应用数学和力学,第 24 卷 第 1 期(2003 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0019_06

一些数学物理问题中的 Hamilton 方程*

陈 勇[1], 郑 宇[2], 张鸿庆[1]

(1. 大连理工大学 数学系, 大连 116023; 2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 讨论了新的一系列在数学物理方程中微分方程的 Hamilton 正则表示, 其中包括变系数 2 阶对称方程的 Hamilton 系统, 关于常系数的 4 阶对称方程新的非齐次 Hamilton 表示, MKdV 方程以及 KP 方程的正则表示•

关 键 词: 无穷维 Hamilton 系统; Hamilton 正则方程; Hamilton 算子; MKdV 方程; KP 方程

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

Hamilton 系统是力学, 数学, 物理学中十分重要的研究内容, 尤其在八十年代冯康先生[1]首次提出无限维辛算法以来, Hamilton 系统的研究在理论和应用上得到了进一步深入• 因此, 自然要考虑哪类微分方程解由 Hamilton 系统来重写或表示。目前, 许多数学家, 物理学家对此类问题进行了广泛而深入的研究, 见[2~5]• 直至今日许多重要的方程例如波动方程, Shr┗dinger 方程, Maxwell 方程, 以及 KdV 方程, 都具有各种 Hamilton 结构•

本文中, 第一部分我们首先介绍了一些必要的概念, 定义和基本结果; 本文第二部分进一步地研究了文[6]中关于在数学物理中 Hamilton 正则表示的问题, 讨论了在数学, 物理中偏微分方程变系数和非齐次的情形•

1 无限维 Hamilton 系统

历史上在经典力学中, Hamilton 系统来自 Lagrange 系统, 现在考虑 n 维光滑流形 M 上 Lagrange 系统在某点 $\boldsymbol{q} \in M$ 的局部坐标 $(U, \boldsymbol{q})$ 下, 它能表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}},$$

其中 $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 是一个光滑函数, 称为 Lagrange 密度, 这个方程在切丛 TM 上能等价地表示为如下方程:

---

* 收稿日期: 2001_04_03; 修订日期: 2002_06_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072013, G1999803060); 高等学校青年骨干教师科学基金项目; 上海市重点学科基金项目

作者简介: 陈勇(1960—), 男, 广东人, 博士(E_mail: chenyong@dlut.edu.cn).

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}')}{\partial \boldsymbol{q}}, \\ \boldsymbol{q}' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{q}, \end{cases}$$

根据从 TM 到 TM^* 的 Legendre 变换:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}'},$$

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{q}' - L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'),$$

其中 L 是关于 $\boldsymbol{q}'$ 非退化的, 因此, 在余切丛 TM^* 上 Lagrange 系统可以等价地由 Hamilton 系统表示・

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \end{cases}$$

类似地, 它能被一般地推广到无穷维情形・ 设 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_{2m})^{\mathrm{T}}$ 是关于 $(t, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \Omega \subset R^n$ 的向量函数, 记

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial u_{2m}}{\partial t}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{D}^i\boldsymbol{u} = (\mathrm{D}^i u_1, \cdots, \mathrm{D}^i u_{2m})^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{D}^i \boldsymbol{u}_j = \left(\frac{\partial^i u_j}{\partial x_1^i}, \cdots, \frac{\partial^i u_j}{\partial x_{k_1}\cdots\partial x_{k_i}}, \cdots\right)^{\mathrm{T}}, \quad H[\boldsymbol{u}] = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, D^1\boldsymbol{u}, \cdots, D^k\boldsymbol{u})・$$

对 $k \in \mathbf{N}$, H 总是无穷可微的函数・ 对于每个这样的函数 H, 有一个泛函

$$\mathscr{H} = \int_\Omega H[\boldsymbol{u}]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x・$$

记所有此类泛函之集为 $\mathscr{F}$

定义 1.1 称如下偏微分方程(组)为无穷维 Hamilton 方程或系统:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \mathscr{D}\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \boldsymbol{u}},$$

其中 $\mathscr{D}$ 为 Hamilton 算子, 它是关于函数的线性算子, 能用于定义如下 Poisson 结构:

$$\{\mathscr{H}, \mathscr{L}\} = \int_\Omega \left(\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta \boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}} \mathscr{D}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \boldsymbol{u}}\right) \mathrm{d}x,$$

