

文章编号: 1000-0887(2003) 02-0163-12

静水压力下压电弹性圆柱振动的主动控制^{*}

李红云, 林启荣, 刘正兴, 王超

(1. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(陈予恕推荐)

摘要: 对静水压力下压电弹性层合壳的振动控制进行了研究。首先利用 Hamilton 原理推导出压电弹性层合壳的非线性动力基本方程, 进一步得到了静水压力作用下封闭压电弹性层合壳的动力方程。对两端简支条件下的压电弹性圆柱壳的振动问题进行了求解, 并基于速度反馈控制法得到了带压电感测层/激励层的层合圆柱壳的主动控制模型。相应的数值结果表明在静载的情况下, 压电层上施加合适大小、方向的电压可以改变圆柱壳的静变形; 对于系统的动力响应问题, 速度反馈的增益越大, 越能抑制系统在共振区的振动, 验证了该控制模型抑制结构振动的有效性。

关键词: 压电弹性; 圆柱壳; 振动控制; 速度反馈; 静水压力; 感测层; 激励层
中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A

引 言

压电材料由于固有的正逆压电效应而可以有效地用于制作传感器或激励器, 从而达到主动控制结构的形状或振动的目的, 因此近年来压电材料在智能结构中的应用日益受到人们的关注。设计这样的主动结构就要求很好地理解结构和压电材料的机电耦合作用, 已有大量文献对此进行了研究^[1]。然而, 大多数的这类结构是基于小变形的线性理论^[2]。由于许多结构特别是大型轻质结构、薄壁容器等在承受大的静载或动力激励下发生大变形, 导致系统的几何非线性应变。因此, 需要研究几何非线性对于智能结构的静、动态特性的影响, 以便准确地设计和控制结构系统。

Baumhauer 和 Tiersten^[3]建立了一般性的压电非线性理论。Pai 等人^[4]提出了带压电层的复合板的非线性模型。Yu^[5]给出了压电板的大变形方程。Tzou^[6]对各向异性热压电层合壳在机械、电和热作用下的几何非线性理论进行了研究。文[7]采用半解析半数值的方法研究了几个非线性圆板的动力控制, 文[8, 9]对非线性压电层合梁进行了研究。对于柔性结构和薄壁结构而言, 初应力作用下结构的稳定性及其动力特性的控制问题是研究者非常关心的一个问题, 但有关压电智能结构在这方面的研究报道非常少, 文[10]对于无限长压电圆柱壳在径向外压作用下的稳定性问题进行了研究, 尚未看到有关有限长压电圆柱壳稳定性及其在初应力作用下动力响应控制的报道。

* 收稿日期: 2000_05_23; 修订日期: 2002_09_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10132010); 船舶工业国防科技应用、基础研究基金资助项目(99J41. 4. 4)

作者简介: 李红云(1972—), 女, 广东中山人, 副教授, 博士(E-mail: cmshen@public2.sta.net.cn)。

本文对静水压力下压电弹性层合壳的振动控制进行了研究。首先利用 Hamilton 原理推导出压电弹性层合壳的非线性动力基本方程。在此基础上,进一步得到了静水压力作用下封闭压电弹性层合壳的动力方程,并对两端简支条件下的压电弹性圆柱壳的振动问题进行了求解,基于速度反馈控制法得到了带压电感应层/激励层的层合圆柱壳的主动控制模型。相应的数值结果验证了该控制模型的有效性。

1 非线性压电弹性层合圆柱壳理论

考虑图 1 所示的一 N 层圆柱壳,假设每层之间均完全地粘合在一起。图 1 中坐标轴 x_1 、 x_2 、 x_3 分别沿圆柱壳的长度方向、圆周方向及径向,且 $x_3 = 0$ 的曲面设在圆柱壳的中面。其中 R 表示 x_2 轴在圆柱壳中面的曲率半径。圆柱坐标系 (r, θ, z) 与 (x_1, x_2, x_3) 的关系为 $r = x_3 + R$, $\theta = x_2$, $z = x_1$ 。圆柱壳为对称辅层,每一层的材料为正交各向异性的压电或纯弹性材料,且材料的主轴与坐标轴一致。层合壳每层的厚度为 $h_k (k = 1, 2, \dots, N)$,总厚度为 $h = \sum_{k=1}^N h_k$ 。圆柱壳的长度为 L 。

1. 本构关系

假设材料常数不随时间变化,则正交各向异性压电材料的线性本构关系为^[11]:

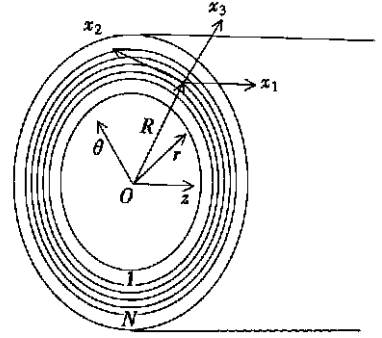


图 1 压电弹性层合圆柱壳

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

其中 σ_i, S_i, D_i, E_i 分别表示应力,应变,电位移和电场强度; $c_{ij}, e_{ij}, \epsilon_{ij}$ 分别表示材料的弹性常数,压电应力常数和介电常数。

在图 1 定义的曲线坐标系中电场强度 $E_i (i = 1, 2, 3)$ 和电势 ϕ 的关系定义为

$$E_1 = - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, E_2 = - \frac{1}{R + x_3} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, E_3 = - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad (3)$$

