应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 02_0215_06

复杂边界条件下任意变系数微分方程的半解析方法*

黎明安[1], 王忠民[1], 郭志勇[2]

(1. 西安理工大学 工程力学系, 西安 710048; 2. 西安科技学院 基础部, 西安 710054)

(林宗池推荐)

摘要: 利用有限元和矩阵函数的有关理论与变系数等效参数相结合, 提出了一种求解变系数微分方程的解法, 利用它能方便地处理由于各种原因导致其控制方程是变系数的微分方程, 最后通过两个算例, 取得了满意的结果•

关 键 词: 变系数微分方程; 等效参数; 域内解; 半解析解
中图分类号: O241; TH113.1 文献标识码: A

引 言

变系数微分方程在绝大多数情况下无法得到封闭解, 国内外许多学者对此问题作过许多讨论, 如文[1~ 3]等• 本文结合有限元法的基本思想与矩阵函数理论, 基于一种变系数等效参数, 使问题简化为域内的广义特征值与特征向量问题, 通过域内的半解析解来求得整个问题的一般解法, 该方法能方便地处理一类变系数微分方程和变系数微分方程组•

1 等效参数模型

对于动力学系统中, 经常要考虑的问题的控制方程中含有未知参数的广义特征函数和特征向量问题, 为不失一般性, 可用带有未知参数 k 的任意复杂齐次边界条件的变系数高阶微分方程来表示, 即:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(x)\, s^{(i)}(x) + k g(x)\, s(x) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{j} a_k(x)\, s^{(j-k)}(x)\,|_{x=a} = 0, \quad \sum_{k=1}^{j} b_k(x)\, s^{(j-k)}(x)\,|_{x=b} = 0, \tag{2}$$

这里 $p_i(x)\,(i = 1, 2, 3, \cdots)$ 和 $g(x)$ 为方程中的变系数; $s^{(m)}(x)$ 是未知函数 $s(x)$ 的最高阶导数; k 是未知参数时, 其问题属于求解特征值问题; a、b 是系统的两个端点; a_k、$b_k\,(k = 1, 2, \cdots)$ 是给定的以变量为 x 的确定性已知函数; 这里, j 一般小于 m• 对原结构进行有限元离散, 并引进无量纲坐标:

$$\xi_i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{l_i} \qquad \xi_i \in [0, 1], \tag{3}$$

* 收稿日期: 2000_03_29; 修订日期: 2002_05_31
作者简介: 黎明安(1954—), 男, 陕西勉县人, 副教授(E_mail: liminganxian@163.com)•

这里 l_i 是离散单元的长度$(i=1,2,3,\cdots,n)$，将原方程(1)离散，可得第 i 个子域中的控制方程为:

$$p_{1i}(\xi_i)s_i^{(1)}(\xi_i)l_i^{m-1}+p_{2i}(\xi_i)s_i^{(2)}(\xi_i)l^{m-2}+\cdots+p_{mi}(\xi_i)s_i^{(m)}(\xi_i)+g(\xi_i)l_i^m k s_i(\xi_i)=0. \tag{4}$$

在方程(4)中的诸多函数 $p_{1i}(\xi),p_{2i}(\xi),\cdots,g(\xi)$ 中选择一个对微分方程影响较大的函数定为被控函数，一般情况下可取函数变化率较大的函数，根据积分中值定理，由被控函数计算等效参数 ξ_i^*，其公式如下:

$$\xi_i^*=\frac{\int_0^1\xi p(\xi l_i+x_{i-1})\mathrm{d}\xi}{\int_0^1 p(\xi l_i+x_{i-1})\mathrm{d}\xi}, \tag{5}$$

(5)式中，$p(\xi l_i+x_{i-1})$ 是被控函数．按照公式(5)能得到等效参数 ξ_i^*(是第 i 个子域的等效参数)，显然，等效参数 ξ_i 随子域变化，方程(4)可写成:

$$\sum_{j=1}^m p_{ji}(\xi_i^* l_i+x_{i-1})s_i^{(j)}(\xi)+l_i^m k g_i(\xi_i^* l_i+x_{i-1})s_i(\xi)=0. \tag{6}$$

2　子域内的广义特征函数与特征向量问题

将(6)式化为由 m 个一阶微分方程组，并写成如下矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\{\delta_i(\xi)\}=[A_i]\{\delta_i(\xi)\}, \tag{7}$$

