

文章编号: 1000-0887(2003) 01-0012-07

含有界面裂纹的粘弹性层合板应变能释放率的计算*

刘玉岚, 王 彪, 王殿富

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 将裂纹扩展所对应的能量释放率定义为同一时刻, 同样载荷条件下两种状态的 能量之差 一是裂纹长度为 a 时, 系统内能, 第二状态是指裂纹长度为 $a + \Delta a$ 时系统内能. 这样, 所定义的能量释放率相当于在无限短时间内, 裂纹从 a 扩展到 $a + \Delta a$ 所释放的能量. 通过计算发现, 对于给定的加载历史, 应变能释放率是时间的函数, 它的最大值相对应于层间开裂临界状态. 在 William 工作的基础上, 根据经典梁的理论求得双悬臂梁结构的应变能释放率的显函数表达式.

关键词: 层合板; 粘弹性模型; 脱层分析

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

一般来说, 即使在一维静态载荷作用下, 粘弹性材料中的裂纹也会以某一速度扩展, 这样, 最关键的问题是如何能够求得裂纹扩展的动力——能量释放率.

控制含有粘弹性层的复合材料层合板的脱层条件在工程实际中非常重要. 例如, 在塑料封装集成电路结构中, 硅芯片与粘弹性树脂的界面在热应力作用下脱胶是结构破坏的重要模式^[1,2]. 在过去二十多年中, 对于各向同性粘弹性介质中裂纹扩展问题, 人们进行了大量的研究工作^[2-10]. 许多理论模型基于 Griffith 的能量释放率准则. 一般来说, 对于裂纹扩展这样移动边界问题, 用来建立弹性解同粘弹性解之间关系的对应性原理是不适用的^[11]. 这就限制了人们求得应力及应变场的分布, 尤其对于含有粘弹性层的界面裂纹就更加困难^[12,13].

求解粘弹性材料中裂纹扩展的能量释放率的主要困难在于, 即使施加载荷是静态的, 裂纹也会以某一未知速度扩展. 在本文中, 我们将裂纹扩展的应变能释放率定义为, 在某一给定时刻, 两个状态之间的能量差. 其中一个状态是指裂纹长度为 a , 另一个状态是指裂纹长度为 $a + \Delta a$, 这样, 应变能释放率相应于裂纹长度从 a 突然增加为 $a + \Delta a$ 时, 所释放的能量. 可以发现, 对于给定的加载历史, 应变能释放率是时间的函数, 它的最大值相应于脱层扩展的临界状态. 基于这样的能量释放率定义, 由于摆脱了裂纹速度的影响, 可以很容易求得. 根据 William 的工作^[14], 相应于测量界面断裂韧性的许多结构的能量释放率都可以得到其解析表达

* 收稿日期: 2001_09_27; 修订日期: 2002_08_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50232030, 10172030); 黑龙江省自然科学基金资助项目

作者简介: 刘玉岚(1962—), 吉林人, 博士(E-mail: myliu51@hotmail.com).

式。这样,我们可以采用一些标准的方法测量粘弹性层合板间开裂的能量释放率的临界值。

1 一般理论

众所周知,变形的粘弹性材料会储存一定的能量,同时,在一给定的加载历史中,它又会耗掉一部分能量。仅仅这部分储存的能量在裂纹扩展中可以释放出来。在本文中,基于本构方程,储存的及耗散的能量将被表示成简单的形式。

为了化简,在本文中,我们主要考虑小应变及小位移的情形。经典的线性粘弹性本构方程可以写成如下形式^{[4], [15]}

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t r_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau), \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t) = \int_0^t f_{ijkl}(t-\tau) d\sigma_{kl}(\tau), \quad (2)$$

式中, 0^- 表示起点于加载前,函数 $r_{ijkl}(t)$ (松弛函数) 及 $f_{ijkl}(t)$ (蠕变函数) 是四阶张量。而且它们具有与线弹性材料模量相同的对称关系。等式(1), (2) 也包含了应变历史或应力历史在 $t = 0$ 时刻有一不连续跳跃的情况。如果我们将积分下限选为0而不是 0^- , 这样,等式(1), (2) 均相应于连续加载历史本构方程。

对于给定的本构方程,在时刻 t 时,单位体积中所储存的弹性能可以表示成^[15]