层合壳中某一层(如第 k 层)的电势 ϕ^k 可以写成^[12]:

$$\phi^k(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^M f_j^k(x_3) \cdot \Psi_j^k(x_1, x_2, t) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

其中 $f_j^k(x_3)$ 为拉格朗日插值函数。

2. 非线性应变_位移关系

根据 Love_Kirchhoff 薄壳理论,非线性变形 $U_i(x_1, x_2, x_3, t) (i = 1, 2, 3)$ 可以表达成^[2]

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_1, x_2, t) + \theta_1(x_1, x_2, t) \cdot x_3, \\ U_2(x_1, x_2, x_3, t) = u_2(x_1, x_2, t) + \theta_2(x_1, x_2, t) \cdot x_3, \\ U_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_3(x_1, x_2, t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $u_i(x_1, x_2, t) (i = 1, 2, 3)$ 表示中面上各点在 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 轴的位移分量。 θ_1, θ_2 分别表示中面法线绕 x_1 和 x_2 轴的旋转角,具体表达式为^[6]:

$$\theta_1 = - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \theta_2 = \frac{u_2}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (6)$$

一般而言,薄壳的面内变形远小于横向变形,因此,常常忽略面内大变形产生的非线性效应^[13],只考察横向大变形产生的非线性应变,得

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_6 \end{Bmatrix} + x_3 \cdot \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_6 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

其中 s_1, s_2, s_6 表示薄膜应变, K_1, K_2, K_6 表示中面的变曲应变,下标 1、2、6 分别表示中面在 x_1, x_2 方向的正应变和面内的剪应变,具体表达式为

$$s_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (8a)$$

$$s_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2, \quad (8b)$$

$$s_6 = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (8c)$$

$$K_1 = - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}, K_2 = \frac{\partial u_2}{R^2 \partial x_2} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}, K_6 = \frac{\partial u_2}{R \partial x_1} - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (8d)$$

3. Hamilton原理和非线性系统方程

利用 Hamilton 原理推导系统的控制方程和边界条件。Hamilton 原理为

$$\delta \int_{t_0}^1 (T - \Pi) dt = 0, \quad (9)$$

其中 T 表示系统的功能: $T = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathcal{U} \mathcal{U} dV$; Π 表示系统总的势能: $\Pi = \int_V h(S_i, E_j) dV - \int_A [t_j U_j - Q_j \phi] dA$ 。 ρ 为质量密度; t_j 是表面力在 3 坐标轴方向的分量, Q_j 是表面电荷, U_j 和 \mathcal{U} 分别表示位移和速度; h 是电焓: $h = \{S\}^T [c] \{S\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [\epsilon] \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [e] \{S\}$; V 和 A 分别表示压电连续壳的体积和表面积。

假设本文中只考虑横向电场 E_3 的作用,而认为薄壳的面内电场 E_1, E_2 为零。压电对称

铺陈层合壳的面内合力 $N_i (i = 1, 2, 6)$ 和弯矩 $M_i (i = 1, 2, 6)$ 可以分别表示为

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} dx_3 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^N e^{k_{31}} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_{jk} \Phi_j^k \right) \\ \sum_{k=1}^N e^{k_{32}} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_{jk} \Phi_j^k \right) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} dx_3 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^N e^{k_{31}} \left(\sum_{j=1}^M \beta_{jk} \Phi_j^k \right) \\ \sum_{k=1}^N e^{k_{32}} \left(\sum_{j=1}^M \beta_{jk} \Phi_j^k \right) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

(10) 和(11) 式右端第 2 项表示由电场引起的分量。其中

$$A_{\bar{j}} = \sum_{k=1}^N (c_{ij})_k (x_{3_k} - x_{3_{k-1}}), \quad B_{\bar{j}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (c_{\bar{j}})_k (x_{3_k}^3 - x_{3_{k-1}}^3) \\ (i, j = 1, 2, 6),$$

$$\Gamma_{jk} = \int_{x_{3_{k-1}}}^{x_{3_k}} \frac{d\Gamma_j^k}{dx_3} dx_3, \quad \beta_{jk} = \int_{x_{3_{k-1}}}^{x_{3_k}} x_3 \cdot \frac{d\beta_j^k}{dx_3} dx_3$$

$$(j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N),$$

$x_{3_k}, x_{3_{k-1}}$ 分别表示第 k 层外、内表面在 x_3 方向的坐标值。

对于没有大旋转效应的薄壳而言, 根据 Hamilton 原理可以得到非线性压电弹性层合圆柱壳的控制方程:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{R \partial x_2} = \rho_s \ddot{u}_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_2}{R \partial x_2} + \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{F_2}{R} = \rho_s \ddot{u}_2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{N_2}{R} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[N_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[N_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \right. \\ \left. \frac{1}{R} \frac{\partial N_6}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2}{R^2} N_6 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + \sum_{k=1}^N \sigma_3 \Big|_{x_{3_{k-1}}}^{x_{3_k}} = \rho_s \ddot{u}_3, \quad (14)$$

$$D_3^{jk} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N), \quad (15)$$

其中 $\rho_s = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k / h$ 定义为层合壳的加权平均密度,

$$F_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{R \partial x_2}; \quad F_2 = \frac{\partial M_2}{R \partial x_2} + \frac{\partial M_6}{\partial x_1}; \quad D_3^{jk} = \int_{x_{3_{k-1}}}^{x_{3_k}} D_3 \frac{d\Gamma_j^k}{dx_3} dx_3.$$

