文章编号: 1000_0887(2003) 02_0111_13

非饱和土本构关系的混合物理论(Ⅰ)
——非线性本构方程和场方程*

黄 义[1], 张引科[1,2]

(1. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

(我刊编委黄义来稿)

摘要: 以混合物理论为基础建立了非饱和土非线性本构方程和场方程· 把非饱和土作为 3 种组分构成的饱和混合物来研究· 首先根据土力学成果提出了非饱和土混合物的基本假设, 推导出适用于非饱和土混合物的熵不等式; 然后采用混合物理论处理本构问题的常规方法得出了非饱和土非线性本构方程; 最后把非线性本构方程代入混合物组分动量守恒定律, 获得了非饱和土各组分运动的非线性场方程; 并且给出了非饱和土混合物的能量守恒方程, 从而形成了解决非饱和土混合物热力学过程的完备方程组·

关 键 词: 混合物理论; 非饱和土; 熵不等式; 本构方程; 场方程
中图分类号: O359.2 文献标识码: A

引 言

土是土木工程和水利工程常用的建筑材料之一, 人们对其行为特性的研究已经有了近百年历史· 但是, 由于土结构的复杂性、所处环境的多样性和土对外界条件的敏感性, 土常常表现出多变的行为特征[1, 2]· 岩土力学发展遇到的主要困难是如何建立能圆满描述土各种工程性质的本构方程[3]· 经过长期工程实践、科学试验和理论研究已经形成了大量的土本构模型, 这些本构模型[4]大致可以分为非线性弹性模型[5]、塑性模型[6]、内时模型[7]和混合物理论[8]· 时至今日, 岩土力学仍然处于半经验半理论状态[9], 既缺乏坚实的理论基础又远未形成完整的理论体系[10]· 混合物理论[11, 12]具有很强的处理复杂介质本构问题的能力· 然而也许是由于该理论表达形式过于繁杂, 这种能力一直没有引起岩土工程界的兴趣[13], 只有极少数人曾用混合物理论分析了土壤中的输运过程[14]· 虽然陈正汉[9, 15, 16]以混合物理论为基础, 提出了岩土力学的公理化理论体系, 但该体系包含了一些不必要的原理, 这些原理要么是混合物理论的推论(如 Onsager 原理和 Curie 原理), 要么应该是混合物理论对岩土介质应用的结论(如压硬剪

* 收稿日期: 2001_08_20; 修订日期: 2002_06_04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59678003); 陕西省教育厅专项科研计划项目(01JK178)
作者简介: 黄义(1936—), 男, 陕西汉中人, 教授, 博士生导师, 从事板壳结构、土_结构动力相互作用和复杂介质动力学的研究(E_mail: huangyih@pub.xa_online.sn.cn);
张引科(1964—), 男, 陕西宝鸡人, 教授, 博士, 从事土本构关系和土动力学的研究, 现在同济大学土木工程博士后流动站工作(E_mail: yinkezhang@163.com).

胀原理和有效应力原理)• Eringen[13]是第一个用混合物理论讨论非饱和土特性的科学家,他的研究也只是混合物理论研究多孔介质成果的简化,其中并未涉及土介质自身的特性•

本文把非饱和土看作由土固体骨架、土孔隙内液体和土孔隙内气体形成的饱和混合物,结合非饱和土3种组分物质特性,应用经典混合物理论推导出非饱和土的非线性本构方程、场方程和能量守恒方程,形成了解决非饱和土热力学过程的完备方程组,奠定了非饱和土本构关系的混合物理论基础•

1 混合物理论

混合物(mixture)是由几种不同性质(物理性质或化学性质)的单一物质混合形成的复杂介质• 这些物质的混合可以是局部和整体都均匀的混合(如混合气体和混合溶液),也可以是局部不均匀但整体均匀的混合(如悬浮溶液和多孔介质)• 组成混合物的单一物质是混合物的组分(constituent),混合物组分之间不仅可能存在相对运动,而且可能存在相互作用,甚至可能存在物质转化(如相变和化学反应)• 混合物理论(mixture theory)就是研究混合物各组分运动规律、相互作用规律和相互转化规律以及混合物整体运动变化与外界对混合物作用之间关系的理论体系•

混合物理论以热力学理论为基础,是对单一物质连续统理论[17,18]的拓展,也称为相互作用连续介质理论,具有很好的自恰性和系统性• 混合物理论把混合物抽象为代表混合物各组分连续介质的迭加物,混合物中任一点同时被各组分中的一个质点占据,这些相互迭加的连续介质之间存在多种相互作用• 1957年Truesdell[19]建立了混合物的数学理论• 该理论有3个基本公设:1) 混合物的性质完全由组分的性质决定(All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents);2) 要描述混合物某一组分的运动,只要适当考虑其它组分对该组分的作用,就可以把这个组分从混合物中分离出来(So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents on it);3) 混合物的运动和单一物质的运动满足相同方程(The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body)• 20世纪60~70年代,对混合物理论研究进入高潮,一大批科学家为混合物理论的完善和发展作出了贡献,文献[11,12]总结了这一时期的主要工作• 在混合物基本理论不断完善的同时,处理具有特殊结构复杂介质的混合物理论也应运而生,如微结构材料理论(theory of materials with microstructure)、不混溶结构混合物理论(theory of immiscible and structured mixture)和复合材料理论(mixture theory of composite material)等• Bedford和Drumheller[20]对混合物理论的应用成果进行了较详细的综述•

这里介绍经典混合物理论(classical mixture theory)的基本内容,为下面研究非饱和土本构关系作准备•

1.1 混合物运动的描述

考察同时处在空间某区域的N种连续介质B^a ($a=1, 2, \cdots, N$)形成的混合物• 给混合物每一个组分选定一个参考构形,第a组分质点在其参考构形中的坐标(物质坐标)用$\boldsymbol{X}_a$表示• 各组分质点的运动构成了混合物的运动或变形• 第a组分的运动方程是

$$\boldsymbol{x}_a=\boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t), \tag{1}$$

