文章编号: 1000_0887(2003)02_0175_10

Musielak_Orlicz 序列空间的一致 Gateaux 可微性

王廷辅, 计东海, 曹连英

(哈尔滨理工大学 数学系, 哈尔滨 150080)

(张石生推荐)

摘要: 利用 Musielak_Orlicz 函数列的某些性质, 给出了赋 Luxemburg 范数的 Musielak_Orlicz 序列空间是有一致 Gateaux 可微性的充要条件及赋 Orlicz 范数的 Musielak_Orlicz 序列空间是弱一致凸的判别准则

关 键 词: Musielak_Orlicz 序列空间; 一致 Gateaux 可微; 弱一致凸
中图分类号: O177.3 文献标识码: A

记 X 为 Banach 空间, $S(X)$、$B(X)$ 分别是 X 的单位球面和单位球, X^*、X^{**} 分别是 X 的一次、二次对偶 若存在函数 $g(\,,\,): S(X) \quad S(X) \quad$ **R** 满足: 对任何 $\;>0, x, y \quad S(X)$ 有 $(\;, x, y) > 0$, 使当 $h < \;(\;, x, y)$ 时

$$\left|(\;\; x, hy \;-\; x\;)/h - g(x, y)\right| < \;,$$

称 X 为 Gataux 可微, 若 $\inf_{y = 1} (\;, x, y) > 0$ 称 X 为 Frechet 可微; 若 $\inf_{x = 1} (\;, x, y) > 0$ 称 X 为一致 Gateaux 可微(UGD); 若 $\inf_{x = y = 1} (\;, x, y) > 0$ 称 X 为一致 F 可微 明显地

F 可微

一致 F 可微 G 可微

一致 G 可微

若 $x, y \quad B(X), \quad x + y \quad = 2$ 蕴涵 $x - y = 0$, 称 X 为严格凸; 若 $x_n, y_n \quad B(X), \quad x_n + y_n \quad 2$ 蕴涵 $x_n - y_n \quad 0$ $(x_n - y_n \overset{w}{} 0, x_n - y_n \overset{w^*}{} 0)$ 称 X 为一致凸(弱一致凸(WUR), 弱*一致凸(W^* UR))

称函数列 $M = (M_1, M_2, M_3, \quad)$ 为 Musielak_Orlicz 函数是指对每一个 i, $M_i: (- \quad, \quad) \quad [0, \quad)$ 满足

收稿日期: 2001_03_27; 修订日期: 2002_09_13;
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10001010); 黑龙江省教委基金资助项目
作者简介: 王廷辅(1933 2001), 男, 大连人, 教授;
计东海(1964), 男, 黑龙江望奎人, 教授, 博士(E_mail: jidonghai@0451.com)

1) M_i 为偶的左连续凸函数;

2) $M_i(0) = 0$, 存在 $u_i > 0$ 使 $M_i(u_i) <$

$N_i(v)$ 为 $M_i(u)$ 的余函数: $N_i(v) = \max\limits_{u>0}\left\{u|v| - M_i(u)\right\}$ 记 $p_i(u)$ 和 $q_i(v)$ 分别为它们的左导函数 记

$$e(i) = \sup\left\{u \quad 0: M_i(u) = 0\right\} \qquad (i = 1, 2, \quad),$$
$$B(i) = \sup\left\{v \quad 0: N_i(v) < \quad\right\} \qquad (i = 1, 2, \quad)$$

称 M 满足 $_2$ 条件是指存在 $k > 0$, $a > 0$, i_0 和 $c_i \quad 0 (i > i_0)$, $\sum\limits_{i>i_0} c_i <$ 满足

$$M_i(2u) \quad kM_i(u) + c_i \qquad (i > i_0, M_i(u) \quad a)$$

实数列 $x = \left\{x(i)\right\}$ 关于 M 的模定义为 $_M(x) = \sum\limits_{i=1} M_i(x(i))$

线性集 $\left\{x = \left\{x(i)\right\}: \text{存在} \quad > 0 \text{ 使 } _M(\ x) < \quad\right\}$ 赋予 Luxemburg 范数

$$x \quad = \inf\left\{ \quad > 0: \ _M(x/ \ ) \quad 1\right\}$$

或赋予 Orlicz 范数

$$x \quad ^{o} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + \quad _M(kx))$$

皆为 Banach 空间, 称之为 Musielak_Orlicz 序列空间, 分别记为 l_M 和 l_M^o 子空间

$$\left\{x = \left\{x(i)\right\}: \quad > 0, \quad i_0 \text{ 使 } \sum_{i>i_0} M_i(\ x(i)) < \quad \right\}$$

继承 l_M 和 l_M^o 的范数, 分别记为 h_M 和 h_M^o 业已证明

$$(h_M)^* = l_N^o, \ (h_M^o)^* = l_N$$

对任意 $0 \quad x \quad l_M^o$, 当且仅当 $k \quad K(x) = [k_x^*, k_x^{**}]$ 时, $x \quad ^o = (1 + \quad _M(kx))/k$, 其中

$$k_x^* = \inf\left\{k > 0: \ _N(p(k|x|)) = \sum_{i=1} N_i(p_i(k|x(i)|)) \quad 1\right\},$$

$$k_x^{**} = \sup\left\{k > 0: \ _N(p(k|x|)) = \sum_{i=1} N_i(p_i(k|x(i)|)) \quad 1\right\}$$