式(12)~(14) 与文[5]中当 $R_1 = \infty, R_2 = R, A_1 = 1, A_2 = R$ 时(23)~(25) 式相一致。式(14) 中大括号中所有项均是由非线性效应引起的。相应的力系和电学边界条件也可由 Hamilton 原理获得^[14]。

2 静水压力下封闭压电弹性圆柱壳的动力方程

本节研究封闭压电弹性圆柱壳在考虑水压力下的动力特性。设壳体受到的静水压力为

q , 在壳体外表面受到径向扰动压力 $P_1(x_1, x_2, t)$ 。由(12)~(14)式可导出扰动位移表示的动力方程式:

$$A_{11} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1}{R^2 \partial x_2^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{R \partial x_1 \partial x_2} + A_{12} \frac{\partial u_3}{R \partial x_1} + \sum_{k=1}^N e_{31}^k \left[\sum_{j=1}^M \eta_{jk} \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1} \right] = \rho_s h u_1, \quad (16)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{R \partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^4} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left[A_{66} + \frac{B_{66}}{R^2} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + A_{22} \frac{\partial u_3}{R^2 \partial x_2} - B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{R^4 \partial x_2^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{R^2 \partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N e_{32}^k \left[\sum_{j=1}^M \beta_{jk} \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N e_{31}^k \left[\sum_{j=1}^M \eta_{jk} \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2} \right] = \rho_s h u_2, \quad (17)$$

$$- A_{12} \frac{\partial u_1}{R \partial x_1} - A_{22} \frac{\partial u_2}{R^2 \partial x_2} + (2B_{66} + B_{12}) \frac{\partial^3 u_2}{R^2 \partial x_1^2 \partial x_2} + B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{R^4 \partial x_2^3} - A_{22} \frac{u_3}{R^2} - B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} - 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{R^2 \partial x_1^2 \partial x_2^2} - B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{R^4 \partial x_2^4} - \frac{qR}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - q \frac{\partial^2 u_3}{R \partial x_2^2} - P_1 - \frac{1}{R} \sum_{k=1}^N e_{32}^k \left[\sum_{j=1}^M \eta_{jk} \phi_j^k \right] + \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^N e_{32}^k \left[\sum_{j=1}^M \beta_{jk} \frac{\partial^2 \phi_j^k}{\partial x_2^2} \right] + \sum_{k=1}^N e_{31}^k \left[\sum_{j=1}^M \beta_{jk} \frac{\partial^2 \phi_j^k}{\partial x_1^2} \right] = \rho_s h u_3, \quad (18)$$

$$D_3^{jk} = \int_{x_{3_{k-1}}}^{x_{3_k}} \left\{ e_{31}^k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{32}^k \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) \frac{\partial u_2}{R \partial x_2} + e_{32}^k \cdot \frac{u_3}{R} - x_3 \left[e_{31}^k \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + e_{32}^k \frac{\partial^2 u_3}{R^2 \partial x_2^2} \right] - \epsilon_{33} \left[\sum_{l=1}^M \frac{\partial \phi_l^k}{\partial x_3} \right] \right\} \frac{df_l^k}{dx_3} dx_3 = 0 \quad (19)$$

基于薄壳假设, 压电层电势采用线性拉格朗日插值^[12], 代入(19)式并沿第 k 层厚度方向积分得

$$V^k = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left\{ \left[e_{31}^k \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{32}^k \left(\frac{\partial u_2}{R \partial x_2} + \frac{u_3}{R} \right) \right] \cdot (x_{3_k} - x_{3_{k-1}}) + \left[e_{32}^k \frac{\partial u_2}{R^2 \partial x_2} - e_{31}^k \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - e_{32}^k \frac{\partial^2 u_3}{R^2 \partial x_2^2} \right] \cdot \frac{1}{2} (x_{3_k}^2 - x_{3_{k-1}}^2) \right\}, \quad (20)$$

其中, $V^k = \phi_2^k - \phi_1^k$, 表示由应变引起的感测层的输出电压。

3 简支圆柱壳的无阻尼振动

为了获得有意义的结果, 本节中对于简支条件下封闭圆柱壳的振动问题进行求解。封闭压电圆柱壳是由在一对称铺层的弹性层合圆柱壳内外表面上各附加一压电层而形成的。由于我们关心的是圆柱壳在静水压力下的扰动解, 为方便起见, 在以后的讨论中去除扰动解各变量上的上划线“ \sim ”, 如 u_i 用 u_i 表示。对于两端简支的圆柱, 边界条件为:

$$x_1 = 0, L \text{ 时: } N_1 = u_2 = u_3 = M_1 = 0 \quad (21)$$

可以将每个压电层看作等厚的两层^[12], 因此电势可写成

$$\phi_1^k = \phi_A, \quad \phi_2^k = \phi_1^k = \phi_l, \quad \phi_3^k = 0,$$

$$\varphi_1^3 = 0, \varphi_2^3 = \varphi_1^4 = \varphi_0, \varphi_2^4 = \varphi_3 \cdot$$

其中, 上标‘1’表示压电圆柱壳内表面压电层的内半部分, 上标‘2’表示压电圆柱壳内表面压电层的外半部分, 上标‘3’表示压电圆柱壳外表面压电层的内半部分, 上标‘4’表示压电圆柱壳外表面压电层的外半部分; 下标‘1’表示对应压电层的内表面, 下标‘2’表示对应压电层的外表面。\$\varphi_A, \varphi_S\$ 分别表示作用在圆柱壳内外压电层表面上的外加电势。