其中,t是时间,$\boldsymbol{x}_a$(空间坐标)是质点$\boldsymbol{X}_a$在t时刻的空间位置• 该方程也称为第a组分的形

变函数(deformation function)• 假设各组分的运动满足连续性公设, 则方程(1) 在空间点 $\boldsymbol{x}_a$ 的邻域内有唯一逆

$$\boldsymbol{X}_a = \boldsymbol{X}_a(\boldsymbol{x}_a, t) \tag{2}$$

连续性公设不仅保证了各组分的每个质点在任意时刻只能占据空间一点, 而且保证了同一组分的不同质点不能同时占据空间同一点• 质点 $\boldsymbol{X}_a$ 在 t 时刻的速度和加速度分别定义为

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{x}_a' = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t) = \partial_t \boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{x}_a'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t) = \partial_t^2 \boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t), \tag{4}$$

$(\ )_a'$ 表示与第 a 组分运动有关的物质导数• 利用(2) 式, 质点 $\boldsymbol{X}_a$ 的速度和加速度还能表示为空间坐标 $\boldsymbol{x}_a$ 和时间 t 的函数, 即

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{x}_a, t), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_a(\boldsymbol{x}_a, t), \tag{6}$$

以上两式分别表示 t 时刻处在空间点 $\boldsymbol{x}_a$ 处的第 a 组分质点运动速度和加速度•

质点 $\boldsymbol{X}_a$ 处形变梯度(deformation gradient) 定义为线性变换

$$\boldsymbol{F}_a = \mathrm{GRAD}_a \boldsymbol{x}_a(\boldsymbol{X}_a, t), \tag{7}$$

$$\det \boldsymbol{F}_a \geqslant 0 \tag{8}$$

$\boldsymbol{F}_a$ 的逆变换是

$$\boldsymbol{F}_a^{-1} = \mathrm{grad}_a \boldsymbol{X}_a(\boldsymbol{x}_a, t), \tag{9}$$

满足关系

$$\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{F}_a^{-1} = \boldsymbol{F}_a^{-1}\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{I}, \tag{10}$$

这里, “DRAD$_a$” 表示关于物质坐标 $\boldsymbol{X}_a$ 取梯度;“grad$_a$” 表示关于空间坐标 $\boldsymbol{x}_a$ 取梯度; $\boldsymbol{I}$ 是二阶单位张量• 质点 $\boldsymbol{X}_a$ 处的二阶变形梯度张量(second deformation gradient) 为

$$\boldsymbol{G}_a = \mathrm{GRAD}_a \boldsymbol{F}_a, \tag{11}$$

空间点 $\boldsymbol{x}_a$ 处第 a 组分的速度梯度(velocity gradient) 是

$$\boldsymbol{L}_a = \mathrm{grad}_a \boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{x}_a, t), \tag{12}$$

根据链式规则, 有

$$\boldsymbol{L}_a = \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F}_a^{-1} \tag{13}$$

$\boldsymbol{L}_a$ 还可以用变形率张量(deformation rate tensor) $\boldsymbol{d}_a$ 和自旋张量(spin tensor) $\boldsymbol{w}_a$ 表示成

$$\boldsymbol{L}_a = \boldsymbol{d}_a + \boldsymbol{w}_a, \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{d}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}_a + \boldsymbol{L}_a^{\mathrm{T}}), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{w}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_a^{\mathrm{T}}) \tag{16}$$

分别表示张量 $\boldsymbol{L}_a$ 的对称部分和反对称部分, $(\ )^{\mathrm{T}}$ 表示二阶张量的转置张量•

设 ρ_a 是第 a 组分密度, 则混合物密度就是

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{a=1}^{N}\rho_a(\boldsymbol{x}, t), \tag{17}$$

ρ_a 表示单位体积混合物中第 a 组分物质质量, 称为第 a 组分的体密度(bulk density)• 单位体积第 a 组分物质的质量用 γ_a 表示, 相对于体密度 ρ_a, 把 γ_a 称为第 a 组分的真密度(true density) 或物质密度(material density)• 第 a 组分体密度和真密度的比值定义为第 a 组分的体积分数

(volume fraction) ϕ_a, 即

$$\phi_a(\boldsymbol{x}, t) = \rho_a(\boldsymbol{x}, t) / \gamma_a(\boldsymbol{x}, t), \tag{18}$$

ϕ_a 表示单位体积混合物中第 a 组分所占体积。 $\phi_a(a = 1, 2, \cdots, N)$ 是混合物局部结构的简单描述。 若

$$\sum_{a=1}^{N} \phi_a = 1, \tag{19}$$

则称这种混合物为饱和混合物(saturated mixture), 饱和混合物的组分之间没有空隙; 若

$$\sum_{a=1}^{N} \phi_a < 1, \tag{20}$$

则称这种混合物为非饱和混合物(unsaturated mixture), 这种混合物的组分之间有空隙。

空间点 $\boldsymbol{x}$ 处混合物的运动速度定义为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_a \rho_a(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{x}, t). \tag{21}$$

第 a 组分扩散速度(diffusion velocity) 或质心系速度(barycentric velocity) $\boldsymbol{u}_a$ 是 $\boldsymbol{v}_a$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的差

$$\boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t). \tag{22}$$

根据方程(17)、(21)和(22), 可以证明

$$\sum_a \rho_a \boldsymbol{u}_a = 0. \tag{23}$$

1.2 混合物的守恒定律和 Clausius_Duhem 不等式

混合物第 a 组分的质量守恒定律、动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律的局部形式分别是

$$\rho_a' + \rho_a \operatorname{div} \boldsymbol{v}_a = c_a \text{或} (\rho_a | \det \boldsymbol{F}_a |)' = | \det \boldsymbol{F}_a | c_a, \tag{24a, b}$$

$$\rho_a \boldsymbol{v}_a' + c_a \boldsymbol{v}_a = \operatorname{div} \boldsymbol{t}_a + \rho_a \boldsymbol{b}_a + \boldsymbol{p}_a, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{t}_a - \boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_a, \tag{26}$$

$$\rho_a \varepsilon_a' + c_a \left(\varepsilon_a - \frac{1}{2} v_a^2 \right) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_a) - \operatorname{div} \boldsymbol{q}_a + \rho_a r_a + \varepsilon_a - \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{v}_a, \tag{27}$$