对任意 $\mathscr{H}, \mathscr{L} \in \mathscr{F}$, 可以证明算子

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} O & \boldsymbol{I}_{m\times m} \\ -\boldsymbol{I}_{m\times m} & O \end{pmatrix}$$

是一个 Hamilton 算子・ 当 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}$, 对应的 Hamilton 系统被称为无穷维 Hamilton 正则系统・ 应用变分理论中的 Vainberg 定理, 易证当且仅当如下形式线性偏微分方程组为无穷维线性正则 Hamilton 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{P} & -\boldsymbol{F}^* \end{pmatrix} \boldsymbol{u}$$

其中 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 是线性偏微分算子阵, 独立于 ∂_t, 且 $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}^*$, $\boldsymbol{P}^*$ 和 $\boldsymbol{Q}^*$ 是 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 的对偶算子

2 Hamilton 正则系统的表示

例2.1 考虑如下一般具有光滑变系数的2阶对称方程:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=0\text{.}\tag{1}$$

此方程为泛函 $\mathscr{L}$的Euler_Lagrange 方程

$$\mathscr{L}=\int_\Omega\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{1}{2}cu^2\right)\mathrm{d}x\text{.}$$

设 $a_{k0}\neq 0$. 对 $1\leqslant k_0\leqslant n$, 记 $a_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{a_{k0}}, \partial_{x_i}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \partial^2_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$.

定义:

$$A=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2),\quad B=-\frac{1}{\alpha_{k_0}},\quad C=-\frac{1}{4}\gamma+\omega-\frac{1}{4}\lambda,$$

$$A^*=-A+\frac{1}{2}\beta,\quad \beta=\sum_{i=1}^{k_0}\frac{\partial a_{ik_0}}{\partial x_i}+\sum_{i=k_0+1}^{n}\frac{\partial a_{k_0i}}{\partial x_i},$$

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{k_0-1}a_{ik_0}\partial_{x_i},\qquad \alpha_2=\sum_{i=k_0+1}^{n}a_{k_0i}\partial_{x_i},$$

$$\gamma=(r_1r_2-2r_3)\partial^2_{x_ix_j},\qquad \omega=\sum_{i\neq k_0}a_i\partial^2_{x_ix_i}$$

$$\lambda=\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i-4\lambda_5-2\lambda_6\right)\partial_{x_i},$$

$$r_1=\sum_{i=1}^{k_0-1}a_{ik_0}+\sum_{i=k_0+1}^{n}a_{k_0i},\quad r_2=\sum_{i=1}^{k_0-1}a_{ik_0}+\sum_{i=k_0+1}^{n}a_{k_0i},\quad r_3=\sum_{i,j\neq k_0}a_{ij},$$

$$\lambda_1=\sum_{i=1}^{k_0-1}\sum_{j=1}^{k_0-1}\frac{\partial(a_{ik_0}a_{jk_0})}{\partial x_j},\qquad \lambda_2=\sum_{i=1}^{k_0-1}\sum_{j=k_0+1}^{n}\frac{\partial(a_{ik_0}a_{k_0j})}{\partial x_j},$$

$$\lambda_3=\sum_{i=k_0+1}^{n}\sum_{j=1}^{k_0-1}\frac{\partial(a_{k_0i}a_{jk_0})}{\partial x_j},\qquad \lambda_4=\sum_{i=k_0+1}^{n}\sum_{j=k_0+1}^{n}\frac{\partial(a_{k_0i}a_{k_0j})}{\partial x_j},$$

$$\lambda_5=\sum_{i\neq k_0}\frac{\partial a_i}{\partial x_i},\qquad \lambda_6=\sum_{i,j\neq k_0}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\text{.}$$

当我们定义 $v=a_{k_0}(Au-\partial u/\partial x_{k_0})$, 这个方程等价于如下Hamilton 系统,

$$\frac{\partial}{\partial x_{k0}}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\C & -A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\text{.}$$

特别当方程(1)的所有系数都是常数, 此Hamilton 系统恰为文[6]中的例2.1.

