 $p \geqslant n$ 时，(24)亦成立．事实上，当 $p > n$ 时，由(6)，$C(x) \in L_r(G)$，$r = p/(p-\gamma)$．用(20)取代(19)，那么代替(22)成立：

$$\begin{aligned}J_1 \leqslant &C(n,p,\theta)\operatorname{mes}^{1/n-1/p}A(k,\rho_0)\left(\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau |\nabla w|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \times \\ &\left(\int_{A(k,\rho_0)} C(x)^{1/(p-\gamma)}\zeta^p |\nabla w|^{p-1}\mathrm{d}x\right) \leqslant \\ &C(n,p,\theta)\operatorname{mes}^{1/n-1/p}G\varepsilon(11)^{1/p}\int_{A(k,\rho_0)} \zeta^\tau |\nabla w|^p \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{22$_1$}$$

当 $p = n$ 时，由(6)，$C(x) \in L_r(G)$，$r > p/(p-\gamma)$．取 $q' < +\infty$，$p' \in (1,n)$，使

$$\frac{1}{q'}+\frac{1}{r(p-\gamma)}=\frac{1}{p}<1,\ \frac{1}{q'}=\frac{1}{p'}-\frac{1}{n},$$

那么代替(19)我们有

$$\left(\int_{A(k,\rho_0)}|\zeta^{p/(p-1)}(w-k)|^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\leqslant$$

$$C(n,p',\theta)\left(\int_{A(k,\rho_0)}(\zeta^{p/(p-1)}|\nabla w|)^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$C(n,p',\theta)\mathrm{mes}^{1/p'-1/p}A(k,\rho_0)\left(\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

于是代替(22)我们有

$$J_1\leqslant\left(\int_{A(k,\rho_0)}(|\zeta^{p/(p-1)}(w-k)|^{q'}\mathrm{d}x)^{1/q'}\varepsilon(N)\right)^{1/(r(p-\gamma))}\times$$

$$\left(\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x\right)^{1-1/p}\leqslant$$

$$C(n,p',\theta)\mathrm{mes}^{1/p'-1/p}G\,\varepsilon(N)^{1/(r(p-\gamma))}\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x. \tag{22$_2$}$$

根据 $\zeta(x)$ 的定义,无论由(15)或(24)出发,可得到

$$\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\left[\frac{1}{\rho_0-\rho_1}+\frac{\mathrm{diam}\,G}{\rho}\right]^p\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}(w-k)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{C}{(\rho_0-\rho_1)^p}\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}(w-k)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{C}{(\rho_0-\rho_1)^p}\mathrm{mes}^{1/n}A(k,\rho_0)\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}|\nabla w|\mathrm{d}x. \tag{25}$$

上式最后结果的得来是由于利用了(18)式的缘故.

借助 Hölder 不等式,由(25)即得

$$\left(\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{\tau}|\nabla w|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\frac{C}{(\rho_0-\rho_1)^{p/(p-1)}}\mathrm{mes}^{(1/(p-1))(1/n+1-1/p)}A(k,\rho_0),$$

再由(18)给出

$$(h-k)\mathrm{mes}A(h,\rho_1)\leqslant\int_{A(k,\rho_0)}\zeta^{p/(p-1)}(w-k)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(\rho_0-\rho_1)^{-p/(p-1)}\mathrm{mes}^{1+(1/n)(p/(p-1))}A(k,\rho_0)$$

$$\forall h>k\geqslant 0,\ \rho\leqslant\rho_1<\rho_0<2\rho, \tag{26}$$

式(26)中的 C 与 h、k、ρ_0、ρ_1、ρ 无关.

