应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0074_09

二维空间中半线性摄动波动方程初值问题解的渐近理论*

赖绍永[1], 胡青龙[2]

(1. 四川师范大学 数学系, 成都 610066; 2. 西昌师专 工程技术系, 西昌 630025)

(江福汝推荐)

摘要: 研究二维空间中具初值问题的半线性波动方程解的渐近理论, 在二次连续的古典空间中得到了形式近似解的渐近合理性在长时间范围内成立, 这一结果描述了渐近解的长时间存在性• 作为所得到的渐近理论的应用, 对二维空间中的一个特殊波动方程作出了分析•

关 键 词: 半线性波方程; 渐近性; 长时间; 应用
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

本文研究如下的半线性摄动波动方程的渐近理论•

$$u_{tt} - \Delta u = \varepsilon f(u, \varepsilon),\ t > 0 \qquad (x \in R^2), \tag{1}$$

$$u(0, x, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon) \qquad (x \in R^2), \tag{2}$$

$$u_t(0, x, \varepsilon) = u_1(x, \varepsilon) \qquad (x \in R^2), \tag{3}$$

这里 u 是实的未知函数, $\Delta = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, 参数 ε 满足 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0 \ll 1$, $f(u, \varepsilon)$、$u_1(x, \varepsilon)$ 及 $u_0(x, \varepsilon)$ 满足一定条件(见第 1 节), 要得到问题(1)~(3)的渐近理论就要求我们必须建立在古典意义下问题(1)~(3)的适定性和形式渐近解的有效性•

文[1]~[4]研究了一维空间中二阶半线性波动方程初边值问题的渐近理论, 得到了时间阶函数为 $T = O(|\varepsilon|^{-1})$• 当 $x \in \mathbf{R}$, 文[1]~[3]对二阶非线性波动方程初值问题的渐近理论提出了一些问题• 这是因为对偏微分方程初值问题解的渐近理论的研究要比初边值问题的研究困难一些• 文[5]对方程 $u_{tt} - u_{xx} + p^2 u = \varepsilon f(t, x, u, \varepsilon)\ (-\infty < x < \infty, p^2 > 0)$ 初值问题的渐近理论进行了讨论, 在 Sobolev 空间中得到了时间阶函数为 $O(|\varepsilon|^{-1})$• 对高维空间中偏微分方程解的渐近理论, 正如[2]指出的一样, 几乎是一个空白• 文[6]在 C^2 意义下研究了二维空间中二阶波动方程解的渐近理论, 并得到了时间阶函数为 $O(|\varepsilon|^{-1})$• 本文一个有趣的结果是: 在二维空间中, 二阶波动方程的渐近理论和形式渐近解的渐近性都在一个长时间范围 $0 \leqslant t \leqslant T = O(|\varepsilon|^{-\sigma})\ (\sigma > 1, \varepsilon \to 0)$ 或 $0 \leqslant t \leqslant T = \infty$ 内成立, 这一结果描述了

* 收稿日期: 2000_02_28; 修订日期: 2002_08_23
基金项目: 四川省青年基金资助课题(1999_09)
作者简介: 赖绍永(1965—), 男, 四川三台县人, 副教授, 硕士.

问题(1) ~ (3) 解的长时间存在性和对应渐近解的长时间有效性•

在第 1 节中我们将给出问题(1) ~ (3) 在 C^2 中的适定性• 在第 2 节中给出形式近似解的渐近有效性• 作为渐近理论的应用, 在第 3 节中我们将分析一个特殊的摄动波动方程•

为简单起见, 本文用 C 代表任意正常数, 且不依赖于 ε•

1 适定性

为证明问题(1) ~ (3) 在 C^2 中解的存在唯一性, 由[7] P. 409 知, 问题(1) ~ (3) 等价于如下的积分方程

$$u(t,x,\varepsilon) = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{u_0(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right] + \frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{u_1(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right\} +$$
$$\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{f(u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right\} =$$
$$= u^0(t,x,\varepsilon) + v^0(t,x,\varepsilon), \tag{4}$$