式中, c_a 是单位时间对单位体积混合物中第 a 组分的质量供给量(growth of mass); $\boldsymbol{t}_a$ 是第 a 组分的偏应力张量(partial stress tensor), 它表示体元外混合物通过体元边界对体元中第 a 组分的应力; $\boldsymbol{p}_a$ 是第 a 组分动量供给量(moment supply), 它表示体元内其它组分对第 a 组分的动量作用, 又称为局部体力(local body force) 或内体力(inner body force); $\boldsymbol{b}_a$ 是第 a 组分的外体力强度; 张量 $\boldsymbol{M}_a$ 是与矢量 $\boldsymbol{m}_a$ ($\boldsymbol{m}_a$ 是对第 a 组分的动量矩供给量, 反映了对其的偶应力(couple stress) 作用) 对应的反对称张量。 $\boldsymbol{M}_a$ 是一个线性变换, 对任意矢量 $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{M}_a$ 满足

$$\boldsymbol{M}_a \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{m}_a \times \boldsymbol{x}_0. \tag{28}$$

$\boldsymbol{M}_a$ 的分量是

$$\begin{cases} M_{a11} = M_{a22} = M_{a33} = 0, \; M_{a23} = - M_{a32} = m_{a1}, \\ M_{a31} = - M_{a13} = m_{a2}, \; M_{a12} = - M_{a21} = m_{a3}, \end{cases} \tag{29a ~ d}$$

ε_a 是第 a 组分的内能密度(不包括动能); $\boldsymbol{q}_a$ 是第 a 组分的偏热流通量矢量(partial heat flux vector); r_a 是第 a 组分的外热供给量; ε_a 是第 a 组分的能量供给量。

混合物的质量守恒定律、动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律的局部形式分别是

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad \text{或} \qquad \sum_a c_a = 0, \tag{30a, b}$$

$$\rho\boldsymbol{a} = \operatorname{div}\boldsymbol{t} + \rho\boldsymbol{b} \qquad 或 \qquad \sum_a \boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{0}, \tag{31a, b}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} \qquad 或 \qquad \sum_a \boldsymbol{M}_a = \boldsymbol{0}, \tag{32a, b}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}) - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \rho r \qquad 或 \qquad \sum_a \varepsilon_a = 0, \tag{33a, b}$$

其中, $\boldsymbol{t}$ 是混合物应力张量, 定义为

$$\boldsymbol{t} = \sum_a(\boldsymbol{t}_a - \rho_a\boldsymbol{u}_a \otimes \boldsymbol{u}_a), \tag{34}$$

“$\otimes$”表示张量积. (34) 式定义的混合物应力张量 $\boldsymbol{t}$ 满足

$$\boldsymbol{t} - \rho\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} = \sum_a(\boldsymbol{t}_a - \rho_a\boldsymbol{v}_a \otimes \boldsymbol{v}_a). \tag{35}$$

混合物应力张量的内部部分(inner part) 是

$$\boldsymbol{t}_{\mathrm{I}} = \sum_a \boldsymbol{t}_a; \tag{36}$$

混合物外体力强度 $\boldsymbol{b}$ 与第 a 组分外体力强度 $\boldsymbol{b}_a$ 的关系是

$$\rho\boldsymbol{b} = \sum_a \rho_a\boldsymbol{b}_a. \tag{37}$$

ε 是混合物的能量密度, 定义为

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\sum_a\left(\rho_a\varepsilon_a + \frac{1}{2}\rho_a u_a^2\right), \tag{38}$$

满足

$$\rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}v^2\right) = \sum_a\rho_a\left(\varepsilon_a + \frac{1}{2}v_a^2\right); \tag{39}$$

ε 的内部部分是

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\rho}\sum_a\rho_a\varepsilon_a. \tag{40}$$

$\boldsymbol{q}$ 是混合物的热流通量矢量, 定义为

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0 + \frac{1}{2}\sum_a\rho_a u_a^2\boldsymbol{u}_a, \tag{41}$$

其中

$$\boldsymbol{q}_0 = \sum_a(\boldsymbol{q}_a - \boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_a + \rho_a\varepsilon_a\boldsymbol{u}_a); \tag{42}$$

(41) 式定义的 $\boldsymbol{q}$ 满足

$$\boldsymbol{q} - \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + \rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}v^2\right)\boldsymbol{v} = \sum_a\left[\boldsymbol{q}_a - \boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_a + \rho_a\left(\varepsilon_a + \frac{1}{2}v_a^2\right)\boldsymbol{v}_a\right]. \tag{43}$$

r 是混合物外热供给量密度, 定义为

$$r = \frac{1}{\rho}\sum_a\rho_a(r_a + \boldsymbol{b}_a\cdot\boldsymbol{u}_a), \tag{44}$$

满足

$$\rho(r + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}) = \sum_a\rho_a(r_a + \boldsymbol{b}_a\cdot\boldsymbol{v}_a). \tag{45}$$

$\boldsymbol{L}$ 是混合物的速度梯度

$$\boldsymbol{L} = \operatorname{grad}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \tag{46}$$

它又能表示成

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{\rho}\sum_a(\rho_a\boldsymbol{L}_a + \boldsymbol{u}_a \otimes \operatorname{grad}\rho_a). \tag{47}$$

混合物耗散公理(axiom of dissipation),也是混合物热力学系统的 Clausius_Duhem 不等式(或熵不等式(entropy unequality))为

$$\sum_a\left[\rho_a\eta_a' + c_a\eta_a + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}_a}{\theta_a}\right) - \frac{\rho_a r_a}{\theta_a}\right] \geqslant 0, \tag{48a}$$

或

$$\rho\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \sum_a \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}_a}{\theta_a} + \rho_a\eta_a\boldsymbol{u}_a\right) - \sum_a\frac{\rho_a r_a}{\theta_a} \geqslant 0, \tag{48b}$$

式中,$\eta_a(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\theta_a(\boldsymbol{x},t)$ 分别是第 a 组分熵密度和温度. 混合物的熵密度 η 是

$$\eta = \frac{1}{\rho}\sum_a\rho_a\eta_a. \tag{49}$$

应用(27)式消去(48a)式中的 $\rho_a r_a$ 项,得出约化熵不等式(reduced entropy unequality)

$$\sum_a\frac{1}{\theta_a}\left[\rho_a(\eta_a'\theta_a - \varepsilon_a') + \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_a) - \frac{\boldsymbol{q}_a\cdot\operatorname{grad}\theta_a}{\theta_a} + \hat{\varepsilon}_a - \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a - c_a\left(\eta_a\theta_a - \varepsilon_a + \frac{1}{2}v_a^2\right)\right] \geqslant 0. \tag{50}$$

