应用数学和力学, 第 24 卷 第 1 期(2003 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0047_08

广义泰勒定理: "同伦分析方法"之有效性的一个数理逻辑证明*

廖世俊

(上海交通大学 船舶及海洋工程学院, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 推导了复变函数一个广义意义上的泰勒级数表达式, 证明了有关的收敛性定理, 大大增大摄动级数解的收敛区域· 定理的证明亦为一种新的、求解非线性问题的解析方法(即"同伦分析方法")的有效性奠定了一个坚实的数理逻辑基础·

关 键 词: 泰勒级数; 级数之收敛性; 同伦分析方法; 摄动
中图分类号: O173.1, O175.14, O189.23 文献标识码: A

引 言

牛顿于 17 世纪[1] 给出如下一个二项式定理

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\right]t^{k} \qquad (\alpha \neq 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

这里, α 为实数· 上式的收敛半径为 1· 另外, 复函 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的泰勒级数

$$\lim_{m \to +\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k} \tag{2}$$

通常仅在有限的区域

$$|z - z_0| < \min_{k \in I}|\xi_k - z_0|$$

内收敛(详见[2])· 这里, $f^{(k)}(z_0)$ 表示复函 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的 k 阶导数, $\xi_k (k \in I)$ 表示复函 $f(z)$ 所有的奇点, I 表示其下标之集合·

文献[3] ~ [10] 提出了一种有效性不依赖于小参数的、求解非线性微分方程解析近似解的新方法, 称为"同伦分析方法"· 与摄动方法[11] 不同, "同伦分析方法"之有效性与所考虑的非线性问题是否含有小参数无关· 此外, 不同于所有其它传统的摄动方法[11] 和非摄动方法(如"人工小参数方法"[12], "δ 展开方法"[13] 和"Adomian 分解方法"[14]~[17] 等), "同伦分析方法"本身提供了一种方便的途径来控制级数解的收敛性, 调节级数解的收敛区域· "同伦分析方法"已成功应用于求解应用数学和力学中的许多问题(详见文献[3] ~ [10])· 然而, 众多成功的例子不能取代严格的数学证明· 在"同伦分析方法"框架内, 文献[5] 首次给出了复函数一个广义意

* 收稿日期: 2002_01_28; 修订日期: 2002_10_15
基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(50125923)
作者简介: 廖世俊(1963—), 男, 教育部"长江奖励计划"特聘教授, 博士(E_mail: sjliao@sjtu.edu.cn)·

义上的泰勒级数表达式，称为“广义泰勒定理”• 文献[6] 举例说明该定理可大大增大摄动级数解的收敛区域• 本文从另一个角度，给出该定理详细的数学推导及逻辑证明• 因此，此证明亦为“同伦分析方法”的有效性奠定了一个坚实的数学逻辑基础•

1 广义泰勒定理

定理 1 设 h 为复数• 若复函 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 处解析，则如下定义的广义泰勒级数

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]\phi_{m,k}(h) \tag{3}$$

在区域

$$\bigcap_{k\in I}\left|1+h-h\left(\frac{z-z_0}{\xi_k-z_0}\right)\right|<1 \qquad (|1+h|<1) \tag{4}$$

内收敛于 $f(z)$• 这里，

$$\phi_{m,n}(h)=\begin{cases}1 & (n\leqslant 0),\\ (-h)^n\sum\limits_{k=0}^{m-n}\binom{k+n-1}{k}(1+h)^k & (1\leqslant n\leqslant m)\text{•}\end{cases} \tag{5}$$

且 $\xi_k(k\in I)$ 为复函 $f(z)$ 之全部奇点•

证明 设 $p, z, z_0, h\neq 0$ 及

$$\tau = z_0-\frac{hp(z-z_0)}{1-(1+h)p}$$

均为复数，$f(\tau)$ 为复函• 则，当 $p=0$ 时，成立 $\tau = z_0$；当 $p=1$ 时，成立 $\tau = z$• 令 $G(p)=f(\tau)$，则成立 $G(0)=f(z_0)$ 及 $G(1)=f(z)$• 当

$$|1-(1+h)p|<1$$

时，$G(p)=f(\tau)$ 关于 p 之 Maclaurin 级数为

$$f(z_0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{-hp}{1-(1+h)p}\right]^k\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]=$$

$$f(z_0)+\sum_{k=1}^{+\infty}(-h)^kp^k\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\binom{k+r-1}{r}(1+h)^rp^r\right]\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_np^n, \tag{6}$$