命题 1[1~2] X_ WUR $\quad X^*$_UGD $\quad X^{**}$_W* UR

命题 2 记

$$_i^{\ ,c} = \sup\left\{u > 0: p_i(u) < (1 + c)p_i((1 - \ )u)\right\},$$

对 $\ , c > 0$, 有 $c \ > 0$, 当 $u \quad _i^{\ ,c}/(1 - \ )$ 且 $0 \quad v \quad (1 - 2 \ )u$ 时

$$M_i((u + v)/2) \quad (1 - c \ )(M_i(u) + M_i(v))/2$$

证 鉴于 $M_i(u) + M_i(t) - 2M_i[(u + t)/2]$ 在 $t \quad [0, u]$ 递减,

$$M_i(u) + M_i(v) - 2M_i\left(\frac{u + v}{2}\right) \quad M_i(u) + M_i((1 - 2 \ )u) - 2M_i((1 - \ )u) =$$

$$\int_{(1- \ )u}^{u} p_i(s)\,ds - \int_{(1-2 \ )u}^{(1- \ )u} p_i(s)\,ds = \int_{(1- \ )u}^{u} (p_i(s) - p_i(s - \ u))\,ds$$

$$\int_{(1- \ )u}^{u} (p_i(s) - p_i((1 - \ )s))\,ds \quad \int_{(1- \ )u}^{u} \left(p_i(s) - \frac{1}{1 + c}p_i(s)\right) ds =$$

$$\frac{c}{1 + c}\int_{(1- \ )u}^{u} p_i(s)\,ds = \frac{c}{1 + c}(M_i(u) - M_i((1 - \ )u))$$

$$\frac{c}{1 + c} \ M_i(u) \quad \frac{c}{1 + c}\frac{M_i(u) + M_i(v)}{2},$$

这就得到 $M_i\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad \left(1-\frac{c}{2(1+c)}\right)\frac{M_i(u)+M_i(v)}{2}$，取 $c = c\ /(2(1+c))$，则 c 是个与 i 无关的常数

命题 3[3]　对任何　和　$(0, 1/2]$，存在　$(0, 1)$，当 $M_i[(u+v)/2]\quad[(1-\ )/2](M_i(u)+M_i(v))$ 时，对任何　$[\ , 1-\ ]$ 有

$$M_i(\ u+(1-\ )v)\quad(1-\ )(\ M_i(u)+(1-\ )M_i(v))$$

定理 1　以下说法等价：

l_N 一致 Gateaux 可微；

h^o_M 弱一致凸；

) $N_i(B(i))+N_j(B(j))>1, (i, j=1, 2, \ ; i\quad j)$;

) $p_i(u)$ 在 $[0, \min\left\{q_i(N^{-1}(1)), q_i(B(i))\right\})$ 严格增且如果 $N_i(B(i))<1$ 则 $q_i(B(i))=\ $;

) $N\quad{}_2$;

) 若 $N_{i_0}(B(i_0))\quad 1$，则对任何　>0，存在　>0 使对任何 $i\quad i_0$ 满足 $N_i(p_i(u))$ 的 u，恒有 $N_{i_0}(p_{i_0}(\ ))+N_i(p_i(\ u))>1$;

) 对任何　>0，恒有 $\lim_{c\ 0}\ {}_i\ {}_{i}{}^{,c}p(\ {}_i{}^{,c})=0$ 此处

$$_i{}^{,c}=\sup\Big\{u\quad 0: N_i(p_i(u))\quad 1-\ , up_i(u)\quad 1/\ ,$$
$$p_i(u)\quad(1+c)p_i((1-\ )u)\Big\}\qquad(i=1, 2, \ )$$

证　　，即命题 1

因 WUR 蕴涵严格凸，由[4]Th. 9 即得　)、　) 的必要性　由命题 1，h^o_M 的 WUR 蕴涵 l_N 的 UGD，自然 l_N 更是光滑的，由[5] Th. 3. 1 得到 $N\quad{}_2$

如　) 不真，不妨设有　>0 和 $u_n, N_{i_n}(p_{i_n}(u_n))\qquad$ 及

$$N_1(p_1(n\ ))+N_{i_n}(p_{i_n}(nu_n))\quad 1,$$

这里 $N_1(B(1))\quad 1$　设 $n_0\quad 1/B(1)$，记 ${}_n=\ n/n_0$，则 ${}_n\qquad$ 且

$$N_1(p_1(\ {}_n/B(1)))+N_{i_n}(p_{i_n}(\ {}_n n_0 u_n))\quad 1$$

由条件　) $N_1(B(1))+N_{i_n}(B(i_n))>1$，故当 n 充分大时，有 $\overline{u_n}\quad n_0 u_n$ 满足

$$N_1\left\{p_1[\ {}_n/B(1)]\right\}+N_{i_n}(p_{i_n}(\ {}_n\overline{u_n}))=1$$

令

$$x=\ e_1/B(1),$$

$$x_n=\frac{e_1/B(1)+\overline{u_n}e_{i_n}}{p_1(\ {}_n/B(1))/B(1)+\overline{u_n}p_{i_n}(\ {}_n\overline{u_n})}\qquad(n=1, 2, \ )$$