引入 Helmhotz 自由能(Helmhotz free energy) ψ_a

$$\psi_a = \varepsilon_a - \theta_a\eta_a, \tag{51}$$

(50)式改写成

$$\sum_a\frac{1}{\theta_a}\left[-\rho_a(\psi_a' + \eta_a\theta_a') + \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_a) - \frac{\boldsymbol{q}_a\cdot\operatorname{grad}\theta_a}{\theta_a} + \hat{\varepsilon}_a - \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a - c_a\left(\psi_a - \frac{1}{2}v_a^2\right)\right] \geqslant 0. \tag{52}$$

对于单一温度混合物,各组分温度相同,即

$$\theta_a(\boldsymbol{x},t) = \theta(\boldsymbol{x},t) \qquad (a = 1,2,\cdots,N), \tag{53}$$

$\theta(\boldsymbol{x},t)$ 与第 a 组分运动有关的物质导数是

$$(\theta)_a' = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_a, \tag{54}$$

其中

$$\boldsymbol{g} = \operatorname{grad}\theta(\boldsymbol{x},t). \tag{55}$$

熵不等式(52)简化成

$$-\sum_a\rho_a\psi_a' - \rho\eta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \operatorname{tr}\left[\sum_a(\boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_a)\right] - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}\cdot\sum_a(\boldsymbol{q}_a + \rho_a\eta_a\theta\boldsymbol{u}_a) - \sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a - \sum_a c_a\left(\psi_a - \frac{1}{2}v_a^2\right) \geqslant 0. \tag{56}$$

本文讨论单一温度混合物,并且假定组分之间无质量转换,即 $c_a = 0\ (a = 1,2,\cdots,N)$. 对于这样的混合物,把约化熵不等式(56)表示为

$$\sum_a\left[-\Psi_a' - \rho_a\eta_a\partial_t\theta - \operatorname{tr}(\rho_a\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{L}_a) - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}\cdot(\boldsymbol{q}_a + \rho_a\eta_a\theta\boldsymbol{v}_a) - \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a\right] \geqslant 0, \tag{57}$$

式中

$$\Psi_a = \rho_a\psi_a, \tag{58}$$

$$\rho_a\boldsymbol{K}_a = \Psi_a\boldsymbol{I} - \boldsymbol{t}_a^{\mathrm{T}}, \tag{59}$$

Ψ_a 是单位体积混合物中第 a 组分的自由能;$\boldsymbol{K}_a$ 是第 a 组分的化学势张量.

2　对非饱和土混合物的基本假设

为了简化处理过程,根据土力学[21]研究成果,对非饱和土混合物作如下基本假设:

1) 非饱和土是由固体组分(土颗粒形成的骨架) s、液体组分(土骨架孔隙中的水、水溶液或其它液体) l 和气体组分(土骨架孔隙中的空气、水蒸气或混合气体) g 形成的饱和混合物•

2) 非饱和土混合物3种组分物质之间不能相互转化,即 $c_a = 0(a = s, l, g)$• 在处理非饱和土时忽略流体(液体和气体)在土骨架上的入渗、附着和土骨架物质在流体中的溶解,忽略液体的蒸发、气体在液体中的溶解和气体的凝结•

3) 非饱和土混合物3种组分具有相同温度• 把非饱和土作为单一温度混合物•

4) 固体组分物质(土颗粒)和液体组分物质均不可压缩,它们的真密度 $\gamma_b(b = s, l)$ 为常量• 气体组分物质可压缩,其真密度 γ_g 为变量•

3 非饱和土混合物的熵不等式

饱和混合物与一般混合物不同,非饱和土混合物又与通常的饱和混合物不同• 本小节建立适用于饱和混合物和非饱和土混合物的熵不等式•

3.1 饱和混合物的熵不等式

非饱和土是固体组分、液体组分和气体组分形成的单一温度饱和混合物• “非饱和土”一词中的“非饱和”指土骨架孔隙中有气体,液体没有完全占据骨架孔隙;而“饱和混合物”一词中的“饱和”指混合物组分的体积分数 $\phi_a(a = s, l, g)$ 满足饱和条件(19),即

$$\phi_s + \phi_l + \phi_g = 1, \tag{60}$$

上式的时间偏导数和梯度分别是

$$\sum_a \partial_t \phi_a = 0, \tag{61}$$

$$\sum_a \operatorname{grad} \phi_a = \mathbf{0}• \tag{62}$$

应用物质导数,把(61)式改写成

$$\sum_a (\phi_a' - \operatorname{grad}\phi_a • \boldsymbol{v}_a) = 0• \tag{63}$$

用 Lagrange 乘子法引入上式的限制,熵不等式(57)转化为

$$\begin{aligned} &-\sum_a \Psi_a' - \rho\eta\partial_t\theta - \sum_a \operatorname{tr}(\rho_a \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{L}_a) - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta} • \sum_a (\boldsymbol{q}_a + \rho_a \eta_a \theta \boldsymbol{v}_a) - \\ &\quad \sum_a (\boldsymbol{p}_a - P \operatorname{grad}\phi_a) • \boldsymbol{v}_a - P\sum_a \phi_a' \geqslant 0, \end{aligned} \tag{64}$$

式中,P 是 Lagrange 乘子• 上式表明:与不受饱和条件约束的混合物相比,饱和混合物组分之间的相互作用增加了 $(-P \operatorname{grad}\phi_a)$,并且混合物系统的熵增率与组分体积分数的物质导数 ϕ_a' 有关•

单位体积混合物内各组分的自由能是描述混合物系统可恢复能量的独立本构变量的函数[13]• 用下面的本构方程描述

$$\Psi_a = \Psi_a(\theta, \boldsymbol{C}_s, \rho_l, \rho_g, \phi_l, \phi_g), \tag{65}$$