其中

$$\sigma_0=f(z_0),\quad \sigma_1=(-h)f'(z_0)(z-z_0),$$

且当 $n\geqslant 2$ 时

$$\sigma_n=(-h)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]+$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{n-k}(-h)^k(1+h)^{n-k}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]\text{•}$$

因此，$G(p)=f(\tau)$ 关于 p 之 m 阶 Maclaurin 级数展开为

$$\phi_m(z,z_0,h,p)=\sum_{n=0}^{m}\sigma_np^n$$

该式在 $p=1$ 时给出

$$\phi_m(z,z_0,h,1)=\sum_{n=0}^{m}\sigma_n=$$

$$\sum_{n=0}^{m}(-h)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]+\sum_{n=2}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{n-k}(-h)^k(1+h)^{n-k}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]=$$

$$\sum_{n=0}^{m}(-h)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=k+1}^{m}\binom{n-1}{n-k}(-h)^k(1+h)^{n-k}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]=$$

$$\sum_{n=0}^{m}(-h)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]+\sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k=n+1}^{m}\binom{k-1}{k-n}(-h)^n(1+h)^{k-n}\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]=$$

$$\sum_{n=0}^{m}\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]\Phi_{m,n}(h),$$

其中

$$\Phi_{m,0}(h)=1,$$

且

$$\Phi_{m,n}(h)=\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{k-n}(-h)^n(1+h)^{k-n}=(-h)^n\sum_{k=0}^{m-n}\binom{k+n-1}{k}(1+h)^k\qquad(1\leqslant n\leqslant m)\cdot$$

$G(p)=f(\tau)$ 对应的 Maclaurin 级数

$$\lim_{m\to+\infty}\Psi_m(z,z_0,h,p)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n p^n$$

之收敛半径为复函 $G(p)=f(\tau)$ 距离点 $p=0$ 最近的奇点 $p(k\in I)$ 到 $p=0$ 点之距离• 若 $\xi_k(k\in I)$ 表示复函 $f(z)$ 之全部奇点• 则, 对给定的 z,z_0,h 之值, 复函 $G(p)=f(\tau)$ 对应的奇点 $p_k(k\in I)$ 为

$$\xi_k=z_0-\frac{h(z-z_0)p_k}{1-(1+h)p_k}\qquad(h\neq0,k\in I),$$

即

$$p_k=\frac{1}{1+h-h\left(\dfrac{z-z_0}{\xi_k-z_0}\right)}\qquad(h\neq0,k\in I),\cdot$$

此外, 还有一个仅与 h 有关的奇点

$$p_0=\frac{1}{1+h}\cdot$$

对任一给定的 z_0, 若 z 和 h 选择适当, 从而上述所有奇点都在区域 $|p|\leqslant1$ 之外, 即

$$|p_0|=\frac{1}{|1+h|}>1,\ |p_k|=\frac{1}{\left|1+h-h\left(\dfrac{z-z_0}{\xi_k-z_0}\right)\right|}>1\qquad(h\neq0,k\in I)\cdot$$

或者更精确地说，在区域

$$\bigcap_{k\in I}\left|1+h-h\left(\frac{z-z_0}{\xi_k-z_0}\right)\right|<1\qquad(|1+h|<1),$$

内，Maclaurin 级数(6)在 $p=1$ 处收敛于 $G(1)=f(z)$，即

$$f(z)=\lim_{m\to+\infty}\phi_m(z,z_0,h,1)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]\phi_{m,n}(h)\cdot$$

证毕·

定理 2 设 $\rho_k>0$, γ_k, $0\leqslant\beta<1$ 及 $\alpha\in[-\pi,\pi]$ 为实数，$\xi_k=z_0+\rho_k\exp(\mathrm{i}\gamma_k)\,(k\in I)$ 表示复函 $f(z)$ 所有奇点· 则广义泰勒级数(3)在区域

$$\Omega=\left\{z=z_0+\rho\exp(\mathrm{i}\theta):\theta\in[-\pi,\pi],0\leqslant\rho\leqslant\min\rho_k\mu_k,k\in I\right\}$$