容易看到　$x\quad{}^o=1$　又记

$$k_n=\ {}_n\left(\frac{1}{B(1)}p_1\left(\frac{\ {}_n}{B(1)}\right)+\overline{u_n}p_{i_n}(\ {}_n\overline{u_n})\right)\qquad(i=1, 2, \ ),$$

则 ${}_N(p(k_n x_n))=1$　故

$$x_n\quad{}^o=\ \sum_i x_n(i)p_i(k_n x_n(i))=1\qquad(n=1, 2, \ )$$

另一方面

$$x + x_n \quad \sum_i (x(i) + x_n(i)) p_i(k_n x_n(i)) =$$

$$\frac{1}{B(1)} p_1\left(\frac{n}{B(1)}\right) + \sum_i x_n(i) p_i(k_n x_n(i)) \quad \frac{1}{B(1)} \lim_u p_i(u) + 1 = 2$$

但是

$$\lim_n (x(1) - x_n(1)) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{p_1(\ n/B(1))/B(1) + \overline{u_n} p_{i_n}(\ n \overline{u_n})}\right) \frac{1}{B(1)}$$

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{1 + N_{i_n}(p_{i_n}(u_n))}\right) \frac{1}{B(1)} \quad \left(1 - \frac{1}{1+}\right) \frac{1}{B(1)} > 0,$$

此与 h_M^o 的 WUR 矛盾

如)不真,则有 > 0, 使 $\sum_i \ _i^{,1/n} p_i(\ _i^{,1/n}) >$ 记 $E_n = \left\{i: \ _i^{,1/n} > 0\right\}$, 则存在 $u_i^n >$ 0 $(i \quad E_n)$ 满足

$$N_i(p_i(u_i^n)) \quad 1 - \ , \ u_i^n p_i(u_i^n) \quad 1/ \ , \ p_i(u_i^n) \quad \left(1 + 1/n\right) p_i((1 - \ ) u_i^n),$$

以及 $\sum_{i \ E_n} u_i^n p_i(u_i^n) \quad (n = 1, 2, \ )$ 以下分两种情况讨论:

情形 :对无穷多个 n, 不妨设对所有 n **N**, 皆有 i_n E_n 满足

$$u_{i_n}^n p_{i_n}(u_{i_n}^n)$$

由条件) 易知 i_n

不妨设 $\lim_n N_{i_n}(p_{i_n}(u_{i_n}^n))$ 存在, 取 $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ 满足

$$N_1(p_1(u_1)) + N_2(p_2(u_2)) + \lim_n N_{i_n}(p_{i_n}(u_{i_n}^n)) = 1$$

由于

$$N_{i_n}(p_{i_n}(u_{i_n}^n)) - N_{i_n}(p_{i_n}((1 - \ ) u_{i_n}^n)) \quad (p_{i_n}(u_{i_n}^n) - p_{i_n}((1 - \ ) u_{i_n}^n)) u_{i_n}^n <$$

$$(1/(1 + n)) u_{i_n}^n p_{i_n}(u_{i_n}^n) \quad 1/((n + 1) \ ) \quad 0 \quad (n \quad),$$

故可取 $v_1^n, s_1^n \quad u_1, v_2^n, s_2^n \quad u_2$, 满足

$$N_1(p_1(v_1^n)) + N_2(p_2(v_2^n)) + N_{i_n}(p_{i_n}(u_{i_n}^n)) = 1,$$

$$N_1(p_1(s_1^n)) + N_2(p_2(s_2^n)) + N_{i_n}(p_{i_n}((1 - \ ) u_{i_n}^n)) = 1$$

令

$$k_n = v_1^n p_1(v_1^n) + v_2^n p_2(v_2^n) + u_{i_n}^n p_{i_n}(u_{i_n}^n),$$

$$h_n = s_1^n p_1(s_1^n) + s_2^n p_2(s_2^n) + (1 - \ ) u_{i_n}^n p_{i_n}((1 - \ ) u_{i_n}^n)$$

则 $\lim h_n \quad \lim k_n \quad (1 + \ )/ \ + u_1 p_1(u_1) + u_2 p_2(u_2) <$ 又

$$\lim_n (k_n - h_n) \quad \lim_n \left(1 - \frac{1 -}{1 + 1/n}\right) u_{i_n}^n p_{i_n}^n(u_{i_n}^n) \quad {}^2$$

置

$$x_n = k_n^{-1}(v_1^n e_1 + v_2^n e_2 + u_{i_n}^n e_{i_n}), \quad y_n = h_n^{-1}(s_1^n e_1 + s_2^n e_2 + (1 - \ ) u_{i_n}^n e_{i_n})$$