满足简支条件(21)式的振型函数为

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \cos(z_m x_1) \cos(n x_2) e^{i\omega t}, \\ u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(z_m x_1) \sin(n x_2) e^{i\omega t}, \\ u_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin(z_m x_1) \cos(n x_2) e^{i\omega t}, \\ \varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1mn} \sin(z_m x_1) \cos(n x_2) e^{i\omega t}, \\ \varphi_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{0mn} \sin(z_m x_1) \cos(n x_2) e^{i\omega t}, \end{cases} \quad (22)$$

其中 \$\omega\$ 为圆柱壳的自振频率, \$z_m = m\pi/L\$, \$m, n\$ 分别表示轴向半波数和周向波数。同样, 外加电势 \$\varphi_A, \varphi_S\$ 以及径向扰动压力 \$P_1\$ 也可展开为

$$(\varphi_A, \varphi_S, P_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{Amn}, \varphi_{Smn}, P_{1mn}) \sin(z_m x_1) \cos(n x_2) e^{i\omega t}, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} (\varphi_{A m 0}, \varphi_{S m 0}, P_{1 m 0}) &= \frac{2}{L} \int_0^L (\varphi_A, \varphi_S, P_1) \sin(z_m x_1) dx_1 \quad (n = 0, m = 1, 2, 3, \dots), \\ (\varphi_{A mn}, \varphi_{S mn}, P_{1 mn}) &= \frac{2}{\mathcal{L}} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_A, \varphi_S, P_1) \sin(z_m x_1) \cos(n x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \cdot \end{aligned}$$

将(22)、(23)式代入(16)~(19)式得到动力方程:

$$[H] \{V\} - \omega^2 [M] \{V\} = \{T\}, \quad (24)$$

其中

$$\begin{cases} \{V\} = \left\{ u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{1mn}, \varphi_{0mn} \right\}^T, \\ \{T\} = \left\{ \begin{aligned} &e_{31} z_m (\eta_{11} \varphi_{Amn} + \eta_{24} \varphi_{Smn}) \\ &- \frac{e_{32} n}{R} (\eta_{11} \varphi_{Amn} + \eta_{24} \varphi_{Smn}) - \frac{e_{32} n}{R^2} (\beta_{11} \varphi_{Amn} + \beta_{24} \varphi_{Smn}) \\ &- \frac{e_{32}}{R} (\eta_{11} \varphi_{Amn} + \eta_{24} \varphi_{Smn}) - \left(\frac{e_{32} n^2}{R^2} + e_{31} z_m^2 \right) (\beta_{11} \varphi_{Amn} + \beta_{24} \varphi_{Smn}) - P_{1mn} \\ &E_{33} \alpha_1^{12} \varphi_{Amn} \\ &E_{33} \alpha_4^{12} \varphi_{Smn} \end{aligned} \right\}, \end{cases}$$

\$[H]\$ 为一对称矩阵, 具体表达式为

$$H_{11} = A_{11} z_m^2 + A_{66} \frac{n^2}{R^2}, \quad H_{12} = - \left[\frac{A_{12} + A_{66}}{R} \right] z_m n, \quad H_{13} = - \frac{A_{12} z_m}{R}, \quad H_{14} = H_{15} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 H_{22} &= \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R^2} \right) z_m^2 + \left(A_{22} + \frac{B_{22}}{R^2} \right) \frac{n^2}{R^2}, \quad H_{23} = \frac{B_{22}n^3}{R^4} + \frac{A_{22}n}{R^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{nz_m^2}{R^2}, \\
 H_{24} &= \frac{e_{32}n}{R^2} (\beta_{21} + \beta_{12}), \quad H_{25} = \frac{e_{32}n}{R^2} (\beta_{23} + \beta_{14}), \\
 H_{33} &= B_{11}z_m^4 + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{n^2z_m^2}{R^2} + \frac{B_{22}n^4}{R^4} + \frac{A_{22}}{R^2} - q \cdot \left(\frac{Rz_m^2}{2} + \frac{n^2}{R} \right), \\
 H_{34} &= (\beta_{21} + \beta_{12}) \left(e_{31}z_m^2 + \frac{e_{32}n}{R^2} \right), \quad H_{35} = (\beta_{23} + \beta_{14}) \left(e_{31}z_m^2 + \frac{e_{32}n}{R^2} \right), \\
 H_{44} &= -\epsilon_{33}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2), \quad H_{45} = 0, \quad H_{55} = -\epsilon_{33}(\alpha_3^2 + \alpha_4^2).
 \end{aligned}$$

其中

$$a_{ij}^k = \int_{x_{3k-1}}^{x_{3k}} \frac{df_i^k}{dx_3} \frac{df_j^k}{dx_3} dx_3,$$

[M] 为对角矩阵, 其元素为

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = \rho h, \quad M_{44} = M_{55} = 0.$$

由方程(24)的系数矩阵 [H] 各元素的具体表达式可以看出, 压电弹性圆柱壳的动力特性不仅与结构的弹性参数有关, 而且与压电材料的压电常数和介电常数有关。右端项表明不仅机械力可以引起结构的振动, 外加电场也可以引起结构的振动。利用压电材料的这种特性就有可能实现结构的振动控制。

4 压电弹性圆柱壳振动的主动控制

为了改善系统的工作性能, 可以采用闭环控制方法对其进行控制。仍然考虑上节的层合圆柱壳, 基于速度负反馈方法, 本文建立了带压电感测层/激励层的简支封闭圆柱壳的主动控制模型(图 2)。为了抑制系统的振动, 我们采用施加在激励层上的电势作为控制变量。由于感测层的输出电压可由式(20)获得, 因此施加在激励层上的电势可表示成