式中
$$\{\delta_i(\xi)\}=\left\{s_i(\xi),\frac{\mathrm{d}s_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}^2 s_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{m-1}s_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi^{m-1}}\right\}^{\mathrm{T}}.$$

设(7)式中矩阵 $[A_i]$ 具有 m 个特征值 λ_i 和 m 个线性无关的特征向量 $\{x_i\}$，可记这个子域中的特征值矩阵和对应的特征向量矩阵为(一般情况下为复特征值与复特征向量):

$$[\boldsymbol{\lambda}]=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m],\quad[\boldsymbol{p}]=[\{\boldsymbol{x}_1\},\{\boldsymbol{x}_2\},\cdots,\{\boldsymbol{x}_m\}]. \tag{8}$$

为了研究方便，略去了表示子域的下标 i，根据矩阵论的有关理论可知有:

$$[\boldsymbol{p}]^{-1}[\boldsymbol{A}_i][\boldsymbol{p}]=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]. \tag{9}$$

根据齐线微分方程组(7)的解的结构可以得到第 i 个子域内的解析解为:

$$\{\delta_i(0)\}=[\boldsymbol{p}]\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1\xi},\mathrm{e}^{\lambda_2\xi},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_m\xi}][\boldsymbol{p}]^{-1}\{\boldsymbol{c}\}, \tag{10}$$

这里，$\{\boldsymbol{c}\}$ 是积分常数列阵，令:

$$[\boldsymbol{H}_i]=[\boldsymbol{p}]\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1\xi},\mathrm{e}^{\lambda_2\xi},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_m\xi}][\boldsymbol{p}]^{-1},$$

显然有:

$$\{\delta_i(0)\}=[\boldsymbol{I}]\{\boldsymbol{c}\},\ \{\delta_i(1)\}=[\boldsymbol{H}_i]\{\boldsymbol{c}\}=[\boldsymbol{H}_i]\{\delta_i(0)\}. \tag{11}$$

根据第 i 个子域与第 $i+1$ 个子域的对接条件:$\{\delta_i(1)\}=[\boldsymbol{R}_i]\{\delta_{i+1}(0)\}$，则可得到递推公式为:

$$\{\delta_{i+1}(0)\}=[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\{\delta_i(0)\}, \tag{12}$$

这里 $[\boldsymbol{R}_i]$ 是单元对接矩阵．由此可得:

$$\{\delta_n(0)\}=\left(\prod_{i=n-1}^{1}[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\right)\{\delta_1(0)\}. \tag{13}$$

再根据(12)式，可得全域中两个端点向量的关系为:

$$\{\delta_n(0)\}=[\boldsymbol{H}_n]^{-1}\left(\prod_{i=n-1}^{1}[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\right)\{\delta_1(0)\},$$

或用端点向量表示成:

$$\left\{\delta_n(b)\right\}=[\boldsymbol{H}_n]^{-1}\left(\prod_{i=n-1}^{1}[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\right)\left\{\delta_1(a)\right\},$$

简写为

$$\left\{\delta(b)\right\}=[\boldsymbol{T}]\left\{\delta(a)\right\},$$

其中

$$[\boldsymbol{T}]=[\boldsymbol{H}_n]^{-1}\left(\prod_{i=n-1}^{1}[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\right). \tag{14}$$

利用已知的边界向量条件(2),可以消去非独立元素,最后得到独立的方程组为:

$$[\boldsymbol{T}]^*\left\{\delta\right\}^*=\left\{\boldsymbol{0}\right\}, \tag{15}$$

其中$[\boldsymbol{T}]^*$和$\left\{\delta\right\}^*$是消去了非独立向量后得到的缩减矩阵和缩减边界向量,于是得到系统的特征值问题为:

$$D(k)=\det[\boldsymbol{T}]^*=0, \tag{16}$$

进而可得特征向量问题:

$$\left\{\delta_{i+1}\right\}=[\boldsymbol{R}_i][\boldsymbol{H}_i]\left\{\delta_i\right\}. \tag{17}$$

3 算　　例

例 1　求正定变系数微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2(y)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x^2}y=0 \qquad x\in[1,2]$$

满足边界条件:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=0.866\ 026,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=2}=0.705\ 029$$