这里 $\mathrm{d}\xi$ 是 R^2 中的单位面积元•

假设非线性项 f 及 $u_0(x,\varepsilon)$、$u_1(x,\varepsilon)$ 满足下面条件:

(i) 关于 u, $f(u,\varepsilon)\in C^2$, $f(0,\varepsilon) = f_u(0,\varepsilon) = f_{uu}(0,\varepsilon) = 0$,

(ii) 如果 $|u(t,x,\varepsilon)| < M$, $|v(t,x,\varepsilon)| < M$, 存在常数 $p > 5$, $A > 0$ 使得

$$|f(u,\varepsilon)| \leqslant A,$$
$$|f_{uu}(u,\varepsilon) - f_{vv}(v,\varepsilon)| \leqslant A|w|^{p-3}|u-v|,$$

这里 $w = \max\{|u|, |v|\}$• 常数 M 及 A 不依赖于 ε•

(iii) $u_0(x,\varepsilon)$ 及 $u_1(x,\varepsilon)$ 满足

$$|\partial_x^\alpha u_0(x,\varepsilon)|, |\partial_x^\beta u_1(x,\varepsilon)| \leqslant \frac{G}{(1+|x|)^{\kappa+1}} \qquad \left(0<\kappa<\frac{1}{2}\right),$$

这里 α, β 为重指标, $|\alpha|\leqslant 3$, $|\beta|\leqslant 2$, G 不依赖于 ε•

令

$$J_\kappa = \begin{cases}(t,x), t\geqslant 0, & x\in\mathbf{R}^2, \kappa > \dfrac{2}{p-1},\\ (t,x), 0<t\leqslant T, & x\in\mathbf{R}^2, 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\text{•}\end{cases}$$

对任意 $W\in C^2(J_\kappa)$, 定义范数

$$\|W\|_{J_\kappa} = \sup_{(t,x)\in J_k}[(1+t+|x|)^\kappa\|W(t,x,\varepsilon)\|] < \infty, \tag{5}$$

这里

$$\|W(t,x,\varepsilon)\| = \sum_{0\leqslant j+j_1+j_2\leqslant 2}\left|\frac{\partial^{j+j_1+j_2}W(t,x,\varepsilon)}{\partial t^j\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_2}}\right|\text{•}$$

由 $C^2(J_\kappa)$ 的定义知, 我们知道 $C^2(J_\kappa)$ 是一个 Banach 空间, 对任意 $u\in C^2(J_\kappa)$, $\|u\|_{J_\kappa}$ 有界• 我们将应用不动点定理证明问题(1) ~ (3) 的解在 $C^2(J_\kappa)$ 中的存在唯一性•

首先引入[8] 中第 127 页的两个引理•

引理 1 如果 $0<\kappa<1/2$, 则

$$\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+|x+t\xi|)^{1+\kappa}} \leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^\kappa},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+|x+t\xi|)^{1+\kappa}}\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\cdot$$

引理 2　假设 $u_0(x,\varepsilon)$, $u_1(x,\varepsilon)$ 满足 iii), 则

$$\|u^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\qquad\left(0<\kappa<\frac{1}{2}\right)\cdot$$

定义算子 Λ 如下

$$\Lambda u(t,x,\varepsilon)=\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{u_0(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi\right]+\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{u_1(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi\right\}+$$
$$\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{f(u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi d\tau\right\}=$$
$$u^0(t,x,\varepsilon)+v^0(t,x,\varepsilon)\cdot$$

引理 3　假设 f、u_0、u_1 满足假设 i) ~ iii), 对任意 $u,v\in C^2(J_\kappa)$ 和 $p>5$ 则

a) $$\|\Lambda u\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C}{(1+t+|x|)^{\kappa}}+\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(\text{当 }\kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C}{(1+t+|x|)^{\kappa}}+\dfrac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\|u\|_{J_\kappa} & \left(\text{当 }0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)\cdot\end{cases}$$

b) $$\|\Lambda u-\Lambda v\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u-v\|_{J_k}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(\text{当 }\kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\|u-v\|_{J_\kappa} & \left(\text{当 }0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)\cdot\end{cases}$$