例2.2 如文[6], 考虑如下4阶具有常系数的方程

$$\sum_{i+j=4}a_{ij}\frac{\partial^4 u}{\partial x^i\partial y^j}+\sum_{i+j=2}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial y^j}+eu=0\text{.}\tag{2}$$

此方程为泛函 $\mathscr{F}$的Euler_Lagrange 方程:

$$\mathscr{F}[u]=\int_\Omega K\,\mathrm{d}x,$$
$$K=\frac{a_{40}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\frac{a_{04}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+\frac{a_{22}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{a_{31}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-$$
$$\frac{a_{20}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{a_{02}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{a_{11}}{2}u_x u_y+\frac{eu^2}{2}.$$

设 $a_{40}\neq 0$. 我们定义

$$\alpha_1=-\frac{a_{22}}{2a_{40}}\partial_y^2,\quad \alpha_2=-\frac{a_{31}}{2a_{40}}\partial_y,\quad \alpha_3=\frac{1}{a_{40}},$$
$$\alpha_4=\left(-\frac{a_{22}^2}{4a_{40}}+a_{04}\right)\partial_y^4+a_{02}\partial_y^2+e,\quad \alpha_5=\left(-\frac{a_{31}a_{22}}{4_{40}}+\frac{a_{13}}{2}\right)\partial_y^3+\frac{a_{11}}{2}\partial_y,$$
$$\alpha_6=\frac{a_{31}^2}{4\alpha_{40}}\partial_y^2-a_{20},\quad \alpha_7=\frac{a_{22}}{2a_{40}}\partial_y^2,\quad \alpha_8=-\frac{a_{31}}{2a_{40}}\partial_y.$$

定义 $\theta=\phi(x,y,u)+\frac{\partial u}{\partial x_{40}}$, $\phi(x,y)$ 是任意光滑函数, 即这个方程能等价地写成如下的 Hamilton 系统:

$$\frac{\partial}{\partial x_{40}}\begin{pmatrix}u\\ \theta\\ \lambda\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ \alpha_1&\alpha_2&0&\alpha_3\\ \alpha_4&\alpha_5&0&\alpha_7\\ -\alpha_5&\alpha_6&-1&\alpha_8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \theta\\ \lambda\\ m\end{pmatrix}-\boldsymbol{V},$$

其中 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\left(-\phi,\phi_x+\frac{a_{31}}{2a_{40}}\phi_y,-\frac{1}{2}\left(a_{13}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{40}}\right)\phi_{yyy}\frac{a_{11}}{2}\phi_y,-\frac{a_{31}^2}{4a_{40}}\phi_{yy}+a_{20}\phi\right)$,

此结果与文[6]结果相比较, 我们看到这是非齐次 Hamilton 系统的另一种情形. 特别如果 $\phi=0$, 这正是文[6] 的情形. 现在, 让我们讨论如下数学和物理的非线性问题.

例 2.3 考虑 MKdV 方程

$$\phi_t=\phi_{xxx}-6\phi^2\phi_x. \tag{3}$$

定义 $\phi=u_x$, 我们得到如下 u 的方程

$$u_{xxxx}-6u_x^2u_{xx}-u_{xt}=0, \tag{4}$$

它是泛函 $\mathscr{L}$ 的 Euler_Lagrange 方程

$$\mathscr{L}=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}(u_{xx})^2+\frac{1}{2}u_xu_t+\frac{1}{2}u_x^4\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

记 $v=u_x+\phi(t,x)$, 其中 ϕ 是 x 和 t 的任意光滑导数. 则如下 Hamilton 系统等价于方程(4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\ v\\ \lambda\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\mathscr{H}/\delta\lambda\\ \delta\mathscr{H}/\delta m\\ -\delta\mathscr{H}/\delta u\\ -\delta\mathscr{H}/\delta v\end{pmatrix},$$

或

$$\begin{cases} u_x = v - \phi, \\ v_x = m + \phi_x, \\ \lambda = -\dfrac{1}{2}v_t + \dfrac{1}{2}\phi_t, \\ m_x = \dfrac{1}{2}u_t + 2(v - \phi)^3 - \lambda, \end{cases}$$

其中

$$\mathscr{H} = \int_\Omega H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (\Omega \subset R^2),$$

和

$$H[u, v, \lambda, m] = \frac{1}{2}m^2 + m\phi_x - \frac{1}{2}(v - \phi)u_t - \frac{1}{2}(v - \phi)^4 + \lambda(v - \phi).$$

最终考虑如下Kadomtstev_Petvishvill方程, 它描述了水波在2维介质中运动, 通常称为KP方程.