则 $_N(p(k_n x_n)) = 1$, $x_n \ ^o = \sum_i x_n(i) p_i(k_n x_n(i)) = 1$ 同理 $y_n \ ^o = 1$ 又

$$x_n + y_n \ ^o \quad \sum_i (x_n(i) + y_n(i)) p_i(k_n x_n(i)) =$$

$$1 + h_n^{-1}(s_1^n p_1(v_1^n) + s_2^n p_2(v_2^n) + (1 - \ ) u_{i_n}^n p_{i_n}(u_{i_n}^n))$$

$$1 + h_n^{-1}(s_1^n p_1(v_1^n) + s_2^n p_2(v_2^n) + (1 - \ ) u_{i_n}^n p_{i_n}((1 - \ ) u_{i_n}^n)) \quad 2,$$

但 $\lim_n (x_n(1) - y_n(1)) = \lim_n (v_1^n / k_n - s_1^n / h_n) = \lim_n (1/k_n - 1/h_n) u_1 \quad 0$, 与 h_M^o 的 WUR 矛盾

情形 ：当 n 充分大时，$u_i^n p_i(u_i^n) <$ $(i$ $E_n)$，取 F_n E_n 满足 $1 - \sum_{i F_n} u_i^n p_i(u_i^n) >$ E。这就得到 $\sum_{i \in F_n} N_i(p_i(u_i^n)) \le 1 - E$。取 $u_1 > 0, u_2 > 0$ 满足

$$N_1(p_1(u_1)) + N_2(p_2(u_2)) + \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in F_n} N_i(p_i(u_i^n)) = 1.$$

以下使用与情形 Ñ 相同证法，也能导出矛盾。ò] ó 证毕。

在证明 ó] ò 之前，先建立一个引理。

引理 在 ó 的条件)、)和)成立时，$2 \ge \|x_n\|^\circ = (1 + Q_M(k_n x_n))/k_n (k_n \to \infty)$ 且 $|x_n(i_0)| \to H > 0\ (i_0 \in \mathbf{N})$，则 $\left\| \sum_{i \ne i_0} x_n(i) e_i \right\|^\circ \to 0\ (n \to \infty)$。

证 不妨设 $i_0 = 1$，$x_n(1) = H > 0$，$\lim_n \left\| \sum_{i \ne 1} x_n(i) e_i \right\|^\circ > 0$。

因 $N \in D_2$ 存在 i_0^c，K_c，$a_c > 0$，$c_i \ge 0 (i > i_0^c)$，$\sum_{i > i_0^c} c_i < \infty$ 满足

$$N_i(2v) \le K_c N_i(v) + c_i \quad (i > i_0^c, N_i(v) \le a_c).$$

取 $i_0 \ge i_0^c$，使 $\sum_{i > i_0} c_i < 1$；取 $a < \min\left\{a_c, H\right\}$ 使 $N_i(p_i(u)) \le a \infty M_i(u) \le 1\ (i = 1, 2, , , i_0)$。由于 $k_n \to \infty$，$|x_n(1)| \to H > 0$，易得 $N_1(B(1)) = \lim_{n \to \infty} N_1(p_1(k_n x_n(x))) \le 1$。由条件)取 $K \ge K_c$，使 $N_i(p_i(u)) > a \infty N_1(p_1(Ka)) + N_i(p_i(Ku)) > 1\ (i \ne 1)$，显然仍有

$$N_i(2v) \le K N_i(v) + c_i \quad (i > i_0, N_i(v) \le a).$$

因

$$M_i(u) + N_i(p_i(u)) = u p_i(u) \le \frac{1}{K} N_i(2p_i(u)) + \frac{1}{K} M_i\left(\frac{K}{2} u\right) \le$$
$$N_i(p_i(u)) + (1/2K) M_i(Ku) + c_i / K,$$

得到 $M_i(Ku) \ge 2K M_i(u) - 2c_i \quad (i \ge i_0, N_i(p_i(u)) \le a)$。

取 k_0 足够大，使 $k_0 \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{i \ne 1} x_n(i) e_i \right\|^\circ - i_0 \ge 3$。由

$$\left\| \sum_{i \ne 1} x_n(i) e_i \right\|^\circ \le \frac{1}{k_0} \left(1 + \sum_{i=2}^{i_0} M_i(k_0 x_n(i)) + \sum_{i > i_0} M_i(k_0 x_n(i)) \right)$$

以及 n 充分大时，

$$N_1(p_1(Ka)) + N_i(p_i(K k_0 x(i))) \le$$
$$N_1(p_1(k_n x_n(1))) + N_i(p_i(k_n x_n(i))) \le Q_N(p(k_n x_n)) \le 1,$$

可知 $N_i(p_i(k_0 x_n(i))) < a\ (i \ne 1)$，故 $M_i(k_0 x_n(i)) \le 1\ (i = 2, 3, , , i_0)$。这就得到

$$k_0 \left\| \sum_{i \ne 1} x_n(i) e_i \right\|^\circ \le 1 + (i_0 - 1) + \sum_{i > i_0} M_i(k_0 x_n(i)),$$