证明　因

$$v^0(t,x,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{f(u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi d\tau,\tag{6}$$

$$v^0_t(t,x,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{f(u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi d\tau+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{f_u\cdot u_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\cdot\xi d\xi d\tau,\tag{7}$$

这里 $\gamma'=x+(t-\tau)\xi$,

$$v^0_{tt}(t,x,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{f(u(t,x,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi+$$
$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{f_u\cdot u_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\xi d\xi d\tau+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\Big\{\big[f_{uu}u^2_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)+$$
$$f_u\cdot u_{\gamma\gamma}(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)\big]\Big\backslash\sqrt{1-|\xi|^2}\Big\}\cdot\xi^2d\xi d\tau\cdot\tag{8}$$

由(i)、(ii) 得

$$
\begin{aligned}
&|f(u(t,x,\varepsilon),\varepsilon)| \leqslant C|u(t,x,\varepsilon)|^{p}\frac{(1+t+|x|)^{\kappa p}}{(1+t+|x|)^{\kappa p}} = \\
&\quad \frac{C\|u\|^{p}_{J_k}}{(1+t+|x|)^{\kappa p}} \leqslant \frac{C\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa p}},
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&|f_u \cdot u_\gamma(\tau, x+(t-\tau)\xi, \varepsilon)| \leqslant \\
&\quad C|u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|^{p-1}|u_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)| = \\
&\quad \frac{C[(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa}|u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|]^{p-1}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p-\kappa}} \times \\
&\quad \frac{[(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa}|u_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|]}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa}} \leqslant \\
&\quad \frac{C\|u\|^{p-1}_{J_\kappa}\|u\|_{J_\kappa}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}} \leqslant \frac{C\|u\|_{J_\kappa}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&|f_{uu}u^2_\gamma(\tau, x+(t-\tau)\xi, \varepsilon)| \leqslant \\
&\quad C|u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|^{p-2}|u_\gamma(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|^{2} = \\
&\quad \frac{C[(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa}|u(\tau,(x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)|]^{p-2}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p-2\kappa}} \times \\
&\quad \frac{C\|u\|^{p-2}_{J_\kappa}\|u\|^{2}_{J_\kappa}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}} \leqslant \frac{C\|u\|_{J_\kappa}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

和(10)(11)同样的估计，我们有

$$
|f_u u_{\gamma\gamma}(\tau, x+(t-\tau)\xi, \varepsilon)| \leqslant \frac{C\|u\|_{J_\kappa}}{(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}}. \tag{12}
$$

由(9)～(12)和(6)～(8)知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2}\left|\frac{\partial^i v^0(t,x,\varepsilon)}{\partial t^i}\right| \leqslant \frac{C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa p}} + \\
&\quad C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t (t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}} + \\
&\quad C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa p}} = \\
&\quad I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}
$$

由引理1有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leqslant C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t\frac{t-\tau}{(1+\tau)^{\kappa p-(\kappa+1)}}\int_{|\xi|<1}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+\tau+|x+(t-\tau)\xi|)^{\kappa+1}} = \\
&\quad C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t\frac{1}{(1+\tau)^{\kappa p-1}}\int_{|\xi|<1}\frac{t-\tau}{1+\tau}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}\left(1+\left|\frac{x}{1+\tau}+\frac{t-\tau}{1+\tau}\xi\right|\right)^{\kappa+1}} \leqslant \\
&\quad C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t\frac{1}{(1+\tau)^{\kappa p-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\left(1+\frac{t-\tau}{1+\tau}+\frac{|x|}{1+\tau}\right)^{\kappa}} = \\
&\quad C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau)^{\kappa p-(\kappa+1)}}\cdot\frac{1}{(1+t+|x|)^{\kappa}} = \\
&\quad \frac{C|\varepsilon|\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau)^{\kappa p-(\kappa+1)}}.
\end{aligned}
$$