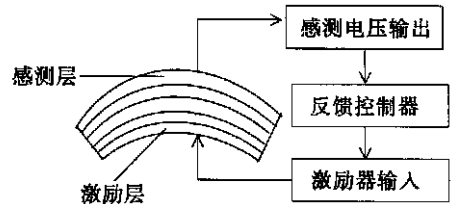


图 2 圆柱壳的主动控制模型

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \kappa \psi = \lambda_i \frac{\partial i \psi}{\partial x_1} + \frac{\lambda_2}{R} \left(\frac{\partial i \psi}{\partial x_2} + i \psi \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 \partial i \psi}{R^2 \partial x_2} - \lambda_i \frac{\partial^2 i \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\lambda_2 \partial^2 i \psi}{R^2 \partial x_2^2} \right) (x_{30}^S + x_{31}^S),
 \end{aligned} \tag{25}$$

其中 κ 为反馈控制的增益, x_{30}^S, x_{31}^S 表示感测层内、外表面在 x_3 方向上的坐标值, 且

$$\lambda_i = \frac{K e_{3i}}{\epsilon_{33}} \cdot (x_{31}^S - x_{30}^S) \quad (i = 1, 2).$$

对于简支圆柱壳, 层合壳的响应和激励可以表达成上节中式(22)、(23)的双傅立叶级数的形式, 只是将其中 $u_{mn} e^{i\omega t}$ 等均改写成类似于 $u_{mn}(t)$ 的表达式。因此, 将(25)式代入(16)~(18)得到如下控制方程:

$$T_{mn} \dot{X}_{mn}(t) + Q_{mn} X_{mn}(t) + K_{mn} X_{mn}(t) = R_{mn}(t), \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}
 X_{mn}(t) &= \left\{ u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} \right\}^T, \quad T_{mn}^{(ij)} = M_{ij} \quad (i, j \leq 3), \\
 R_{mn}(t) &= \left\{ 0, 0, -P_{1mn} \right\}^T, \quad K_{mn}^{(ij)} = H_{ij} \quad (i, j \leq 3),
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_{mn} = \left\{ \begin{array}{c} -e_{31} \Pi_{1A} z_m \\ \frac{e_{32} n}{R} \left(\Pi_{1A} + \frac{\beta_{1A}}{R} \right) \\ \frac{e_{32} \Pi_{1A}}{R} + \left(e_{31} z_m^2 + \frac{n^2}{R^2} e_{32} \right) \beta_{1A} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -\lambda z_m \\ \frac{\lambda_2}{R} n \cdot \left(1 + \frac{x_{30}^S + x_{31}^S}{2R} \right) \\ \frac{\lambda_2}{R} + \frac{1}{2} \left(\lambda_1 z_m^2 + \frac{\lambda_2 n^2}{R^2} \right) \cdot (x_{30}^S + x_{31}^S) \end{array} \right\}^T \cdot$$

式(26)中的矩阵 \mathbf{Q}_{mn} 是反馈增益矩阵, 相当于系统的阻尼阵。由于本文着重研究压电层的压电效应对圆柱壳的控制作用, 因此在此没有考虑系统的阻尼。实际需要时只需在系统的动力方程中加上阻尼项即可。方程(26)可以采用牛顿直接积分法进行求解。假设外激励为谐波函数, 即 $\mathbf{R}_{mn}(t)$ 可以表达为 $\mathbf{R}_{mn} e^{i\omega t}$, 系统的稳态响应也可以表达为 $\mathbf{X}_{mn}(t) = \mathbf{X}_{mn} e^{i\omega t}$, 将该形式的表达代入方程(26)得到

$$(\mathbf{K}_{mn} - \omega^2 \mathbf{T}_{mn} + i\omega \mathbf{Q}_{mn}) \mathbf{X}_{mn} = \mathbf{R}_{mn}, \quad (27)$$

求解上式就可以得到振幅 \mathbf{X}_{mn} 。

5 数值算例

本节对于上述的理论分析进行数值计算。具体数据为: 层数 $N = 6$, 其中弹性结构由4层对称正交铺层的石墨/环氧复合材料组成, 铺设角为 $[0^\circ/90^\circ]_s$, 厚度计为 t_g , 两压电层由 PVDF 薄膜组成, 每层的厚度计为 t_p , 圆柱壳的长度 $L = 10.0 \text{ m}$; 半径 $R = 1.0 \text{ m}$ 。具体的材料参数如下^[15]:

石墨/环氧复合材料:

$$\begin{aligned} E_1 &= 181.0 \text{ GPa}, \quad E_2 = E_3 = 10.3 \text{ GPa}, \quad G_{12} = G_{13} = 7.17 \text{ GPa}, \\ G_{23} &= 3.87 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0.28, \quad \nu_{23} = 0.33, \quad \rho = 1580.0 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

PVDF:

弹性常数(GPa):

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3.61, \quad c_{22} = 3.13, \quad c_{33} = 1.63, \quad c_{12} = 1.61, \quad c_{13} = 1.42, \\ c_{23} &= 1.31, \quad c_{44} = 0.55, \quad c_{55} = 0.59, \quad c_{66} = 0.69. \end{aligned}$$

压电常数(C/m^2):

$$\begin{aligned} e_{31} &= 32.075 \times 10^{-3}, \quad e_{32} = -4.07 \times 10^{-3}, \quad e_{33} = -21.19 \times 10^{-3}, \\ e_{24} &= -12.65 \times 10^{-3}, \quad e_{15} = -15.93 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