$\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{F}_s^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_s$ 是固体组分右 Cauchy_Green 张量• 计算(65)式物质导数后再对组分求和,有

$$\sum_a \Psi_a' = \frac{\partial \Psi_{\mathrm{I}}}{\partial \theta} \partial_t \theta + \boldsymbol{g} • \sum_a \left(\frac{\partial \Psi_a}{\partial \theta} \boldsymbol{v}_a \right) + \sum_a \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_{a\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_a) + \sum_a \boldsymbol{k}_a • \boldsymbol{v}_a + \sum_f \frac{\partial \Psi_{\mathrm{I}}}{\partial \phi_f} \phi_f', \tag{66}$$

其中

$$\boldsymbol{k}_f = \operatorname{grad} \Psi_f - \left(\frac{\partial \Psi_{\mathrm{I}}}{\partial \rho_f} \operatorname{grad} \rho_f + \frac{\partial \Psi_{\mathrm{I}}}{\partial \phi_f} \operatorname{grad} \phi_f + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \boldsymbol{g} \right) \qquad (f = l, g), \tag{67}$$

$$\boldsymbol{k}_s = -\sum_f \boldsymbol{k}_f = \operatorname{grad}\Psi_s - \left(\frac{\partial \Psi_I}{\partial \boldsymbol{C}_s}[\operatorname{grad}\boldsymbol{C}_s] + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta}\boldsymbol{g}\right), \tag{68}$$

$$\boldsymbol{t}_{sR} = \boldsymbol{F}_s\left(\frac{\partial \Psi_I}{\partial \boldsymbol{C}_s} + \left(\frac{\partial \Psi_I}{\partial \boldsymbol{C}_s}\right)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{F}_s^{\mathrm{T}} = 2\boldsymbol{F}_s\left(\frac{\partial \Psi_I}{\partial \boldsymbol{C}_s}\right)\boldsymbol{F}_s^{\mathrm{T}}, \tag{69}$$

$$\boldsymbol{t}_{fR} = -\rho_f\frac{\partial \Psi_I}{\partial \rho_f}\boldsymbol{I} \qquad (f = l, g)\cdot \tag{70}$$

$\Psi_I = \sum_a \rho_a\Psi_a\cdot$ 把(66)式代入(64)式, 得

$$-\left(\rho\eta + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \theta}\right)\partial_t\theta - \sum_a \operatorname{tr}[(\rho_a\boldsymbol{K}_a + \boldsymbol{t}_{aR}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{L}_a] - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}\cdot\boldsymbol{q}_I - \sum_a\left[\boldsymbol{p}_a - P\operatorname{grad}\phi_a + \boldsymbol{k}_a + \left(\rho_a\eta_a + \frac{\partial \Psi_a}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{g}\right]\cdot\boldsymbol{v}_a - P\phi_s' - \sum_f\left(P + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_f}\right)\phi_f' \geqslant 0\cdot \tag{71}$$

标架无差异公理[22]要求上式中的 $\boldsymbol{v}_a(a = s, l, g)$ 以 $\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s(f = l, g)$ 的形式出现, 这就要求(71)式里中括号内部分的组分之和等于零, 即

$$\sum_a\left[\boldsymbol{p}_a - P\operatorname{grad}\phi_a + \boldsymbol{k}_a + \left(\rho_a\eta_a + \frac{\partial \Psi_a}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{g}\right] = \boldsymbol{0}, \tag{72}$$

结合(31b)式、(62)式和(68)式, 上式简化成

$$\eta = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \Psi_I}{\partial \theta}; \tag{73}$$

熵不等式(71)简化为

$$-\sum_a \operatorname{tr}[(\rho_a\boldsymbol{K}_a + \boldsymbol{t}_{aR}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{L}_a] - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}\cdot\boldsymbol{q}_I - \sum_f \boldsymbol{f}_f\cdot(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) - P\phi_s' - \sum_f\left(P + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_f}\right)\phi_f' \geqslant 0, \tag{74}$$

式中

$$\boldsymbol{f}_f = \boldsymbol{p}_f - P\operatorname{grad}\phi_f + \boldsymbol{k}_f + \left(\rho_f\eta_f + \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{g}, \tag{75}$$

$$\boldsymbol{f}_s = -\sum_f \boldsymbol{f}_f = \boldsymbol{p}_s - P\operatorname{grad}\phi_s + \boldsymbol{k}_s + \left(\rho_s\eta_s + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{g}\cdot \tag{76}$$

熵不等式(74)就是流体饱和多孔介质混合物的熵不等式· 该式表明, $\partial_t\theta$ 对饱和混合物系统的熵增率无影响·

3.2 非饱和土混合物的熵不等式

考虑到非饱和土混合物固体组分物质和液体组分物质都不可压缩, 它们的真密度为常量· 从质量守恒方程(24a)和 $c_b = 0(b = s, l)$ 推导出

$$\phi_b' = -\phi_b\operatorname{div}\boldsymbol{v}_b = -\phi_b\operatorname{tr}\boldsymbol{L}_b \qquad (b = s, l)\cdot \tag{77}$$

注意到 γ_l 为常量, ρ_l 不再是独立本构变量, 并且

$$\boldsymbol{t}_{lR} = -\phi_l\frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_l}\boldsymbol{I}, \tag{78}$$

$$\boldsymbol{k}_l = \operatorname{grad}\Psi_l - \left(\frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_l}\operatorname{grad}\phi_l + \frac{\partial \Psi_l}{\partial \theta}\boldsymbol{g}\right), \tag{79}$$

(74)式变形成

$$\sum_a \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_{aD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_a) - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}\cdot\boldsymbol{q}_I - \sum_f \boldsymbol{f}_f\cdot(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \sigma_g\phi_g' \geqslant 0, \tag{80}$$

其中

$$\boldsymbol{t}_{sD}^{T} = -(\rho_s \boldsymbol{K}_s + \boldsymbol{t}_{sR} - P\phi_s \boldsymbol{I}), \tag{81}$$

$$\boldsymbol{t}_{lD}^{T} = -(\rho_l \boldsymbol{K}_l + \boldsymbol{t}_{lR} - P\phi_l \boldsymbol{I}), \tag{82}$$

$$\boldsymbol{t}_{gD}^{T} = -(\rho_g \boldsymbol{K}_g + \boldsymbol{t}_{gR}), \tag{83}$$

$$\sigma_g = -\left(P + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_g}\right), \tag{84}$$