的解. 该方程有精确解为:

$$y(x)=x^{1/2}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right].$$

根据本文方法,从所给的问题的广义函数$p(x)=1$, $g(x)=1/x^2$中选择$g(x)$作为被控函数,根据(5)式可得等效参数为:

$$\xi_i^*=\frac{-1/(l_i+x_{i-1})+(1/l_i)\ln((l_i+x_{i-1})/x_{i-1})}{-1/(l_i+x_{i-1})+1/x_{i-1}}.$$

将原方程离散成一阶微分方程组后可得到对应(7)式的系数矩阵为:

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -g(\xi^*) & 0\end{bmatrix} \qquad g(\xi_i^*)=\frac{l_i^2}{(\xi_i^* l_i+x_{i-1})^2},$$

进一步可求得子域中所对应的复特征值与复特征向量为:

$$[\lambda]=\mathrm{diag}[\mathrm{j}k_i,\ -\mathrm{j}k_i] \qquad \mathrm{j}=\sqrt{-1},$$

$$[\boldsymbol{p}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{j}k_i & -\mathrm{j}k_i\end{bmatrix} \qquad k_i=\frac{l_i^2}{(l_i\xi_i^*+x_{i-1})^2},$$

$$[\boldsymbol{H}_i]=[\boldsymbol{p}]\,\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}\quad \mathrm{e}^{\lambda_2\xi}][\boldsymbol{p}]^{-1}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_i}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_i} & (\mathrm{j}/k_i)(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_i}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_i})\\ \mathrm{j}k_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_i}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_i}) & (\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_i}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_i})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos k_i & (1/k_i)\sin k_i\\ -k_i\sin k_i & \cos k_i\end{bmatrix},$$

连接矩阵为: $[\boldsymbol{R}_i] = \mathrm{diag}[1 \quad 1]$•

根据(17)式,可得其本文解与精确解之间的误差情况(表1、表2)•

例2 非均匀梁的横向振动问题的动力学方程为:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}^2 s(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) + kg(x)s(x) = 0,$$

其中

$$p(x) = A_0(1.0 - 0.436x)^{3.6}, \quad g(x) = B_0 l^4 (1.0 - 0.436x)^{1.6},$$

这里, A_0、B_0 为常数, l 是梁的长度,约束条件为一端固定一端自由• 取 $p(x)$ 为被控函数,可得对应的第 i 个子域的控制方程为:

$$p(\xi^* l_i + x_{i-1})s^4(\xi) + l^4 kg(\xi^* l_i + x_{i-1}) = 0,$$

可得系数矩阵为:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad k_i = \frac{l^4 kg(\xi^* l_i + x_i)}{p(\xi^* l_i + x_{i-1})},$$

对应的复特征值与复特征向量为:

$$[\lambda] = \mathrm{diag}\left[k_i \quad -k_i \quad k_i \mathrm{j} \quad -k_i \mathrm{j}\right],$$

$$[\boldsymbol{p}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_i & -k_i & k_i \mathrm{j} & -k_i \mathrm{j} \\ k_i^2 & k_i^2 & -k_i^2 & k_i^2 \\ k_i^3 & -k_i^3 & -k_i^3 \mathrm{j} & k_i^3 \mathrm{j} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{H}] = [\boldsymbol{p}]^{-1}[\lambda][\boldsymbol{p}] = \begin{bmatrix} s & t/k_i & u/k_i^2 & v/k_i^3 \\ k_i v & s & t/k_i & u/k_i^2 \\ k_i^2 u & k_i v & s & t/k_i \\ k_i^3 t & k_i^2 u & k_i v & s \end{bmatrix},$$

其中: s, t, u, v 是克雷落夫函数,即

$$s = (\mathrm{ch}k_i + \cos k_i)/2, \quad t = (\mathrm{sh}k_i + \sin k_i)/2,$$

$$u = (\mathrm{ch}k_i - \cos k_i)/2, \quad v = (\mathrm{ch}k_i - \cos k_i)/2\text{•}$$

在等分段情况下,对应的连接矩阵为:

$$[\boldsymbol{R}_i] = \mathrm{diag}\left[1 \quad 1 \quad \frac{p_i(\xi^*)}{p_{i+1}(\xi^*)} \quad \frac{p_i(\xi^*)}{p_{i+1}(\xi^*)}\right],$$