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t r_{ijkl}(2t-u-v) d\varepsilon_{ij}(u) d\varepsilon_{kl}(v) = \\ \sigma_{ij}(t) \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t f_{ijkl}(2t-u-v) d\sigma_{ij}(u) d\sigma_{kl}(v). \quad (3)$$

能量密度的释放率可以写成

$$D(t) = - \int_0^t \int_0^t \dot{r}_{ijkl}(2t-u-v) d\varepsilon_{ij}(u) d\varepsilon_{kl}(v) = \\ \int_0^t \int_0^t \dot{f}_{ijkl}(2t-u-v) d\sigma_{ij}(u) d\sigma_{kl}(v) \geq 0, \quad (4)$$

式中, $\dot{r}_{ijkl}(2t-u-v)$, $\dot{f}_{ijkl}(2t-u-v)$ 是关于时间的导数。这样,如果我们能够求得相应于某一加载历史的应变及应力场,储存的能量及耗散的能量可以由方程(3), (4) 确定。

依据 William^[14] 关于弹性层合板脱层方面的工作,我们选取如图1所示的脱层,其中上、下层均为粘弹性薄板,宽度为 B , 厚度为 H 。在宽度方面,载荷是均匀的。如果考虑在脱层根部上、下表面所受的弯矩为 $M_1(t)$, $M_2(t)$ 。假定在某一载荷作用下,裂纹尖端突然从 AB 处扩展至 CD 处,应变能释放率可以表示成如下形式。

$$G = \frac{1}{B} \left[\frac{dU_e}{da} - \frac{dU_s}{da} \right], \quad (5)$$

式中, U_s 是试件中储存的能量, U_e 是外力所做的功。

对于纯弯曲情况下的线弹性梁,应变、应力及挠度方程可以表示成,

$$\varepsilon(y) = - \frac{My}{EI}, \quad \sigma(y) = - \frac{My}{I}, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}, \quad (6 \sim 8)$$

式中, E 是轴向弹性模量, ϕ 是横截面的转角, I 是二阶截面力矩,对于矩形梁,可以得到,

$$I = \int_{-h}^h BH^2 dH = \frac{2}{3} Bh^3, \quad (9)$$

式中 B 及 $2h$ 是矩形截面的宽度及高度。

在本文中,我们将利用弹性-粘弹性对应原理,得到粘弹性情况下的(6),(7),(8)式,并进而求得应变能释放率:

1) 用 Laplace 变换量 $sE(s)$ 代替弹性模量 E ,可以得到关于 Laplace 变换量的方程如下,

$$\varepsilon(y, s) = -\frac{\gamma}{I} \cdot \frac{M}{sE(s)}, \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{I} \cdot \frac{M}{sE(s)} \quad (10)$$

2) 取方程(10)式的 Laplace 逆变换,可以得到粘弹性梁的应变及转角如下,

$$\varepsilon(y, t) = -\frac{\gamma}{I} \int_{-\infty}^t f(t-\tau) \frac{dM(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^t f(t-\tau) \frac{dM(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (11)$$

式中 $f(t-\tau)$ 是前边定义过的蠕变函数。

如果初始时裂纹尖端取在 AB 横断面 O 点,扩展到 CD 断面 O' 点(图1),我们可以取 CD 断面的初始转角为 ϕ_0 , AB 断面的初始转角为 $\phi_0 + (d\phi_0/da) \delta a$ 。当裂纹尖端由 O 移到处 O' 时, AB 下上、下梁断面的转角改变量为,

$$\left[\frac{d\phi_1}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] \delta a, \quad \left[\frac{d\phi_2}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] \delta a, \quad (12)$$

当裂纹由 O 点扩展至 O' 点处,外载所做的功为,

$$\delta U_e = M_1(t) \left[\frac{d\phi_1}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] \delta a + M_2(t) \left[\frac{d\phi_2}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] \delta a. \quad (13)$$