内收敛于 $f(z)$· 其中

$$\mu_k=\frac{\beta[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]+\sqrt{\Theta_k}}{1-2\beta\cos\alpha+\beta^2},$$

$$\Theta_k=\beta^2[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]^2+(1-\beta^2)(1-2\beta\cos\alpha+\beta^2)\cdot$$

证明 令 $h=-1+\beta\exp(\mathrm{i}\alpha)$，这里，$\alpha\in[-\pi,\pi]$ 且 $0\leqslant\beta<1$· 则，$|1+h|<1$ 成立· 此外，令 $z=z_0+\rho\exp(\mathrm{i}\theta)$，这里 $\rho\geqslant0$, $\theta\in[-\pi,\pi]$· 由(4)式，广义泰勒级数(3)收敛于 $f(z)$，如若

$$|\beta\exp[\mathrm{i}\alpha]+\exp[\mathrm{i}(\theta-\gamma_k)](1-\beta\exp[\mathrm{i}\alpha])\rho/\rho_k|<1,$$

即

$$(1-2\beta\cos\alpha+\beta^2)\left(\frac{\rho}{\rho_k}\right)^2-$$
$$2\beta[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]\left(\frac{\rho}{\rho_k}\right)-(1-\beta^2)<0$$

对所有 $k\in I$ 成立· 显然，成立

$$\Delta_k=4\Theta_k\geqslant0,$$

这里

$$\Theta_k=\beta^2[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]^2+(1-\beta^2)(1-2\beta\cos\alpha+\beta^2)\cdot$$

因此，对所有 $k\in I$，成立

$$\chi_k<\frac{\rho}{\rho_k}<\mu_k,$$

这里

$$\chi_k=\frac{\beta[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]-\sqrt{\Theta_k}}{1-2\beta\cos\alpha+\beta^2}<0,$$

$$\mu_k=\frac{\beta[\cos(\theta-\gamma_k-\alpha)-\beta\cos(\theta-\gamma_k)]+\sqrt{\Theta_k}}{1-2\beta\cos\alpha+\beta^2}>0\cdot$$

另外，我们有 $\rho/\rho_k\geqslant0$· 故，成立

$$0\leqslant\rho<\mu_k\rho_k,\qquad k\in I\cdot$$

因此，广义泰勒级数(3)在区域

$$\Omega=\left\{z=z_0+\rho\exp(\mathrm{i}\theta):\theta\in[-\pi,\pi],0\leqslant\rho\leqslant\min\rho_k\mu_k,k\in I\right\}$$

收敛于 $f(z)$· 证毕·

推论 1　若复函 $f(z)$ 仅有一个奇点 $\xi_1 = z_0 + \rho_1 \exp(i\gamma_1)$, 则, 当复变参数 $h = -1 + \beta\exp(i\alpha)$ 沿负实轴趋于原点时, 级数(3) 在如下一个无限区域

$$\left\{ z = z_0 + \rho\exp(i\theta) : 0 \leqslant \rho < \rho_1 \mu,\ \theta \in [-\pi, \pi] \right\}$$

收敛于 $f(z)$, 其中

$$\mu = \begin{cases} \sec(\theta - \gamma_1) & (\text{其中 } \theta - \gamma_1 \in [-\pi/2, \pi/2]), \\ +\infty & (\text{其它}) . \end{cases}$$

证明　当 $\alpha = 0$, 即 $h = -1 + \beta (0 \leqslant \beta < 1)$, 我们有

$$\mu_1 = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\theta - \gamma_k)} + \beta\cos(\theta - \gamma_1)} .$$

显然, 成立

$$\mu = \lim_{\alpha = 0, \beta \to 1} \mu_1 = \frac{2}{|\cos(\theta - \gamma_1)| + \cos(\theta - \gamma_1)} .$$

上式在区域 $\theta - \gamma_k \in [-\pi/2, \pi/2]$ 内取值 $\mu = \sec(\theta - \gamma_1)$. 但在其他区域, 取值 $\mu = +\infty$. 证毕.

推论 2　若复函 $f(z)$ 之全部奇点都在虚轴的左边, 则当复变参数 $h = -1 + \beta\exp(i\alpha)$ 沿负实轴趋于原点时, 广义泰勒级数(3) 在整个正实轴上收敛于 $f(z)$.