如果 $\kappa p-(\kappa+1)>1$, 即 $\kappa>\dfrac{2}{p-1}$, 则$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau)^{\kappa p-\kappa-1}}$收敛• 如果 $0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}$, 即 $2+\kappa-\kappa p>0$, $1\leqslant(1+t)^{2+\kappa-\kappa p}(t\geqslant 0)$, 则

$$\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau)^{\kappa p-(\kappa+1)}}\leqslant\frac{C}{2+\kappa-\kappa p}\left|1-(1+t)^{2+\kappa-\kappa p}\right|\leqslant\frac{C}{2+\kappa-\kappa p}(1+t)^{2+\kappa-\kappa p}•$$

因此

$$I_2\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{13}$$

与 I_2 作同样的估计, 运用引理 1 有

$$I_3\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right)\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{14}$$

因

$$I_1=\frac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa p}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{15}$$

由(13)~(15)知

$$\sum_{i=0}^{2}\left|\frac{\partial v^0(t,x,\varepsilon)}{\partial t^i}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{16}$$

和(16)式作同样的估计有

$$\sum_{0\leqslant j_1+j_2+j_3\leqslant 2}\left|\frac{\partial^{j_1+j_2+j_3}v^0(t,x,\varepsilon)}{\partial t^{j_1}\partial x_1^{j_1}\partial x_2^{j_3}}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{17}$$

进一步有

$$\|v^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa}(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)•\end{cases}\tag{18}$$

由(18)及引理 2 知 a) 成立• 对任意 $u,v\in C^2(J_\kappa)$, 在(18) 式的证明中用 $u-v$ 代替 u 则

$$\|\Lambda u-\Lambda v\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u-v\|_{J_\kappa}}{(1+t+|x|)^{\kappa}} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}}{(1+t+|x|)^{\kappa}}\|u-v\|_{J_\kappa} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right).\end{cases}$$

引理 3 得证

下面给出适定性定理.

定理 1　假设非线性项 $f(u,\varepsilon)$, 初值 $u_0(x,\varepsilon)$、$u_1(x,\varepsilon)$ 满足 i) ~ iii) , $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$, $0<\kappa<1/2$, 则

① 如果 $\kappa>2/(p-1)(p>5)$, 问题(1) ~ (3) 存在唯一的整体 C^2 解.

② 如果 $0<\kappa<2/(p-1)(p>5)$, $0<t\leqslant T=O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-\kappa(p-1)}})$, 问题(1) ~ (3) 存在唯一的局部 C^2 解

证明　对任意 $u,v\in C^2(J_\kappa)$, 由引理 3 知

$$\|\Lambda u\|_{J_\kappa}\leqslant\begin{cases}C+C|\varepsilon|\,\|u\|_{J_\kappa} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] C+C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}\|u\|_{J_\kappa} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right).\end{cases}$$

$$\|\Lambda u-\Lambda v\|_{J_\kappa}\leqslant\begin{cases}C|\varepsilon|\,\|u-v\|_{J_\kappa} & \left(当\ \kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}\|u-v\|_{J_\kappa} & \left(当\ 0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right).\end{cases}$$

当 $\kappa>\dfrac{2}{p-1}$ 时, 选取 ε 充分小使得 $C|\varepsilon|<\dfrac{1}{2}$, 则知 Λ 是 $C^2(J_\kappa)\to C^2(J_\kappa)$ 的压缩映象算子, 于是 ①成立.

如果 $0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}$, 假设 ε 充分小使得 $C|\varepsilon|(1+t)^{1-\kappa(p-1)}\leqslant C|\varepsilon|(1+T)^{2-\kappa(p-1)}\leqslant L<1$, 则知 Λ 是 $C^2(J_\kappa)$ 到 $C^2(J_\kappa)$ 的压缩映象算子. 于是 ②成立.