这样,我们可以得到,

$$\begin{aligned} \frac{dU_e}{da} &= M_1(t) \left[\frac{d\phi_1}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] + M_2(t) \left[\frac{d\phi_2}{da} - \frac{d\phi_0}{da} \right] = \\ &M_1(t) \left[\frac{1}{I_1} \int_{-\infty}^t f_1(t-\tau) \frac{dM_1(\tau)}{d\tau} d\tau - \frac{1}{I} \int_{-\infty}^t f(t-\tau) \frac{dM(\tau)}{d\tau} d\tau \right] + \\ &M_2(t) \left[\frac{1}{I_2} \int_{-\infty}^t f_2(t-\tau) \frac{dM_2(\tau)}{d\tau} d\tau - \frac{1}{I} \int_{-\infty}^t f(t-\tau) \frac{dM(\tau)}{d\tau} d\tau \right], \quad (14) \end{aligned}$$

式中,下标 1 及 2 指相应于上、下梁的量, I, M 及 f 是复合材料梁的等量。当裂纹扩展到 δa 时,储存的弹性能的变化也即是当裂纹扩展到 δa 时,上、下梁在 $M_1(t), M_2(t)$ 作用下所储存的弹性能的变化。同样长度的复合材料梁所承受的弯矩 $M(t)$ 为,

$$M(t) = M_1(t) + M_2(t). \quad (15)$$

所储存的能量可以由下式计算,

$$\begin{aligned} \frac{dU_s}{da} &= -\frac{B}{2I} \int_{-h/2}^{h/2} dy \left[\int_0^t \int_0^t r(2t-u-v) \frac{d\varepsilon(u)}{du} \frac{d\varepsilon(v)}{dv} du dv \right] + \\ &\frac{B}{2I_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} dy \left[\int_0^t \int_0^t r_1(2t-u-v) \frac{d\varepsilon_1(u)}{du} \frac{d\varepsilon_1(v)}{dv} du dv \right] + \\ &\frac{B}{2I_2} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} dy \left[\int_0^t \int_0^t r_2(2t-u-v) \frac{d\varepsilon_2(u)}{du} \frac{d\varepsilon_2(v)}{dv} du dv \right], \quad (16) \end{aligned}$$

式中, $r_1(t-\tau), r_2(t-\tau), r(t-\tau)$ 分别是下、上及复合材料梁的蠕变函数, $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon(t)$ 是在力矩 $M_1(t), M_2(t), M(t)$ 的作用下的得到的应变场。在导出(16)式时,我们假设裂纹从 O 处突然扩展到 O' 处。将等式(14)及(16)代入(5)式中,可以求得层间裂纹在粘弹性层合板中扩展的能量释放率。

1) $M(t) = M_0H(t), M_1(t) = M_{01}H(t), M_2(t) = M_{02}H(t),$

式中, $H(t)$ 是 Heaviside 阶梯函数。在这样的加载条件下, 应变及转角可以表示成如下形式,

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = -\frac{y}{I}M_0f(t), & \varepsilon_1(t) = -\frac{y}{I_1}M_{01}f_1(t), & \varepsilon_2(t) = -\frac{y}{I_2}M_{02}f_2(t), \\ \frac{d\phi}{da} = \frac{1}{I}M_0f'(t), & \frac{d\phi_1}{da} = \frac{1}{I_1}M_{01}f_1'(t), & \frac{d\phi_2}{da} = \frac{1}{I_2}M_{02}f_2'(t). \end{cases} \quad (17)$$

将(17)式代入(14)及(16)式中, 并进一步代入(5)式中可以求得,

$$\begin{aligned} G = & \frac{M_0H(t)}{B} \left[\frac{1}{I_1}M_{01}f_1 - \frac{1}{I}M_0f \right] + \frac{M_{02}H(t)}{B} \left[\frac{1}{I_2}M_{02}f_2 - \frac{1}{I}M_0f \right] + \\ & \frac{M_0^2}{2BI} \int_0^a \int_0^a r(2t-u-v)f'(u)f'(v) dudv - \\ & \frac{M_{01}^2}{2BI_1} \int_0^a \int_0^a r_1(2t-u-v)f_1'(u)f_1'(v) dudv - \\ & \frac{M_{02}^2}{2BI_2} \int_0^a \int_0^a r_2(2t-u-v)f_2'(u)f_2'(v) dudv. \end{aligned} \quad (18)$$