由推论 1, 该推论显然正确. 证略.

引理 1　当 $0 \leqslant n \leqslant m$ 时, 成立 $\phi_{m,n}(-1) = 1$.

证明　根据 $\phi_{m,n}(h)$ 之定义, 成立 $\phi_{m,0}(-1) = 1$. 另外, 当 $1 \leqslant n \leqslant m - 1$ 时,

$$\phi_{m,n}(h) = (-h)^n + (-h)^n \sum_{k=1}^{m-n} \binom{k + n - 1}{k} (1 + h)^k ,$$

上式给出

$$\phi_{m,n}(-1) = 1^n + 0 = 1 .$$

此外, 根据 $\phi_{m,n}(h)$ 之定义, 成立 $\phi_{m,m}(h) = (-h)^m$, 从而 $\phi_{m,m}(-1) = 1$. 证毕.

引理 2　设 $n \geqslant 0$ 为有限整数, h 为复变数. 则, 当 $|1 + h| < 1$ 时, 成立

$$\lim_{m \to +\infty} \phi_{m,n}(h) = 1 .$$

证明　根据 $\phi_{m,n}(h)$ 之定义, $\phi_{m,0}(h) = 1$ 成立. 另外, 当 $|1 + h| < 1$ 时, 成立

$$(-h)^{-n} = [1 - (1 + h)]^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{k} (1 + h)^k .$$

故, 对有限正整数 $n \geqslant 1$, 成立

$$\lim_{m \to +\infty} \phi_{m,n}(h) = (-h)^n \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n + k - 1}{k} (1 + h)^k =$$

$$(-h)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n + k - 1}{k} (1 + h)^k = (-h)^n (-h)^{-n} = 1$$

证毕.

引理 3　成立 $\Phi_{m,n}(h) = \phi_{m,n}(h)$, 此处

$$\Phi_{m,n}(h) = \begin{cases} 1 & (n \leqslant 0), \\ (-h)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{m-n} \binom{k + n - 1}{k} \binom{m}{m - n - k} h^k & (1 \leqslant n \leqslant m) . \end{cases}$$

证明 当 $1 \leqslant n \leqslant m$，成立

$$\phi_{m,n}(h) = (-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{k+n-1}{k} (1+h)^k =$$

$$(-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{k+n-1}{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} h^r = (-h)^n \sum_{r=0}^{m-n} \sum_{k=r}^{m-n} \binom{k+n-1}{k} \binom{k}{r} h^r =$$

$$(-h)^n \sum_{k=0}^{m-n} \sum_{r=k}^{m-n} \binom{r+n-1}{r} \binom{r}{k} h^k$$

因此,我们仅需证明

$$\sum_{r=k}^{m-n} \binom{r+n-1}{r} \binom{r}{k} = \binom{k+n-1}{k} \binom{m}{m-n-k}.$$

已知,在有效区间内,成立关系式

$$\binom{r+n-1}{r} \binom{r}{k} = \binom{k+n-1}{k} \binom{r+n-1}{r-k},$$

从而,我们仅需证明

$$\binom{m}{m-n-k} = \sum_{r=k}^{m-n} \binom{r+n-1}{r-k} = \sum_{s=0}^{m-n-k} \binom{s+n+k-1}{s}$$

式成立. 令 $r = n+k$，上式就是

$$\binom{m}{r} = \sum_{s=0}^{m-r} \binom{s+r-1}{s} = \sum_{s=0}^{m-r} \binom{s+r-1}{r-1} = \sum_{j=r-1}^{m-1} \binom{j}{r-1}.$$

为了证明上式成立, 我们仅需应用数学手册(A. 科恩, M. 科恩著, 周民强等译, 第 627 页, (§ 21. 5- 1) 中的如下公式

$$\binom{N+1}{n+1} = \sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n}.$$

上述公式中,令 $N = m-1, n = r-1$，即有

$$\binom{m}{r} = \sum_{j=r-1}^{m-1} \binom{j}{r-1}.$$

证毕.

注 1 由引理 3, $\phi_{m,n}(h)$ 就是文献[5] 中所定义的趋近函数 $\Phi_{m,n}(h)$.