介电常数:

$$\epsilon_{11} = 6.1 \epsilon_0, \quad \epsilon_{22} = 7.5 \epsilon_0, \quad \epsilon_{33} = 6.7 \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2.$$

密度:

$$\rho = 1800.0 \text{ kg/m}^3.$$

图3(a)、(b)分别给出了不考虑静水压力时, 外加电压作用下圆柱壳的轴向和径向静变形的分布图, 其中选取 $t_p/t_g = 1$ 。图3的结果表明, 当内外表面的压电层加同向等值的电压时, 圆柱壳几乎不产生变形, 即 ϕ_A 和 ϕ_S 对壳体的作用相互抵消。而当两压电层加反向电压时, 则可以激发壳体的变形。利用这个结果, 可以在压电层上施加合适大小、方向的电压以获得要求的变形。图3(b)中所示端部附近径向位移的剧烈变化主要是由于边界效应引起的, 仅考虑离端部较远处的变形。

为了研究图2所示控制模型的性能, 对于受静水压力的简支圆柱壳在不同增益条件下响

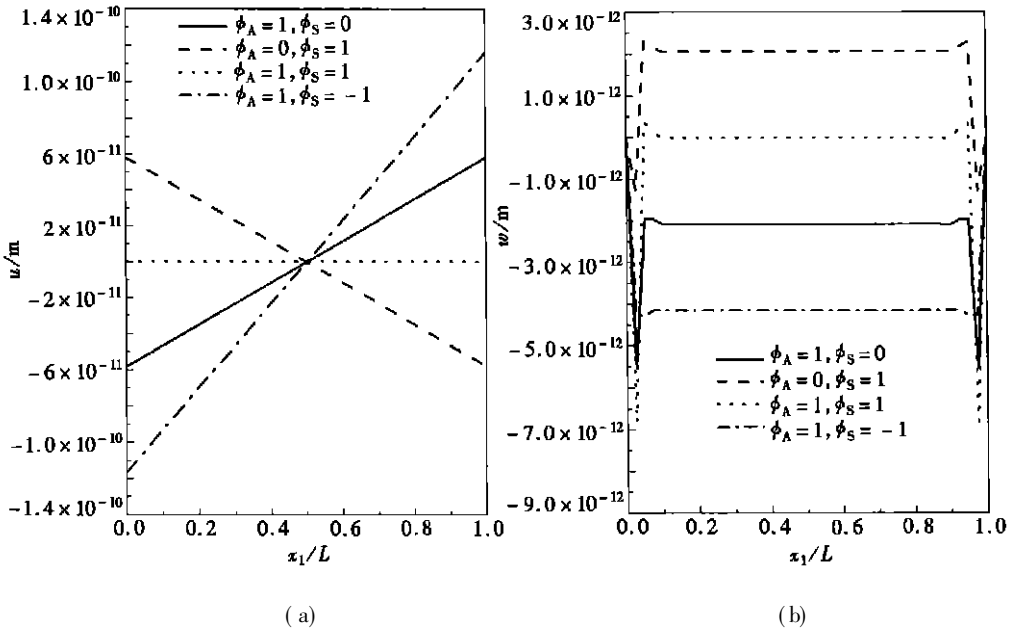


图3 不考虑静水压力时,外加电压作用下(a)圆柱壳的轴向静变形;(b)圆柱壳的径向静变形的分布图 ($t_p/t_g = 1$)

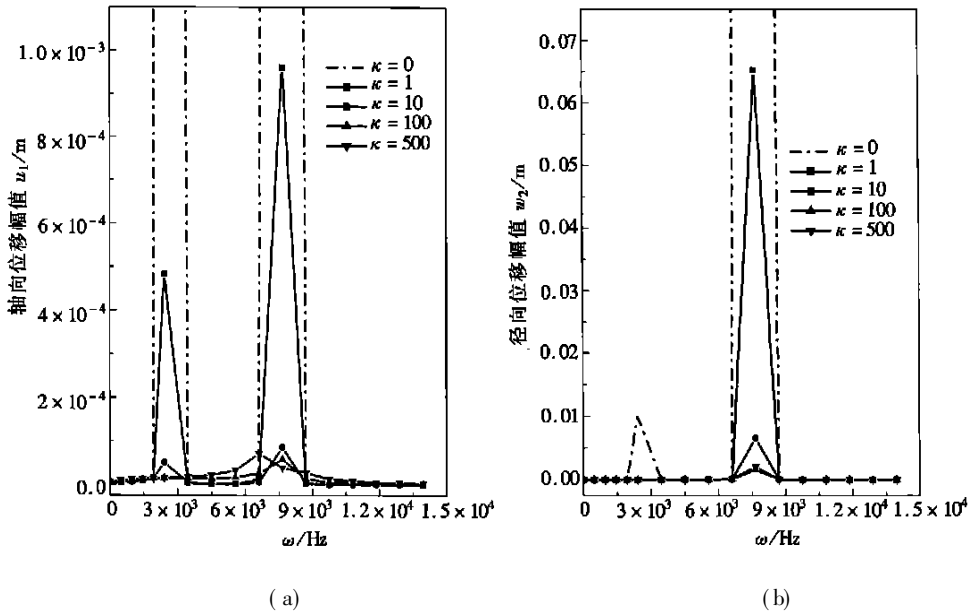


图4 静水压力作用下(a)壳左端 ($x_1 = 0, x_2 = 0$) 的轴向位移幅值 u_1 对于激励频率的变化;(b)壳体中部 ($x_1 = L/2, x_2 = 0$) 的径向位移幅值 w_2 对于激励频率的变化 ($q = 5 \times 10^4 \text{ N}, t_p/t_g = 0.1$)