根据(18)式, 如果我们知道梁的本构关系并且知道裂尖处所作用的弯矩, 可以很容易求得其能量释放率。

$$2) M(t) = M_0t, M_1 = M_{01}t, M_2 = M_{02}t.$$

对于这样的线性增加载荷, 应变及转角如下式给出,

$$\varepsilon = -\frac{M_0y}{I} \int_0^t f(t-\tau) d\tau = -\frac{M_0y}{I} J(t), \quad (19)$$

$$\frac{d\phi}{da} = \frac{M_0}{I} \int_0^t f(t-\tau) d\tau = \frac{M_0}{I} J(t). \quad (20)$$

这样, 可以求得能量释放率,

$$\begin{aligned} G = & \frac{M_0t}{B} \left[\frac{1}{I_1}M_{01}J_1(t) - \frac{1}{I}M_0J(t) \right] + \frac{M_{02}t}{B} \left[\frac{1}{I_2}M_{02}J_2(t) - \frac{1}{I}M_0J(t) \right] + \\ & \frac{M_0^2}{2BI} \int_0^a \int_0^a r(2t-u-v)J'(u)J'(v) dudv - \\ & \frac{M_{01}^2}{2BI_1} \int_0^a \int_0^a r_1(2t-u-v)J_1'(u)J_1'(v) dudv - \\ & \frac{M_{02}^2}{2BI_2} \int_0^a \int_0^a r_2(2t-u-v)J_2'(u)J_2'(v) dudv. \end{aligned} \quad (21)$$

等式(18)及(21)式可以用来粘弹性梁的应变能释放率, 可以看出, 它仅与裂尖处弯矩相关, 梁的其他部分并不重要。在下文中, 我们将主要针对双悬臂梁的实验结果导出应变能释放率的解析表达式。

2 例子

最常用的I型界面裂纹断裂韧性的测试方案如图2所示, 其中, 上面梁假设为粘弹性, 下面梁为纯弹性, 对于对称载荷, 我们有, $M_2 = -M_1 = pa$, 上梁的蠕变函数可以取为

$$f_1(t) = f_{01}(1 - e^{-t/t_1})H(t), \quad (22)$$

$$\text{因为} \quad \int_0^t f(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t r(t-\tau)f(\tau)d\tau = t. \quad (23)$$

可以得到

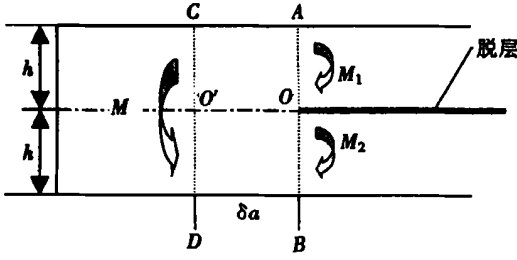


图1 复合材料层合板脱层几何

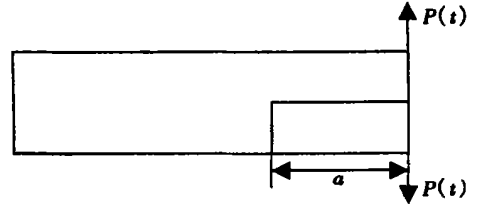


图2 双悬臂梁实验结构

$$r_1(t) = \frac{1}{f_{01}} + \frac{t_1}{f_{01}} \delta(t), \tag{24}$$

下面梁是弹性材料, 因此

$$r_2 = E_2, f_2 = 1/E_2, \tag{25}$$

根据混合率, 可以得到复合材料梁的松弛函数如下:

$$r = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{2} \left(E_2 + \frac{1}{f_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{t_1}{f_{01}} \delta(t), \tag{26}$$

$$f(t) = f_0(1 - e^{-t/t'})H(t), \tag{27}$$

式中 $f_0 = \frac{2f_{01}}{1 + E_2f_{01}}, t' = \frac{t_1}{1 + E_2f_{01}}.$ (28)

对于这样的层合板结构, 等式(18)式成为:

$$\begin{aligned} G = & \frac{M_{01}H(t)}{B} \left[\frac{1}{I_1}M_{01}f_1 - \frac{1}{I}M_0f \right] + \frac{M_{02}H(t)}{B} \left[\frac{1}{I_2}M_{02}f_2 - \frac{1}{I}M_0f \right] + \\ & \frac{M_0^2}{2BI} \int_0^t \int_0^t r(2t - u - v)f'(u)f'(v) du dv - \\ & \frac{M_{01}^2}{2BI_1} \int_0^t \int_0^t r_1(2t - u - v)f'_1(u)f'_1(v) du dv - \frac{M_{02}^2}{2BE_2I_2}. \end{aligned} \tag{29}$$