其特征值问题求解结果并与 Bessel 解的比较如表3•

4 结 论

通过非均匀参数的计算可知,分段数越多,非均匀参数越接近1/2,但当分段数较少的情况下,非均匀参数偏离1/2的量较大,同时引起的误差越大,这是对文献[4]直接取1/2的一种修正•

表 1　例 1 中各段的非均匀参数值

参数 / 分段数	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
$N=2$	0.433	0.452								
$N=3$	0.452	0.463	0.470							
$N=5$	0.470	0.474	0.477	0.480	0.482					
$N=10$	0.485	0.485	0.486	0.487	0.488	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490

表 2　本文解与精确解比较

x		1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	$n=5$	-4.65×10^{-4}	0.165 6	0.335 8	0.496 4	0.649 6	0.794 7
	$n=10$	-1.95×10^{-5}	0.171 1	0.338 5	0.499 6	0.652 8	0.797 8
	$n=15$	-5.36×10^{-6}	0.171 6	0.339 4	0.500 3	0.653 4	0.798 4
	$n=20$	-2.99×10^{-7}	0.172 0	0.339 8	0.500 6	0.653 6	0.798 7
	精确解	0.00	0.172 2	0.339 9	0.500 6	0.653 8	0.798 9
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$n=5$	0.866 03	0.852 4	0.822 3	0.785 0	0.745 2	0.705 0
	$n=10$	0.866 03	0.852 5	0.822 5	0.785 1	0.745 3	0.705 0
	$n=15$	0.866 03	0.852 5	0.822 5	0.785 2	0.745 3	0.705 0
	$n=20$	0.866 03	0.852 5	0.822 5	0.785 2	0.745 3	0.705 0
	精确解	0.866 03	0.852 5	0.822 5	0.785 2	0.745 3	0.705 0

表 3　取不同的 n 数计算的前 8 阶固有频率 $\omega_i = f_i^2(1/l^2)\sqrt{I_0E_0/\mu_0}$

频率 f_i / 分段	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
$n=2$	1.935	4.205	7.002	9.635	12.694	15.177	18.101	20.756
$n=4$	2.009	4.344	6.595	9.601	12.450	15.160	17.888	20.601
$n=5$	2.019	4.366	6.995	9.670	12.329	15.225	17.912	20.649
Bessel	2.06	4.40	7.06	9.80	12.50			

由于采用了非均匀控制参数, 即使采用较少的单元, 也能得到较满意的结果, 显然, 应用非均匀控制参数也可控制误差情况•

对于阶梯形结构的梁或柱以及分段常系数微分方程, 本文方法是精确解法•

[参 考 文 献]

[1] Lee S Y, Ke H. Free vibration of a non_uniform beam with general elastically restrained boundary condition[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, **136**(3): 425—437.

[2] 纪振义, 叶开沅. 一个高精度收敛的变系数微分方程精确解析法[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(3): 189—194.

[3] 纪振义, 叶开沅. 非均匀变截面梁动力响应的一般解[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(5): 381—388.

[4] 纪振义, 叶开沅. 任意变系数微分方程的精确解析法[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(10): 841—852.

[5] Gup Ta A K. Vibration of tapered beams[J]. Journal of Structural Engineering, 1985, **111**(1): 19—36.

[6] Ganga Rao H V S, Spyrakos C C. Closed form series solutions of boundary value problems with variable properties[J]. Computers and Structures, 1986, **23**(2): 211—215.

[7] 黎明安, 黄玉美, 方同. 复杂边界条件下的非均匀梁的固有模态算法[J]. 振动与冲击, 1996, **15**(2): 53—61.

A Semi_Analysis Method of Differential Equations With Variable Coefficients Under Complicated Boundary Conditions

LI Ming_an[1], WANG Zhong_min[1], GUO Zhi_yong[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P. R. China, 2. Department of Basic Course, Xi'an Institute of Technology, Xi'an 710054, P. R. China)

Abstract: Based on a method of finite element model and combined with matrix theory, a method for solving differential equations with variable coefficients is proposed. With that method, it is easy to deal with the differential equations with variable coefficients. On most occasions, due to the non_uniformity nature, non_linearity property can cause the kind equations. Using that model, the satisfactory valuable results with only a few units can be obtained.

Key words: differential equation with variable coefficients; equivalent parameter; solution in the domain; solution of semi_analysis