推论 3 传统泰勒级数

$$f(z_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

是广义泰勒级数(3) 在 $h = -1$ 时的一个特例.

证明 由引理 1, 对任意 $n \leqslant m$, 成立 $\phi_{m,n}(-1) = 1$. 此外, 当 $h = -1$, 收敛域(4) 成为 $|z-z_0| < \min_{k \in I} |\xi_k - z_0|$. 证毕.

定理 3 设 t, h 及 α 为实数. 则如下定义之广义牛顿二项式

$$1 + \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n \right] \phi_{m,n}(h), \qquad (\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{7}$$

在区域

$$-1 < t < \frac{2}{|h|} - 1 \qquad (-2 < h < 0) \tag{8}$$

内收敛于 $(1+t)^{\alpha}$• 其中, $\phi_{m,n}h$ 由式(5)定义•

证明 复函 $(1+z)^{\alpha}(a \neq 0, 1, 2, 3 \cdots)$ 仅有一个奇点 $\xi_1 = -1$• 故, 根据定理1, 级数(7)在区域

$$|1+h+ht| < 1, \qquad (-2 < h < 0)$$

内收敛于 $(1+t)^{\alpha}$• 由上式, 式(8)显然成立• 证毕•

2 结 论

前述定理表明, 先将一个级数的各项依次乘以一个“趋近函数”, $\phi_{m,n}(h)$ 然后再求和, 在 h 取值适当时, 其收敛域往往可大大增加• 其次, 由于本文所证明的“广义泰勒定理”和“趋近函数” $\phi_{m,n}(h)$ 首先是在“同伦分析方法”的框架内以完全不同的方法给出的(详见文献[5]), 因此, 本文亦为“同伦分析方法”之有效性奠定了一个坚实的数理逻辑基础•

[参 考 文 献]

[1] Newton I. On the binomial theorem for fractional and negative exponents[A]. In: G D Walcott Ed. A Source Book in Mathematics[C]. New York: McGraw Hill Book Company, 1929, 224—228.

[2] Dienes P. The Taylor Series[M]. Oxford: Dover, 1931.

[3] 廖世俊. The proposed homotopy analysis method for nonlinear problems[D]. 博士论文. 上海: 上海交通大学, 1992.

[4] LIAO Shi_jun, An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1995, **30**: 371—380.

[5] LIAO Shi_jun. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters (Part 2): an application in fluid mechanics[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1997, **32**: 815—822.

[6] LIAO Shi_jun. A simple way to enlarge the convergence region of perturbation approximations[J]. Nonlinear Dynamics, 1999, **19**: 93—110.

[7] LIAO Shi_jun. An explicit, totally analytic approximation of Blasius' viscous flow problems[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1999, **34**: 759—778.

[8] LIAO Shi_jun. A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi-infinite flat plate [J]. J Fluid Mech, 1999, **385**: 101—128.

[9] LIAO Shi_jun, Campo A. Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems[J]. J Fluid Mech, 2002, **453**: 411—425.

[10] LIAO Shi_jun, An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere [J]. Internat J Non_Linear Mech, 2002, **37**: 1—18.

[11] Nayfeh A H. Perturbation Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2000.

[12] Lyapunov A M. General Problem on Stability of Motion[M]. London: Taylor & Francis, 1992. (English version)

[13] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G. Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin_Walled Structures[M]. Moscow: Mashinostroyenie, 1990.

[14] Adomian G. Nonlinear stochastic differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1976, **55**: 441—452.

[15] Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[16] Wazwaz A M. The decomposition method applied to systems of partial differential equations and to the reactioncdiffusion Brusselator model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2000, **110**: 251—264.

[17] Shawagfeh N T. Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, **131**: 517—529.

On a Generalized Taylor Theorem: a Rational Proof of the Validity of the So_Called Homotopy Analysis Method

LIAO Shi_jun

(School of Naval Architecture & Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstarct: A generalized Taylor series of a complex function was derived and some related theorems about its convergence region were given. The generalized Taylor theorem can be applied to greatly enlarge convergence regions of approximation series given by other traditional techniques. The rigorous proof of the generalized Taylor theorem also provides us with a rational base of the validity of a new kind of powerful analytic technique for nonlinear problems, namely the homotopy analysis method.

Key words: Taylor series; convergence and summability of series; homotopy analysis method; perturbation