等式(21)成为,

$$\begin{aligned} G = & \frac{M_{01}t}{B} \left[\frac{1}{I_1}M_{01}J_1(t) - \frac{1}{I}M_0J(t) \right] + \frac{M_{02}t}{B} \left[\frac{1}{I_2}M_{02}J_2(t) - \frac{1}{I}M_0J(t) \right] + \\ & \frac{M_0^2}{2BI} \int_0^t \int_0^t r(2t - u - v)J(u)J(v) du dv - \\ & \frac{M_{01}^2}{2BI_1} \int_0^t \int_0^t r_1(2t - u - v)J_1(u)J_1(v) du dv - \frac{(M_{02}t)^2}{2BI_2I_2}. \end{aligned} \tag{30}$$

对于加载历史 $P = p_0H(t)$, 将方程(22) ~ (27) 式代入(29) 式中, 可以求得应变能释放率

$$G = \frac{p_0^2 a^2}{BI_1} \left\{ f_{01} \left[1 - e^{-t/t_1} - \frac{1}{2}(1 - e^{-t/t_1})^2 - \frac{1}{2} \frac{t}{t_1} e^{-2t/t_1} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{E_2} \right\}, \tag{31}$$

式中, $I_1 = Bh^3/12$. 对于微电子封装结构, 层合板由二层组成, 一层是弹性芯片, 另一层是粘弹性树脂混合物, 材料常数为,

$$E_2 = 150 \text{ (GPa)}, f_{01} = 0.1 \text{ (1/GPa)}, t_1 = 10^{12} \text{ (s)} \tag{32}$$

无量纲化的能量释放率 G/G_0 随时间 t/t_1 的变化曲线示于图 3, 式中, $G_0 = p_0^2 a^2 / [2BE_2I_1]$.

对于线性增加的载荷 $P = p_0 t$, 可以得到,

$$\left. \begin{aligned} J_1(t) &= \int_0^t f_1(t-\tau) d\tau = f_{01}(t-t_1) + f_{01}t_1 e^{-t/t_1}, \\ J(t) &= \int_0^t f(t-\tau) d\tau = f_0(t-t') + f_0 t' e^{-t/t_1}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

将(33)式代入(30)式中, 得到,

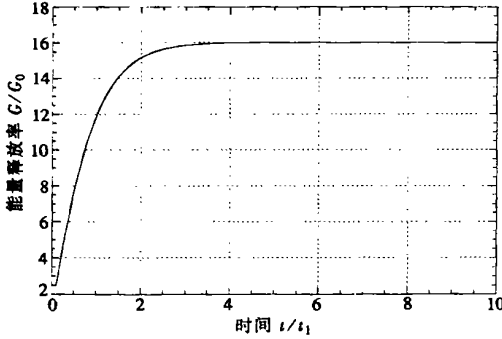


图3 瞬态施加载荷条件, 能量释放率随时间变化曲线

$$G = \frac{(M_{01}t)^2}{2BE_2I_1} \left\{ 1 + E_2 f_{01} \left[1 - \frac{t_1}{t} + \frac{t_1}{t} e^{-t/t_1} \right] - E_2 f_{01} \left[1 - \frac{t_1}{t} + \frac{t_1}{t} e^{-t/t_1} \right]^2 + E_2 f_{01} \frac{t_1}{t} \left[1 - \frac{t_1}{t} + 2e^{-t/t_1} + \left(2 + \frac{t_1}{t} + \frac{2}{3} \frac{t^2}{t_1^2} \right) e^{-2t/t_1} \right] \right\}. \quad (34)$$