应相对于径向扰动力的激励频率的变化进行计算,扰动力的幅值为 10^5 N 。由于当静水压力超过一定数值时,圆柱壳将丧失稳定性。因此,研究封闭圆柱壳在静水压力下的振动特性,只有在静水压力不超过临界静水压力 q_{cr} 时才有意义,有关临界静水压力的讨论在文[14]中给出。本文选取 $q = 5 \times 10^4 \text{ N}$, 满足稳定性条件。图4~6分别给出了3种不同厚度比 t_p/t_g 情况下圆

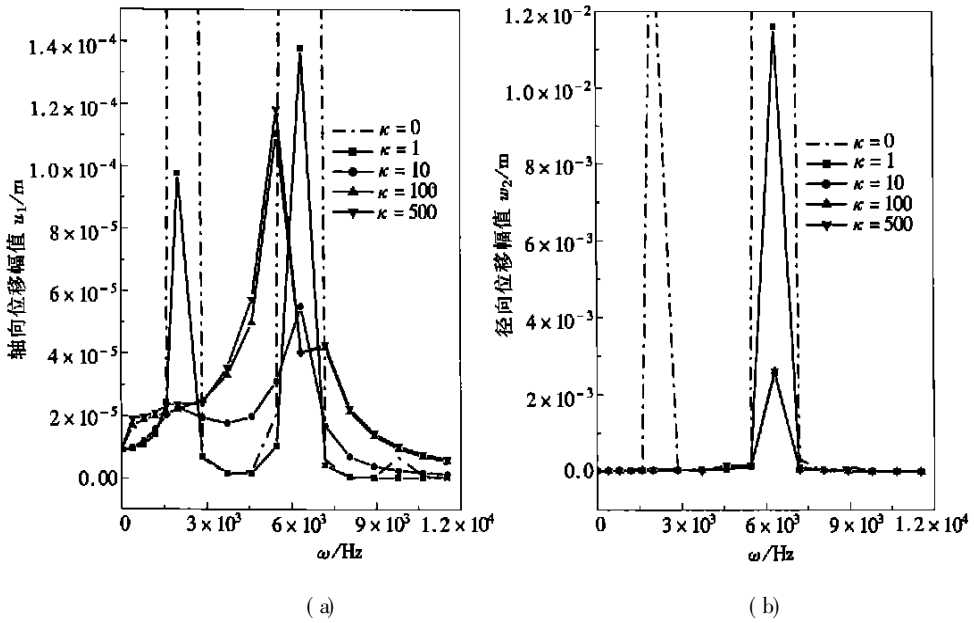


图5 静水压力作用下(a)壳体左端($x_1 = 0, x_2 = 0$)的轴向位移幅值 u_1 对于激励频率的变化; (b) 壳体中部($x_1 = L/2, x_2 = 0$)的径向位移幅值 w_2 对于激励频率的变化 ($q = 5 \times 10^4$ N, $t_p/t_g = 1$)

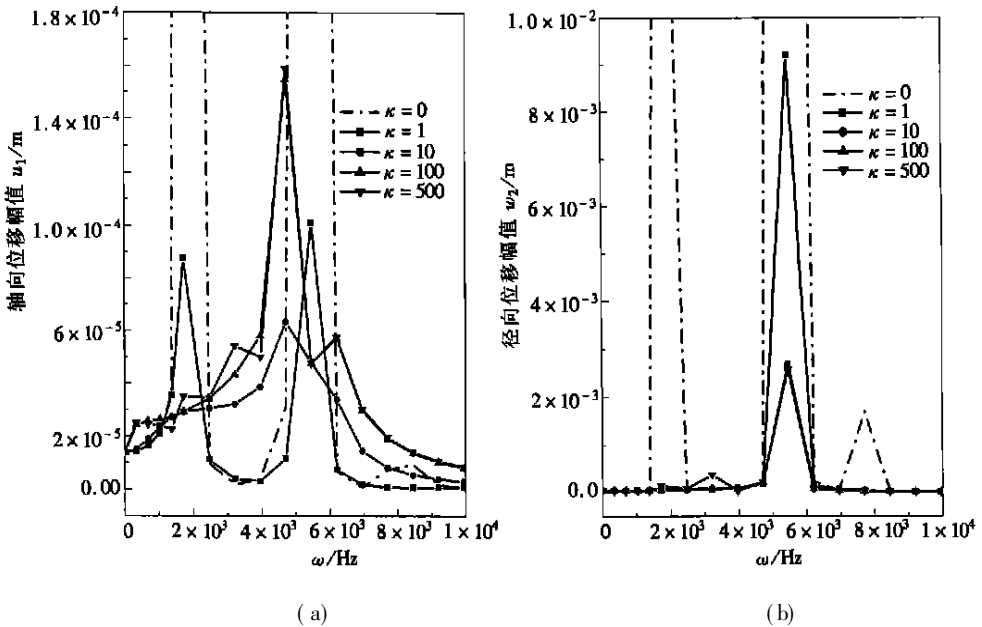


图6 静水压力作用下(a)壳体左端($x_1 = 0, x_2 = 0$)的轴向位移幅值 u_1 对于激励频率的变化; (b) 壳体中部($x_1 = L/2, x_2 = 0$)的径向位移幅值 w_2 对于激励频率的变化 ($q = 5 \times 10^4$ N, $t_p/t_g = 2$)