例2.4 $\quad v_{xt} = v_{xxxx} + 6v_x v_{xx} + 3a^2 v_{yy},$ (5)

其中 a 是一般的任意常数, 特别 $a = 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. 设函数 $u = v_x$ 对任意方程(5)的解 v. 即 u 满足如下方程:

$$u_{xt} = (u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3a^2 u_{yy}, \tag{6}$$

它最早是由Kadomtstev_Petvishvilli提出的, 方程(5)是泛函 $\mathscr{L}$ 的Euler_Lagrange方程

$$\mathscr{L} = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(v_{xx})^2 + \frac{1}{2}v_x v_t - (v_x)^3 - \frac{3a^2}{2}(v_y)^2 \right) \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

设 $w = v_x + \phi(t, x, y)$, 其中 ϕ 是 (t, x, y) 的任意光滑函数, 即可以证明方程(5)能用如下Hamilton方程等价地表示:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v \\ w \\ \lambda \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\mathscr{H}/\delta\lambda \\ \delta\mathscr{H}/\delta m \\ -\delta\mathscr{H}/\delta v \\ -\delta\mathscr{H}/\delta w \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} v_x = w - \phi, \\ w_x = m + \phi_x, \\ \lambda = -\dfrac{1}{2}w_t + \dfrac{1}{2}\phi_t + 3a^2 v_{yy}, \\ m_x = \dfrac{1}{2}v_t - 3(w - \phi)^2 - \lambda, \end{cases}$$

其中 $\mathscr{H} = \int_\Omega H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, 且

$$H[v, w, \lambda, m] = \frac{1}{2}m^2 + m\phi_x - \frac{1}{2}(w - \phi)v_t + (w - \phi)^3 + \frac{3a^2}{2}(v_y)^2 + \lambda(w - \phi).$$

注: 推广以上例2.1和例2.2的结果, 我们可得到关于一般对称线性偏微分方程的等价Hamilton系统. 对于定义在 $\Omega \subset R^m$ 上的具有变系数的一般线性Euler_Lagrange偏微分方程

$$f(u, u^{(1)}, \cdots, u^{(2n)}) = 0,$$

如果对于某个 $1 \leqslant i \leqslant r$, $\forall x \in \Omega$, $\dfrac{\partial^{2n} u}{\partial x_i^{2n}}$ 的系数 $a_i(x)$ 满足 $a_i(x) \neq 0$, 那么此方程可以由有限甚至无穷多个 Hamilton 正则系统等价地表示•

同时根据以上等价的 Hamilton 系统, 在域 $\Omega \subset R^m$ 某些合适的边界条件下, 我们可得到一些沿着相应的变量(在例 2.2 中, 为 $x_{04} \neq 0$) 的守恒能量, 进而有助于对此问题的进一步研究, 如可积性研究等•

[参 考 文 献]

[1] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: D Schmidt Ed. Proceeding of 1984 Beijing International Symposium on Differential Geometry and Differential Equations [C]. Beijing: Science Press, 1985, 42—58.

[2] Olver P J. Applications of Lie Group to Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[3] Gardner C S. Korteweg_de Vries equations and generalization Ⅳ The Korteweg_de Vries equations as a Hamiltonian system[J]. J Math Phys, 1971, **12**(8): 1548—1551.

[4] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation[J]. J Math Phys, 1978, **19**(5): 1156—1162.

[5] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds Tensor Analysis and Applications[M]. New York: Springer_Verlag, 1990.

[6] 郑宇, 张鸿庆. 固体力学中的 Hamilton 正则表示[J]. 力学学报, 1996, **28**(1): 119—125.

The Hamiltonian Equations in Some Mathematics and Physics Problems

CHEN Yong[1], ZHENG Yu[2], ZHANG Hong_qing[1]

(1. Department of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Some new Hamiltonian canonical system are discussed for a series of partial differential equations in Mathematics and Physics. It includes the Hamiltonian formalism for the symmetry 2_order equation with the variable coefficients, the new nonhomogeneous Hamiltonian representation for 4_order symmetry equation with constant coefficients, the one of MKdV equation and KP equation.

Key words: infinite dimensional Hamiltonian system; Hamiltonian canonical system; Hamiltonian operator; MKdV equations; KP equation