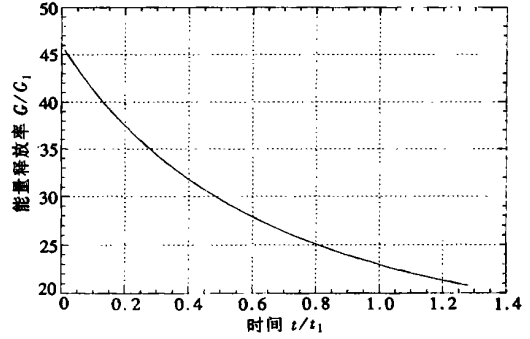


图4 线性加载条件下, 能量释放率随时间变化曲线

能量释放率 G/G_1 , 随时间 t/t_1 变化曲线示于图4中。可以很容易的发现, 针对粘弹性层, 如果采用广义 Maxwell 本构方程, 可以导出能量释放率的显函表达式, 正如预想的一样, 对于粘弹性材料, 它是时间的函数。在时刻 t , 它相应于裂纹扩展单位长度所释放的能量。本文的主要假设在于裂纹由 a 突然扩展到 $a + \Delta a$ 。

致谢 感谢国家杰出青年基金及国家教委长江学者奖励计划对本项目的支持

[参 考 文 献]

- [1] Watson K A, Liechtl K M. Adhesion measurements of printed wiring board assemblies[A]. In: J C Suhling Ed. Applications of Experimental Mechanics to Electronic Packaging [C], ASME Press, 1995.
- [2] Nguyen L T, Chen A S, Lo R Y. Interfacial integrith in electronic packaging[J]. Application of Fracture Mechancis in Electronic Packaging and Materials, EEP_Vol 1/ MD_Vol 64, ASME, 1995. 34-44.
- [3] Christensen R M. A rate dependent criterion for crack growth[J]. International Journal of Fracture, 1979, 15(3) : 3-12.
- [4] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, an Introduction [M]. Second Edition. New York: Academic Press, Inc, 1982.
- [5] Schapery R A. A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media I : Theoretical development[J]. International Journal of Fracture, 1975, 11(1) : 141-159.

- [6] Knauss W G, Dietmann H. Crack propagation under variable load histories in linearly viscoelastic solids[J]. *Internat J Engng Sci*, 1970, **8**: 643—656.
- [7] Knauss W G. Delayed failure—the Griffith problem for linearly viscoelastic materials[J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1970, **6**(1): 7—20.
- [8] Wnuk M P. Subcritical growth of fracture (inelastic fatigue) [J]. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1971, **7**(4): 383—407.
- [9] Liang R Y, Zhou J. Energy based approach for crack initiation and propagation in viscoelastic solid [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, **58**(1/2): 71—85.
- [10] Frassine R, Ring M, Leggio A, et al. Experimental analysis of viscoelastic criteria for crack initiation and growth in polymers[J]. *International Journal of Fracture*, 1996, **81**(1): 55—75.
- [11] Alfrey T. Non-homogeneous stresses in viscoelastic media[J]. *Quarterly Applied Mathematics*, 1944, **2**(113): 113—119.
- [12] Sills L B, Benveniste Y. Steady state propagation of a mode 3 interface crack in an inhomogenous viscoelastic media[J]. *Internat J Engng Sci*, 1981, **19**(6): 1255—1268.
- [13] Ryvkin M, Banks_Sills L. Mode III delamination of a viscoelastic strip from a dissimilar viscoelastic half-plane[J]. *Internat J Solids and Structures*, 1994, **31**: 551—566.
- [14] Williams J G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates[J]. *International Journal of Fracture*, 1988, **36**(2): 101—119.
- [15] Huet C. Minimum theorem for viscoelasticity[J]. *Eur J Mech A/Solids*, 1992, **11**(5): 653—684.

On the Calculation of Energy Release Rate for Viscoelastic Cracked Laminates

LIU Yu_lan, WANG Biao, WANG Dian_fu

(Research Center for Composite Materials, Harbin Institute of
Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The energy release rate (ERR) of crack growth as the energy change at the same time t between the two states of the structure is redefined, one is with crack length a under the loading $\sigma(t)$, the other is the state with crack length $a + \Delta a$ under the same loading condition. Thus the defined energy release rate corresponds to the released energy when a crack grows from a to $a + \Delta a$ in an infinitesimal time. It is found that under a given loading history, the ERR is a function of time, and its maximum value should correspond with the critical state for delamination to propagate. Following William's work, the explicit expressions of ERR for DCB experimental configurations to measure the interfacial fracture toughness have been obtained through the classical beam assumption.

Key words: composite laminate; viscoelastic model; analysis delamination