柱壳的响应图, 其中(a)表示壳体左端的轴向位移幅值 u_1 对于激励频率的变化, (b)表示壳体中部的径向位移幅值 w_2 对于激励频率的变化。图4~6中虚线表示不加控制时壳体的振动情况。可以看出, 在结构发生共振的区域内, 采用速度反馈法可以明显抑制响应的幅值, 并随着

增益 κ 的增大, 响应降低。但在非共振区, 增益对于轴向位移和径向位移的影响不同。对于径向位移而言, 如图 4(b)~6(b), 使用增益控制降低了响应, 但改变很小。轴向位移的情况则比较复杂, 随着 t_p/t_g 的增加, 增益值的增大并非降低了幅值反而可能会激发出系统的某阶自振频率, 使得响应较不加增益时有所升高, 如图 5(a)、6(a) 所示。这表明存在某一特定增益, 可以较好地降低轴向响应的幅值。

6 结 论

对于静水压力下压电弹性层合壳的振动控制进行了研究, 导出了静水压力作用下封闭压电弹性层合壳的动力方程, 并对两端简支条件下的压电弹性圆柱壳的自由振动问题进行了求解, 提出了基于速度反馈控制法的振动控制模型。数值结果表明在静载的情况下, 压电层上施加合适大小、方向的电压可以改变圆柱壳的静变形; 对于系统的动力响应问题, 速度反馈的增益越大, 越能抑制系统在共振区的振动, 这对于有效降低共振给系统造成的危害提供了一个思路。

[参 考 文 献]

- [1] Clinton Y K, Li Y T, Grant P S. A review on the modeling of piezoelectric sensors and actuators incorporated in intelligent structures[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, **9**(1): 3—19.
- [2] Tzou H S. *Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua)* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [3] Baumhauer J C, Tiersten H F. Nonlinear electroelastic equations for small fields superposed on a bias[J]. *J Acoust Soc Amer*, 1973, **54**(4): 1017—1033.
- [4] Pai P F, Nafeh A H, Mook D T. A refined nonlinear model of piezoelectric plate with integrated piezoelectric actuators and sensors[J]. *Internat J Solids Structures*, 1993, **30**(11): 1603—1630.
- [5] Yu Y Y. On the ordinary, generalized, and pseudo-variational equations of motion in nonlinear elasticity, piezoelectricity and classical plate theories[J]. *J Appl Mech*, 1995, **62**(2): 471—478.
- [6] Tzou H S, Bao Y. Nonlinear piezothermoelasticity and multi-field actuations, Part 1: nonlinear anisotropic piezothermoelastic shell laminates[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, **119**(3): 374—381.
- [7] Tzou H S, Zhou Y H. Dynamics and control of nonlinear circular plates with piezoelectric actuators[J]. *J Sound Vibration*, 1995, **188**(2), 189—207.
- [8] Donatus C D, Sergio F, Jorn S H. Stress stiffening effects in laminated beams with piezoelectric actuators[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1998, **9**(2): 137—145.
- [9] Bao Y, Tzou H S, Venkayya V B. Analysis of nonlinear piezothermoelastic laminated beams with electric and temperature effects[J]. *J Sound Vibration*, 1998, **209**(3): 505—518.
- [10] Cheng C Q, Shen Y P. Stability analysis of piezoelectric circular cylindrical shells[J]. *J Appl Mech*, 1997, **64**(4): 847—852.
- [11] Tiersten H F. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations* [M]. New York: Plenum Publishers, 1969.
- [12] Mitchell J A, Reddy J N. A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae[J]. *Internat J Solids Structures*, 1995, **32**(16): 2345—2367.
- [13] Palazotto A N, Dennis S T. *Nonlinear Analysis of Shell Structures* [M]. Washington D C: AIAA Pub,

1992.

- [14] Li H Y, Lin Q R, Liu Z X, et al. Free vibration of piezoelectric laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure[J]. *Internat J Solids Structures*, 2001, **38**(42/43): 7571—7585.
- [15] Shen S P, Kuang Z B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate[J]. *Internat J Solids Structures*, 1999, **36**(13): 1925—1947.

Active Control of the Piezoelectric Laminated Cylindrical Shell's Vibration Under Hydrostatic Pressure

LI Hong_yun, LIN Q_yong, LIU Zheng_xing, WANG Chao

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: The control of the piezoelectric laminated cylindrical shell's vibration under hydrostatic pressure was discussed. From Hamilton's principle nonlinear dynamic equations of the piezoelectric laminated cylindrical shell were derived. Based on which, the dynamic equations of a closed piezoelectric cylindrical shell under hydrostatic pressure are obtained. An analytical solution was presented for the case of vibration of a simply supported piezoelectric laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure. Using velocity feedback control, a model for active vibration control of the laminated cylindrical shell with piezoelectric sensor/actuator is established. Numerical results show that, the static deflection of the cylindrical shell can be changed when voltages with suitable value and direction are applied on the piezoelectric layers. For the dynamic response problem of the system, the larger the gain is, the more the vibration of the system is suppressed in the vicinity of the resonant zone. This presents a potential way to actively reduce the harmful effect of the resonance on the system and verify the feasibility of the active vibration control model.

Key words: piezoelectric; cylindrical shell; vibration control; velocity feedback; hydrostatic pressure; sensor layer; actuator layer