$\boldsymbol{t}_{aD}$ 和 $\boldsymbol{t}_{aR}$ 分别是偏应力张量 $\boldsymbol{t}_a$ 的耗散部分和非耗散部分, σ_g 是平衡相互作用力(equilibrated interaction force)• 从(81)~(83)式和(59)式推导出各组分的偏应力张量分别是

$$\boldsymbol{t}_s = \Psi_s \boldsymbol{I} + \boldsymbol{t}_{sR} + \boldsymbol{t}_{sD} - P\phi_s \boldsymbol{I}, \tag{85}$$

$$\boldsymbol{t}_l = \Psi_l \boldsymbol{I} + \boldsymbol{t}_{lR} + \boldsymbol{t}_{lD} - P\phi_l \boldsymbol{I}, \tag{86}$$

$$\boldsymbol{t}_g = \Psi_g \boldsymbol{I} + \boldsymbol{t}_{gR} + \boldsymbol{t}_{gD}• \tag{87}$$

把(80)式变形为

$$\sum_{a,m,n} \mathrm{tr}(\boldsymbol{t}_{aD}^{s})_{mn}(\boldsymbol{d}_a)_{mn} + \frac{1}{2}\sum_{f,m,n}(\boldsymbol{M}_{fD})_{mn}(\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s)_{mn} - \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}• \boldsymbol{q}_I - \sum_f \boldsymbol{f}_f •(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \sigma_g \phi_g' \geqslant 0, \tag{88}$$

式中

$$\boldsymbol{t}_{aD}^{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_{aD} + \boldsymbol{t}_{aD}^{T}), \tag{89}$$

$$\boldsymbol{M}_{aD} = \boldsymbol{t}_{aD} - \boldsymbol{t}_{aD}^{T}, \tag{90}$$

$\boldsymbol{t}_{aD}^{s}$ 是 $\boldsymbol{t}_{aD}$ 的对称部分; $\boldsymbol{M}_{aD}$ 是 $\boldsymbol{t}_{aD}$ 反对称部分的二倍, 并且满足

$$\sum_a \boldsymbol{M}_{aD} = \boldsymbol{0}, \tag{91}$$

(88)式就是非饱和土混合物的熵不等式•

4 非饱和土混合物的非线性本构方程和场方程

4.1 非饱和土混合物的非线性本构方程和场方程

把熵不等式(88)中出现的独立本构变量

$$\boldsymbol{Y}_0 = \left(\boldsymbol{d}_a, \boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s, \frac{\boldsymbol{g}}{\theta}, \boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s, \phi_g'\right) \tag{92}$$

称为混合物系统的热力学力(thermodynamic force), 相关本构变量

$$\boldsymbol{J}_0 = \left(\boldsymbol{t}_{aD}^{s}, \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{fD}, -\boldsymbol{q}_I, -\boldsymbol{f}_f, \sigma_g\right) \tag{93}$$

称为混合物系统的热力学通量(thermodynamic fluxes)• 这样熵不等式(88)式简写成

$$\boldsymbol{Y}_0 • \boldsymbol{J}_0 \geqslant 0, \tag{94}$$

本构方程的耗散部分是

$$\boldsymbol{J}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}_0; \boldsymbol{Y}_{R0}; \boldsymbol{Y}_{I0}), \tag{95}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}_{R0} = (\theta, \boldsymbol{C}_s, \rho_g, \phi_l, \phi_g), \tag{96}$$

$$\boldsymbol{Y}_{I0} = (\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{e}_g, \mathrm{grad}\phi_l, \mathrm{grad}\phi_g), \tag{97}$$

$\boldsymbol{Y}_{I0}$ 可以作为混合物系统内部状态参量处理• Edelen[23] 给出了(94)式的通解, 其形式是

$$\boldsymbol{F} = \therefore_{(\boldsymbol{Y}_0)} \Theta_0(\boldsymbol{Y}_0; \boldsymbol{Y}_{R0}; \boldsymbol{Y}_{I0}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y}_0; \boldsymbol{Y}_{R0}; \boldsymbol{Y}_{I0}), \tag{98}$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 满足

$$\boldsymbol{W}\cdot \boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{0}. \tag{99}$$

混合物系统的耗散势 $\Theta_0(\boldsymbol{Y}_0;\ \boldsymbol{Y}_{R0};\ \boldsymbol{Y}_{I0})$ 由下给出

$$\Theta_0(\boldsymbol{Y}_0;\ \boldsymbol{Y}_{R0};\ \boldsymbol{Y}_{I0}) = \int_0^1 \boldsymbol{Y}_0\cdot \boldsymbol{F}(\tau\boldsymbol{Y}_0;\ \boldsymbol{Y}_{R0};\ \boldsymbol{Y}_{I0})\frac{d\tau}{\tau}. \tag{100}$$

从(95)式和(98)式得出热力学通量(93)的分量是

$$\boldsymbol{t}^s_{aD} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_a} + \boldsymbol{W}_a, \tag{101}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{fD} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s)} + \boldsymbol{W}_{Mf} \qquad (f = l, g) \tag{102}$$

$$-\boldsymbol{q}_I = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{g}/\theta)} + \boldsymbol{W}_q, \tag{103}$$

$$-\boldsymbol{f}_f = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)} + \boldsymbol{W}_{ff} \qquad (f = l, g) \tag{104}$$

$$\sigma_g = \frac{\partial \Theta_0}{\partial \dot{\phi}_g} + W_{\phi g}, \tag{105}$$

其中

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}_a,\ \boldsymbol{W}_{Mf},\ \boldsymbol{W}_q,\ \boldsymbol{W}_{ff},\ W_{\phi g}). \tag{106}$$