于是 $\sum_{i > i_0} M_i(k_0 x_n(i)) \ge 3$。

因 $k_n \to \infty$，不妨设 $K^{m+1} k_0 \ge k_n > K^m k_0$，此处 $\lim_{n \to \infty} m = \infty$。注意 $N_i(p_i(K^{m-1} k_0 x_n(i))) \le a\ (i \ne 1)$，有

$$2 \ge \|x_n\|^\circ > \frac{1}{k_n} \sum_{i > i_0} M_i(k_n x_n(i)) > \frac{1}{K^{m+1} k_0} \sum_{i > i_0} M(K^m k_0 x_n(i)) >$$

$$\frac{1}{K^{m+1}k_0}\underset{i>i_0}{6}\left[(2K)^m\left(M_i(k_0x_n(i))-\left(1+\frac{1}{2K}+\frac{1}{(2K)^2}+\ ,\right)c_i\right)\right]>$$

$$\frac{1}{K^{m+1}k_0}(2K)^m(3-2)>\frac{2^m}{Kk0}\ y\ ]\qquad(n\ y\ ])\#$$

此为矛盾,故引理成立#

现证明Ó] Ò#

设 $+x_n+^{o}=+y_n+^{o}=1,\ +x_n+y_n+^{o}\ y\ 2\#$

因 $x_n,y_n\ I\ h_M,x_n-y_n\overset{w}{y}0$ 等同于 $x_n-y_n\overset{l_N}{y}0$, 又 $N\ I\ D_2,x_n-y_n\overset{l_N}{y}0$ 等同于 $x_n-y_n\overset{h_N}{y}0$, 而 $x_n-y_n\overset{h_N}{y}0$ 等价于 $x_n(i)-y_n(i)\ y\ 0(i=1,2,\ ,\ )\#$ 下面证明 $x_n(i)-y_n(i)\ y\ 0(i=1,2,\ ,\ )\#$

记 $k_n=k^*_{x_n},h_n=k^*_{y_n}$ 则 $+x_n+^{o}=(1+Q_M(k_nx_n))/k_n,\ +y_n+^{o}=(1+Q_M(h_ny_n))/h_n\#$

由不等式

$$0\ z\ +x_n+^{o}++y_n+^{o}-+x_n+y_n+^{o}\ \backslash$$

$$\frac{1}{k_n}(1+Q_M(k_nx_n))+\frac{1}{h_n}(1+Q_M(h_ny_n))-\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(1+Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)=$$

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(\frac{h_n}{k_n+h_n}Q_M(k_nx_n)+\frac{k_n}{k_n+h_n}Q_M(h_ny_n)-Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)=$$

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\overset{]}{\underset{i=1}{6}}\left(\frac{h_n}{k_n+h_n}M_i(k_nx_n(i))+\frac{k_n}{k_n+h_n}M_i(h_ny_n(i))-\right.$$

$$\left.M_i\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(i)+y_n(i))\right)\right)\ \backslash\ 0,\qquad(1)$$

得
$$\lim_n\left(\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(1+Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)-+x_n+y_n+^{o}\right)=0\#$$

这表明存在 $t_n\ I\ K(x_n+y_n)$, 使 $\lim_n(k_nh_n/(k_n+h_n)-t_n)=0\#$ (注: 如 $k(x_n)=\ $, 即 $+x_n+^{o}=\lim_{k\ y\ ]}(1+Q_M(kx_n))/k$, 则可取 $k_n\ y\ ]$ 满足 $(1+Q_M(k_nx_n))/k_n-1/n<+x_n+^{o}\#$ 于是由

$$0\ z\ +x_n+^{o}++y_n+^{o}-+x_n+y_n+^{o}\ \backslash$$

$$k_n^{-1}(1+Q_M(k_nx_n))+h_n^{-1}(1+Q_M(h_ny_n))-$$

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(1+Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)-\frac{1}{n}=$$

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(\frac{h_n}{k_n+h_n}Q_M(k_nx_n)+\frac{k_n}{k_n+h_n}Q_M(h_ny_n)-\right.$$

$$\left.Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)-\frac{1}{n}\ \backslash\ -\frac{1}{n},$$

仍能得到

$$\lim_n\left(\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left(1+Q_M\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n)\right)\right)-+x_n+y_n+^{o}\right)=0,$$

故也可设 $\lim_n(k_nh_n/(k_n+h_n)-t_n)=0,\ t_n\ I\ K(x_n+y_n)$, 此处 $k_n\ y\ ]\ \#$

无碍于一般性, 以下总设(必要时取子列) $\lim_n k_n$ 和 $\lim_n h_n$ 存在# 又设, 必要时取绝对值, $x_n(i)\ \backslash\ 0,y_n(i)\ \backslash\ 0(i,n=1,2,\ ,\ )\#$

下面分 3 种情况讨论:

情形①: $\lim\limits_{n} k_n = \lim\limits_{n} h_n = \infty$。

若 $\lim\limits_{n} x_n(i) = \lim\limits_{n} y_n(i) = 0\ (i = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n}(x_n(i) - y_n(i)) = 0\ (i = 1, 2, \cdots)$ 自动成立。