对 $\nu=0,1,2,\cdots$,置

$$\rho_\nu=\rho+\frac{\rho}{2^\nu},\ k_\nu=H-\frac{H}{2^\nu}\qquad(H>0\text{待定}),$$

分别用 $k_{\nu+1}$、k_ν 取代 h、k,用 ρ_ν、$\rho_{\nu+1}$ 取代 ρ_0、ρ_1,由(26)给出

$$\frac{H}{2^{\nu+1}}\mathrm{mes}A(k_{\nu+1},\rho_{\nu+1})\leqslant C\left(\frac{\rho}{2^{\nu+1}}\right)^{-p/(p-1)}\mathrm{mes}^{1+(1/n)(p/(p-1))}A(k_\nu,\rho_\nu)$$

$$(\nu = 0,1,2,\cdots). \tag{27}$$

当 $\nu = 0$ 时,我们有

$$\text{mes}A(k_0,\rho_0) \leqslant \text{mes}B(\rho_0) = |B(2)|\rho^n,\ |B(2)| = \text{mes}B(2). \tag{28}$$

只要取 $H > 0$ 满足

$$CH^{-1}2^{1+p/(p-1)}|B(2)|^{(1/n)(p/(p-1))} \leqslant \delta,\ \delta^{(1/n)(p/(p-1))}2^{1+p/(p-1)} \leqslant 1$$

(其中 $C > 0$ 是(27)中出现的常数),利用归纳法,由(27)、(28)我们可证

$$\text{mes}A(k_\nu,\rho_\nu) \leqslant \delta^\nu |B(2)|\rho^n \qquad (\nu = 0,1,2,\cdots).$$

命 $\nu \to \infty$,由上式得

$$\text{mes}A(H,\rho) = 0,\ 即\ \operatorname*{ess\,sup}_{B(\rho)} w \leqslant H.$$

根据 w 的定义,上式隐含了

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(\rho)} u \leqslant M + \varepsilon - \tilde{\gamma}e^{-H}.$$

令 $\varepsilon \to 0$,继续得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(\rho)} u \leqslant M - \tilde{\gamma}e^{-H} < M,$$

和(10)相矛盾,于是定理获证.

[参 考 文 献]

[1] Ladyzenskaja O A, Ural'ceva N N.线性和拟线性椭圆型方程[M].叶其孝 译.北京:科学出版社,1987,156—194.

[2] Gilbarg D,Trudinger N S.二阶椭圆偏微分方程[M].叶其孝 译.上海:上海科学技术出版社,1981,178—234.

[3] Morry C B. Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity[J]. *Math Z*,1959,**72**(4):146—164.

[4] Bicadze A B.线性偏微分方程的某些问题[J].数学进展,1958,**4**(3):320—403.

[5] Trudinger N S. Maximum principles for linear nonuniformly elliptic oprerators with measurable coefficients[J]. *Math Z*,1977,**156**(4):291—310.

[6] 梁鋈廷,于鸣岐.关于二阶线性椭圆型方程广义解的弱最大值原理[J].山西大学学报(自然科学版),1982,**7**(2):8—14.

[7] Uhlenbeck K. Regularity for a class of nonlinear elliptic systems[J]. *Acta Math*,1977,**138**(2):219—240.

[8] 梁鋈廷.椭圆型方程广义解的有界性和可积性[J].山西大学学报(自然科学版),1986,**9**(1):115—130.

[9] 于鸣岐,梁鋈廷.拟线性椭圆型方程广义解的弱最大值原理[J].山西大学学报(自然科学版),1989,**12**(3):240—248.

[10] 梁鋈廷.拟线性椭圆型方程广义解的最大值原理[J].中山大学学报(自然科学版),1988,**27**(3):107—122.

[11] Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear equation[J]. *Acta Math*,1964,**111**(5):247—302.

[12] Trudinger N S. On Harnack type inequalities and their applications to quasi-linear elliptic equations[J]. *Comm Pure Appl Math*,1967,**20**(3):721—747.

[13] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type[J]. *Transl Math Monographs*,1968,**23**(1):90—95.

[14] 梁鋈廷,王向东.拟线性椭圆型方程广义解最大模的先验估计[J].应用数学和力学,1990,**11**(10):881—892.

Maximum Principles for Generalized Solutions of Quasi-Linear Elliptic Equations

WANG Xiang-dong, XU Xiao-zeng, LIANG Xi-ting

(*Faculty of Sciences, Foshan University of Science and Techuology, Foshan, Guangdong 528000, P. R. China*)

Abstract: Under the assumption that the growth order of the free term to satisfy the natural growth condition with respect to gradient of the generalized solutions, the maximum principle is proved for the bounded generalized solution of quasi-linear elliptic equations.

Key words: quasi-linear elliptic equation; generalized solution; maximum principle