虽然非零的 $\boldsymbol{W}$ 给解释一些现象提供了理论依据, 但是为了处理简单, 这里取 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$. 这样, (101) ~ (105) 式简化为

$$\boldsymbol{t}^s_{aD} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_a} \qquad (a = s, l, g), \tag{107}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{M}_{fD} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s)} \qquad (f = l, g) \tag{108}$$

$$-\boldsymbol{q}_I = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{g}/\theta)}, \tag{109}$$

$$-\boldsymbol{f}_f = \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)} \qquad (f = l, g), \tag{110}$$

$$\sigma_g = \frac{\partial \Theta_0}{\partial \dot{\phi}_g}. \tag{111}$$

从以上推导过程得出非饱和土非线性本构方程的自由能函数 $\Psi_a(a = s, l, g)$ 和耗散势函数 Θ_0 表示为

$$\eta = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \Psi_I}{\partial \theta}, \tag{73}$$

$$\boldsymbol{q}_I = -\frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{g}/\theta)}, \tag{109}$$

$$P = -\frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_g} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial \dot{\phi}_g}, \tag{112}$$

$$\boldsymbol{p}_l = -\operatorname{grad}\Psi_l + \left(P + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_l}\right)\operatorname{grad}\phi_l - \rho_l\eta_l\boldsymbol{g} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{v}_s)}, \tag{113}$$

$$\boldsymbol{p}_g = -\operatorname{grad}\Psi_g + \left(P + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \phi_g}\right)\operatorname{grad}\phi_g + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \rho_g}\operatorname{grad}\rho_g - \rho_g\eta_g\boldsymbol{g} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_s)}, \tag{114}$$

$$\boldsymbol{p}_s = -(\boldsymbol{p}_l + \boldsymbol{p}_g) = -\operatorname{grad}\Psi_s + P\operatorname{grad}\phi_s + \frac{\partial \Psi_I}{\partial \boldsymbol{C}_s}[\operatorname{grad}\boldsymbol{C}_s] - \rho_s\eta_s\boldsymbol{g} + \sum_f \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)}, \tag{115}$$

$$\boldsymbol{t}_s = \left(\Psi_s - \mathrm{P}\phi_s\right)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F}_s\left(\frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \boldsymbol{C}_s}\right)\boldsymbol{F}_s^\mathrm{T} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_s} - \sum_f \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s)}, \tag{116}$$

$$\boldsymbol{t}_l = \left[\Psi_l - \left(\mathrm{P} + \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \phi_l}\right)\phi_l\right]\boldsymbol{I} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_l} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_l - \boldsymbol{w}_s)}, \tag{117}$$

$$\boldsymbol{t}_g = \left(\Psi_g - \rho_g \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \rho_g}\right)\boldsymbol{I} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_g} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_g - \boldsymbol{w}_s)}. \tag{118}$$

推导公式(113)时,应用了公式(75)、(79)和(110);推导公式(114)时,应用了公式(75)、(67)和(110);推导公式(112)时,应用了公式(84)和(111);推导公式(115)时,应用了公式(31)、(113)、(114)、(62)和(73);推导公式(116)时,应用了公式(85)、(69)、(107)、(108)和(112);推导公式(117)时,应用了公式(86)、(78)、(107)、(108)和(112);推导公式(118)时,应用了公式(87)、(70)、(107)、(108)和(112).

把关于 $\boldsymbol{p}_a$ 的本构方程(113)~(115)和关于 $\boldsymbol{t}_a$ 的本构方程(116)~(118)代入组分动量守恒方程(25),非饱和土3种组分的场方程分别是

$$\begin{aligned}\rho_g \boldsymbol{v}_g' = {} & -\rho_g \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \rho_g}\right) + \operatorname{div}\left[\frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_g} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_g - \boldsymbol{w}_s)}\right] + \rho_g \boldsymbol{b}_g + {} \\ & \left(\mathrm{P} + \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \phi_g}\right)\operatorname{grad}\phi_g - \rho_g \eta_g \boldsymbol{g} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_g - \boldsymbol{v}_s)},\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}\rho_l \boldsymbol{v}_l' = {} & -\phi_l \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \phi_l}\right) + \operatorname{div}\left[\frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_l} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_l - \boldsymbol{w}_s)}\right] + \rho_l \boldsymbol{b}_l - {} \\ & \phi_l \operatorname{grad}\mathrm{P} - \rho_l \eta_l \boldsymbol{g} - \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{v}_s)},\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}\rho_s \boldsymbol{v}_s' = {} & \operatorname{div}\left\{2\boldsymbol{F}_s\left(\frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \boldsymbol{C}_s}\right)\boldsymbol{F}_s^\mathrm{T} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_s} - \sum_f \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{w}_f - \boldsymbol{w}_s)}\right\} + \rho_s \boldsymbol{b}_s - {} \\ & \phi_s \operatorname{grad}\mathrm{P} + \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \boldsymbol{C}_s}[\operatorname{grad}\boldsymbol{C}_s] - \rho_s \eta_s \boldsymbol{g} + \sum_f \frac{\partial \Theta_0}{\partial(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)}.\end{aligned} \tag{121}$$

以上3式求和就是

$$\sum_a \rho_a \boldsymbol{v}_a' = \operatorname{div}\boldsymbol{t}_\mathrm{I} + \rho \boldsymbol{b}, \tag{122}$$

其中

$$\boldsymbol{t}_\mathrm{I} = \left(\Psi_\mathrm{I} - \rho_g \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \rho_g} - \phi_l \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \phi_l}\right)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{F}_s \frac{\partial \Psi_\mathrm{I}}{\partial \boldsymbol{C}_s}\boldsymbol{F}_s^\mathrm{T} + \sum_a \frac{\partial \Theta_0}{\partial \boldsymbol{d}_a}. \tag{123}$$

本构方程(112)~(118)、场方程(119)~(121)、质量守恒方程(24)和(77)、饱和条件(60)、熵本构方程(73)构成非饱和土混合物力学系统的完备方程组,结合具体问题的边界条件和初始条件,就能求解出组分形变函数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}_a, t)$、偏应力张量 $\boldsymbol{t}_a$、组分动量供给量 $\boldsymbol{p}_a$ 和混合物热流通量 $\boldsymbol{q}_\mathrm{I}$ 等. 这样,混合物系统的力学过程就完全确定.

4.2 非饱和土混合物的能量守恒方程和热力学平衡状态

应用非饱和土混合物本构方程,非饱和土混合物系统能量守恒方程(33)表示成

$$\begin{aligned}\theta\left[\partial_t(\rho\eta) + \sum_a \operatorname{div}(\rho_a \eta_a \boldsymbol{v}_a)\right] = {} \\ \sum_a \operatorname{tr}(\boldsymbol{t}_{a\mathrm{D}}^\mathrm{T} \boldsymbol{L}_a) - \operatorname{div}\boldsymbol{q}_\mathrm{I} - \sum_a \rho_a r_a - \sum_f \boldsymbol{f}_f \cdot (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s) + \sigma_g \phi_g'.\end{aligned} \tag{124}$$

用混合物能量守恒方程能确定出混合物系统力学过程中混合物温度分布和变化 $\theta(\boldsymbol{x}, t)$. 这样,混合物系统的热力学过程就完全确定了. 因此,本构方程、质量守恒方程、场方程、饱和条件和能量守恒方程构成了非饱和土混合物热力学过程的完备方程组.