现设 $\lim\limits_{n} x_n(1) = H > 0$, 由引理知 $\lim \| \sum_{i \neq 1} x_n(i) e_i \| = 0$。又 $\lim\limits_{n}(x_n(1) - y_n(1)) \geq H$ 且 $\lim\limits_{n} t_n = \lim\limits_{n}[k_n h_n/(k_n + h_n)] = \infty$, 再使用引理得 $\lim \| \sum_{i \neq 1} (x_n(i) + y_n(i)) e_i \| = 0$。由此进一步得到 $\lim \| \sum_{i \neq 1} y_n(i) e_i \| = 0$, 这表明 $\lim\limits_{n} \| x_n(1) e_1 \| = \lim\limits_{n} \| y_n(1) e_1 \| = 1$。显然 $x_n(1) - y_n(1) \to 0$, 而 $x_n(i) \to 0$, $y_n(i) \to 0\ (i \neq 1)$ 是不言而喻的。

情形②: $\lim\limits_{n} k_n < \infty$, $\lim\limits_{n} h_n < \infty$ 即 $\sup\limits_{n}\{k_n, h_n\} = k < \infty$。

由 $\rho_N(p(k_n x_n)) \leq 1$, $\rho_N(p(h_n y_n)) \leq 1$ 可以推得 $k_n x_n(i), h_n y_n(i) \leq \min\{q_i(N^{-1}(1)), q_i(B(i))\}\ (n, i = 1, 2, \cdots)$ 于是从 (1) 式得

$$\frac{h_n}{k_n + h_n} M_i(k_n x_n(i)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_i(h_n y_n(i)) - M_i\left(\frac{k_n h_n}{k_n + h_n}(x_n(i) + y_n(i))\right) \to 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)。 \tag{2}$$

若存在 i_0, $|k_n x_n(i_0) - h_n y_n(i_0)| > \varepsilon_0 > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$M_{i_0}\left(\frac{k_n h_n}{k_n + h_n}(x_n(i_0) + y_n(i_0))\right) \leq (1 - \delta)\left(\frac{h_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(k_n x_n(i_0)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(h_n y_n(i_0))\right),$$

这就使

$$\frac{h_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(k_n x_n(i_0)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(h_n y_n(i_0)) - M_{i_0}\left(\frac{k_n h_n}{k_n + h_n}(x_n(i_0) + y_n(i_0))\right) \geq \delta\left(\frac{h_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(k_n x_n(i_0)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_{i_0}(h_n y_n(i_0))\right) \geq \frac{\delta}{1 + k} M_{i_0}(\varepsilon_0) > 0,$$

此为矛盾。故 $k_n x_n(i) - h_n y_n(i) \to 0\ (i = 1, 2, \cdots)$。

如果 $N_1(p_1(k_n x_n(1))) \to 1$, 结合 $\rho_N(p(k_n x_n)) \leq 1$ 得到 $\sum_{i \neq 1} N_i p_i(k_n x_n(i)) \to 0$ 由此容易得到 $x_n(i) \to 0\ (i = 2, 3, \cdots)$。

由 $N \in \delta_2$, 存在 i_0, $a > 0$, $k > 0$, $c_i \geq 0$ 和 $\sum_{i > i_0} c_i < \infty$ 满足

$$N_i(2v) \leq k N_i(v) + c_i \qquad (i > i_0, N_i(v) < a)。$$

对任何 $\varepsilon > 0$, 先取 i_0 满足 $\sum_{i > i_0} c_i < \varepsilon$, 当 n 充分大时有 $\sum_{i \neq 1} N_i(p_i(k_n x_n(i))) < a$ 且

$$\sum_{i \neq 1} N_i(p_i(k_n x_n(i))) < \varepsilon / k,$$

则

$$\sum_{i > i_0} N_i(2p_i(k_n x_n(i))) \leq \sum_{i > i_0} (k N_i(p_i(k_n x_n(i))) + c_i) < 2\varepsilon。$$

由 $$N_i(2p_i(u)) \geq \int_{p_i(u)}^{2p_i(u)} q_i(s)\,\mathrm{d}s \geq p_i(u) u \geq M_i(u),$$

立得 $\sum_{i>i_0} M_i(k_nx_n(i)) < 2\varepsilon$。从而 n 充分大时 $\sum_{i\neq 1} M_i(k_nx_n(i)) < 3\varepsilon$，即 $\sum_{i\neq 1} M_i(k_nx_n(i)) \to 0$。于是

$$\lim_n \frac{1}{k_n}(1+M_1(k_nx_n(1))) = \lim_n \frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n)) = \lim_n \|x_n\|^{\circ} = 1 \geq$$

$$\lim_n \|x_n(1)e_1\|^{\circ} \geq \lim_n x_n(1)p_1(k_nx_n(1)) = \lim_n \frac{1}{k_n}k_nx_n(1)p_1(k_nx_n(1)) =$$

$$\lim_n \frac{1}{k_n}(N_1(p_1(k_nx_n(1)))+M_1(k_nx_n(1))) = \lim_n \frac{1}{k_n}(1+M_1(k_nx_n(1))),$$