熵不等式(88)表明:非饱和土混合物热力学系统的热力学平衡状态是

$$\boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{w}_f = \boldsymbol{w}_s,\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_s,\ \phi'_g = 0 \quad (a = s, l, g; f = l, g)\cdot \tag{125}$$

在热力学平衡状态下,系统的熵不变,热力学通量(93)等于零[11],即

$$\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{0};\ \boldsymbol{Y}_{R0};\ \boldsymbol{Y}_{I0}) = \boldsymbol{0}\cdot \tag{126}$$

至此,只要知道了非饱和土混合物系统的自由能函数 $\Psi_a(a = s, l, g)$ 和耗散势函数 Θ_0,就能得到本构方程和场方程以及混合物能量守恒方程的表达式,形成非饱和土混合物热力学过程完备方程组· 再组合具体问题的条件,非饱和土热力学过程就可完全确定· 自由能函数 $\Psi_a(a = s, l, g)$ 和耗散势函数 Θ_0 还必须服从物质标架无差异公理,也就是说它们只能是独立本构变量 $\boldsymbol{Y}_0$、$\boldsymbol{Y}_{R0}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{I0}$ 中张量和矢量不变量的函数·

5 结 论

应用混合物理论处理了非饱和土的本构关系问题· 建立了非线性本构方程和非线性场方程以及能量守恒方程,构筑了非饱和土混合物系统热力学过程的完备方程组· 初步形成了非饱和土混合物理论的基本框架,对非饱和土本构理论发展有一定的帮助·

[参 考 文 献]

[1] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京:水利水电出版社, 1983, 1—481.

[2] 蒋彭年. 非饱和土的工程性质简介[J]. 岩土工程学报, 1989, **11**(6): 39—59.

[3] 谢定义, 文吉琳, 张振中. 考虑土结构性的本构关系[J]. 土木工程学报, 2000, **33**(4): 35—40.

[4] 章根德. 土的本构模型及其工程应用[M]. 北京:科学出版社, 1996, 86—288.

[5] Hardin B O, Drnevich V P. Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects [J]. J Soil Mech Found Eng Div, SM 6, 1972, **98**(4): 604—624.

[6] 张学言. 土塑性力学的建立与发展[J]. 力学进展, 1989, **19**(4): 485—495.

[7] Bazant Z P, Ansal A M, Krizel R T. Endochronic models for soil[A]. In: Prande, Zienkiewicz Eds. Soil Mechanics —Transient and Cyclic Loads [C]. New York: John Wiley and Sons Ltd, 1982, 419—438.

[8] 章根德. 固体_流体混合物连续介质理论及其在工程上的应用[J]. 力学进展, 1993, **23**(1): 58—67.

[9] 陈正汉. 岩土力学的公理化理论体系[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(10): 901—909.

[10] 黄文熙. 寄语青年岩土力学工作者[J]. 岩土力学学报, 1992, **14**(增刊): 1.

[11] Bowen R M. 混合物理论[M]. 许慧已, 董务民 译, 南京:江苏科学技术出版社, 1983, 1—137.

[12] Truesdell C. Rational Thermodynamics [M]. Second Edition. New York: Springer_Verlag, 1984, 407—450.

[13] Eringen A C. Continuum theory of swelling porous elastic soil[J]. Int J Engng Sci, 1994, **32**(8): 1337—1349.

[14] Raats P A C. Applications of theory of mixture in soil physics[A]. In: Truesdell C Ed. Rational Thermodynamics [C]. Second Edition. New York: Springer_Verlag, 1984, 326—343.

[15] 陈正汉, 谢定义, 刘祖典. 非饱和土固结的混合物理论(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(2): 127—137.

[16] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(8): 687—698.

[17] Eringen A C. 连续统物理的基本原理[M]. 朱照宣 译. 南京:江苏科学技术出版社, 1985, 1—169.

[18] Eringen A C. 连续统力学[M]. 程昌钧, 俞焕然 译, 北京:科学出版社, 1991, 1—191.

[19] Truesdell C, Toupin R. The classical field theory[A]. In: Flugge's Handbuch der Physik [C]. Volune Ⅲ/1, Berlin: Springer_Verlag, 1960, 158—166.

[20] Bedford A, Drumheller D C. Theories of immiscible and structured mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1983, **21**(8): 863—960.

[21] Fredlund D G, Rahardjo H. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 张在明, 陈愈炯, 等 译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997, 1—45.

[22] Bowen R M. Toward a thermodynamics and mechancis of mixture[J]. Arch Rat Mech Anal, 1967, **24**(2): 370—403.

[23] Edelen D G B. A nonlinear onsager theory of irreversibility[J]. Int J Engng Sci, 1972, **10**(2): 481—490.

Constitutive Relation of Unsaturated Soil by Use of the Mixture Theory (Ⅰ)—Nonlinear Constitutive Equations and Field Equations

HUANG Yi[1], ZHANG Yin_ke[1, 2]

(1. Science College, Xi'an University of Architecture &Technology, Xi'an 710055, P.R.China;
2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P.R.China)

Abstract: The nonlinear constitutive equations and field equations of unsaturated soils were constructed on the basis of mixture theory. The soils were treated as the mixture composed of three constituents. First, from the researches of soil mechanics, some basic assumptions about the unsaturated soil mixture were made, and the entropy inequality of unsaturated soil mixture was derived. Then, with the common method usually used to deal with the constitutive problems in mixture theory, the nonlinear constitutive equations were obtained. Finally, putting the constitutive equations of constituents into the balance equations of momentum, the nonlinear field equations of constituents were set up. The balance equation of energy of unsaturated soil was also given, and thus the complete equations for solving the thermodynamic process of unsaturated soil was formed.

Key words: mixture theory; unsaturated soil; entropy inequality; constitutive equations; field equations