这就得到 $\|x_ne_1\|^{\circ} \to 1$。由于 $\lim_n N_1(p_1(h_ny_n(1))) = \lim_n N_1(p_1(k_nx_n(1))) = 1$，同理 $\|y_ne_1\|^{\circ} \to 1$，从而有 $x_n(1)-y_n(1)\to 0$, $x_n(i)-y_n(i)\to 0\ (i\neq 1)$。故以下常设不存在 i_0 使得，$N_{i_0}(p_{i_0}(k_nx_n(i_0)))\to 1$ 或 $N_{i_0}(p_{i_0}(h_ny_n(i_0)))\to 1$。

由于 $k_nx_n(i)-h_ny_n(i)\to 0$，故只须证 $k_n-h_n\to 0$。现设 $\lim_n(k_n-h_n)>0$ 根据下式

$$k_n-h_n = \rho_M(h_ny_n)-\rho_M(k_nx_n) \leq \sum_{i\in\Omega_n}(M_i(h_ny_n(i))-M_i(k_nx_n(i))),$$

这里 $\Omega_n = \{i: h_ny_n(i) > k_nx_n(i)\}$。我们将证 $\sum_{i\in\Omega_n}(M_i(h_ny_n(i))-M_i(k_nx_n(i)))\to 0$。

对任意的 $\varepsilon>0$，由条件) 存在 $c>0$，使 $\sum_i x_i^{\varepsilon,c}p_i(x_i^{\varepsilon,c})<\varepsilon$。由命题 2，存在 $\alpha>0$，当 $u\geq x_i^{\varepsilon,c}/(1-\varepsilon)$, $0\leq v\leq(1-2\varepsilon)u$ 时

$$M_i((u+v)/2) \leq (1-\alpha)(M_i(u)+M_i(v))/2.$$

由命题 3，存在 $cd>0$，当 $M_i[(u+v)/2]\leq(1-\alpha)\{[M_i(u)+M_i(v)]/2\}$ 且 $\lambda\in[1/(1+k), k/(1+k)]$ 时，

$$M_i(\lambda u+(1-\lambda)v) \leq (1-cd)(\lambda M_i(u)+(1-\lambda)M_i(v)).$$

将 Ω_n 做如下分割：

$$I_n = \{i\in\Omega_n: k_nx_n(i) > (1-2\varepsilon)h_ny_n(i)\};$$

$$J_n = \Big\{i\in\Omega_n: k_nx_n(i)\leq(1-2\varepsilon)h_ny_n(i),\ M_i\Big(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(i)+y_n(i))\Big)\leq$$

$$(1-cd)\Big(\frac{h_n}{k_n+h_n}M_i(k_nx_n(i))+\frac{k_n}{k_n+h_n}M_i(h_ny_n(i))\Big)\Big\};$$

$$H_n = \Omega_n\setminus I_n\setminus J_n;$$

于是首先有

$$\sum_{i\in I_n}(M_i(h_ny_n(i))-M_i(k_nx_n(i))) = \sum_{i\in I_n}\int_{k_nx_n(i)}^{h_ny_n(i)}p_i(s)\,ds \leq$$

$$\sum_{i\in I_n}(h_ny_n(i)-k_nx_n(i))p_i(h_ny_n(i)) \leq$$

$$2\varepsilon\sum_{i\in I_n}h_ny_n(i)p_i(h_ny_n(i)) \leq 2\varepsilon k\|y_n\|^{\circ} = 2\varepsilon k. \tag{3}$$

其次从(1)式

$$0 \leq \sum_{i\in J_n}\Big(\frac{k_n}{k_n+h_n}M_i(h_ny_n(i))+\frac{h_n}{k_n+h_n}M_i(k_nx_n(i))-$$

$$M_i\Big(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(i)+y_n(i))\Big)\Big) \geq$$

$$\sum_{i I J_n} \alpha d\left(\frac{h_n}{k_n + h_n} M_i(k_n x_n(i)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_i(h_n y_n(i))\right) \setminus$$

$$\frac{\alpha d}{1 + k} \underset{i I J_n}{6} \left(M_i(k_n x_n(i)) + M_i(h_n y_n(i))\right),$$

当 n 充分大时有 $\underset{i I J_n}{6}(M_i(k_n x_n(i)) + M_i(h_n y_n(i))) < E$, 更有 $\underset{i I J_n}{6} M_i(h_n y_n(i)) < E$ 故

$$\underset{i I J_n}{6}(M_i(h_n y_n(i)) - M_i(k_n x_n(i))) < E\# \qquad (4)$$

最后, 当 $i\ I\ H_n$ 时, $(1- 2E) h_n y_n(i) \setminus k_n x_n(i)$,

$$M_i\left(\frac{k_n h_n}{k_n + h_n}(x_n(i) + y_n(i))\right) > (1- \alpha d)\left(\frac{h_n}{k_n + h_n} M_i(k_n x_n(i)) + \frac{k_n}{k_n + h_n} M_i(h_n y_n(i))\right)\#$$

由 αd 的取法知

$$M_i\left(\frac{k_n x_n(i) + h_n y_n(i)}{2}\right) > (1- \alpha c)\frac{M_i(k_n x_n(i)) + M_i(h_n y_n(i))}{2}\#$$

由 αc 的取法知 $h_n y_n(i) < X_i^{E\, c}/(1- E)$, 由此推出

$$(k_n x_n(i) + h_n y_n(i))/2 [(1- E) h_n y_n(i) < X_i^{E\, c}\#$$

故

$$\underset{i I H_n}{6}\left(M_i(k_n x_n(i)) + M_i(h_n y_n(i))\right) [\frac{2}{1- \alpha c}\underset{i I H_n}{6} M_i\left(\frac{k_n x_n(i) + h_n y_n(i)}{2}\right) [$$

$$\frac{2}{1- cc}\underset{i I H_n}{6} M_i(X_i^{E\, c}) [\frac{2}{1- \alpha c}\underset{i}{6} x_i^{E,\, c} p_i(X_i^{E\, c}) [\frac{2E}{1- cc} < 4E\# \qquad (5)$$

由(3) ~ (5), 得到 $0 < \lim(k_n - h_n) < (2k + 5)E$, 与 E 的任意性相悖# 故 $\lim\limits_{n y]}(k_n - h_n) = 0\#$

情形 Ó: $\lim\limits_{n y]} k_n =]$, $\lim\limits_{n y]} h_n <]\#$

我们将证明这种情形不可能发生# 由前面讨论, 存在 $t_n\ I\ K[(x_n + y_n)/2]$ 使 $\lim\limits_{n y]}\left[t_n - 2k_n h_n/(k_n + h_n)\right] = 0$, 于是得 $\lim\limits_{n y]} t_n = 2\lim\limits_{n y]} h_n <]\#$ 由 $+ y_n +^{o} = 1$, $+(x_n + y_n)/2 +^{o}\ y\ 1$ 明显地可推出 $+ y_n + (x_n + y_n)/2 +^{o}\ y\ 2\#$ 重复情形 Ò 之讨论, 得到 $\lim\limits_{n y]}(t_n - h_n) = 0$, 由此推出 $\lim\limits_{n y]} h_n = 0$, 这是不可能的# Ó] Ò 证毕#

由此定理, 可以得到 l_M^{o} 弱一致凸的判别准则:

定理 2 l_M^{o} 弱一致凸的充分必要条件是:

) $N_i(B(i)) + N_j(B(j)) > 1$, $(i, j = 1, 2, , ; i\ X\ j)$;

) $p_i(u)$ 在 $\left[0, \min\left\{q_i(N^{-1}(1)), q_i(B(i))\right\}\right]$ 上严格增且如果 $N_i(B(i)) < 1$ 则 $q_i(B(i)) =]$;

) $N\ I\ D_2$;

) $M\ I\ D_2$;

) 若 $N_{i_0}(B(i_0)) [1$ 则对任何 H > 0, 存在 K > 0 使对任何 $i\ X\ i_0$, $N_i(p_i(u)) \setminus H$, 恒有 $N_{i_0}(p_{i_0}(KH)) + N_i(p_i(Ku)) > 1$;

) 对任何 E > 0 恒有 $\lim\limits_{c y 0}\underset{i}{6} x_i^{E,\, c} p(X_i^{E\, c}) = 0$ 此处

$$X_i^{E\, c} = \sup\Big\{u \setminus 0: N_i(p_i(u)) [1- E,\ u p_i(u) [1/E,$$
$$p_i(u) [(1+ c) p_i((1- E) u)\Big\} \qquad (i = 1, 2, ,)\#$$

证明　只须证)的必要性, 若 M I D_2, 取 x I $l^o_M \setminus h^o_M$, 易见 $+[x]_n+$ ° y 1 且 $+x+[x]_n+$ ° y 2, 但明显地 $x-[x]_n$ 不弱收敛于 0, 矛盾# 故 M I D_2#

[参 考 文 献]

[1] Smulian V L. Sur la derivabilite de la norme dans lescape de Banach[J]. C R Acad Sci URBC (Doklady), N S, 1940, **27**(3): 643) 646.

[2] Kaminska A. Rotundity of Orlicz_Musielak sequence space[J]. Bull Acad Polish Sci Math, 1981, **29**(3/4): 137) 144.

[3] WANG Ting_fu, SHI Zhong_rui. On the locally uniformly weak star rotundity of Orlicz space[J]. Revista Math Complutense, 1994, **7**(1): 79) 98.

[4] Kaminske A. Strict convexity of sequence Orlicz_Musielak spaces with Orlicz norm[J]. Journal of Functional Analysis, 1983, **50**(3): 285) 305.

[5] Hudzik Henryk, YE Yi_ning. Support functional and smoothness in Musielak_Orlicz sequence spaces endowed with the Luxemburg norm[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1990, **31**(4): 661) 684.

UGD Property of Musielak_Orlicz Sequence Spaces

WANG Ting_fu, JI Dong_hai, CAO Lian_ying

(Department of Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, P.R.China)

Abstract: By the properties of the Musielak_Orlicz funciton. s sequence, the necessary and sufficient condition for uniform Gateaux differential (UGD) property of Musielak_Orlicz sequence spaces equipped with the Luxemburg norm and a criterion for weakly uniform rotundity of Musielak_Orlicz sequence space with Orlicz norm are given.

Key words: Musielak_Orlicz sequence space; uniform Gateaux differentiability; weakly uniform rotundity