注　如果 $0<\kappa<\dfrac{1}{2}$, $\kappa>\dfrac{2}{p-1}(p>5)$, 由 ① 知 $T=\infty$. 如果 $0<2-\kappa(p-1)<1$, $\kappa<\dfrac{2}{p-1}$, 即 $\dfrac{1}{p-1}<\kappa<\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{p-1}\right\}$, 则 $T=O(|\varepsilon|^{\frac{1}{2-\kappa(p-1)}})$ 优于 $O(|\varepsilon|^{-1})$.

2　形式渐近解的有效性

因问题(1) ~ (3) 包含了一个小参数 ε, 可以用摄动方法去构造问题(1) ~ (3) 的渐近解, 用许多扰动方法构造的解都是在 ε 的某些阶意义下相等去满足相应的微分方程, 这样的解叫做形式渐近解, 为了证明构造的形式渐近解为渐近解, 我们需要在 $C^2(J_\kappa)$ 空间中作进一步的分析.

假设在 $J_\kappa\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ 中 $v(t,x,\varepsilon)$ 满足

$$v_{tt}-\Delta v=f(v,\varepsilon)+|\varepsilon|^m c_1(t,x,\varepsilon)\qquad(m>1),\tag{19}$$

$$v(0,x,\varepsilon)=u_0(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_2(x,\varepsilon)=v_0(x,\varepsilon)\qquad(0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1),\tag{20}$$

$$v_t(0,x,\varepsilon)=u_1(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_3(x,\varepsilon)=v_1(x,\varepsilon)\qquad(0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1),\tag{21}$$

这里 $f(u,\varepsilon)$、$u_0(x,\varepsilon)$ 和 $u_1(x,\varepsilon)$ 满足 i) ~ iii). 进一步假设 $c_1(t,x,\varepsilon)$, $c_2(x,\varepsilon)$, $c_3(x,$

$\varepsilon)$ 满足:

$$c_1(t,x,\varepsilon)\in C^2(J_\kappa),\ \|c_1(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{1}{(1+t+|x|)^{\kappa p}},\tag{22}$$

$$|\partial_x^\alpha c_2(x,\varepsilon)|,\ |\partial_x^\beta c_2(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{\kappa+1}},\ |\alpha|\leqslant 3,\ |\beta|\leqslant 2,\ 0\leqslant\kappa<\frac{1}{2}\cdot\tag{23}$$

由定理 1 知, 初值问题(19)~(21) 存在唯一解 $v(t,x,\varepsilon)\in C^2(J_\kappa)$, 另一方面(19)~(21) 等价于如下积分方程

$$v(t,x,\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{v_0(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right]+\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{v_1(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{f(v(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)+|\varepsilon|^m c_1(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\cdot$$

如果 $u\in C^2(J_\kappa)$ 是问题(1)~(3) 的解, 则

$$v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_2(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right]+$$
$$\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_3(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\Big\{[f(v(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$f(u(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)]+$$
$$|\varepsilon|^m c_1(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon)\Big\}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\cdot\tag{24}$$

注意到(22)~(23) 及引理 1, 和引理 3 同样的证明, 我们有

$$\|v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)\|\leqslant$$
$$\begin{cases}\dfrac{C|\varepsilon|\,\|u-v\|_{J_\kappa}+C|\varepsilon|^{m-1}}{(1+t+|x|)^\kappa} & \left(\text{当 }\kappa>\dfrac{2}{p-1}\right),\\[2ex] \dfrac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}(\|u-v\|_{J_\kappa}+C|\varepsilon|^{m-1})+C|\varepsilon|^{m-1}}{(1+t+|x|)^\kappa} & \left(\text{当 }0<\kappa<\dfrac{2}{p-1}\right)\cdot\end{cases}$$

选择 ε 充分小使得 $C|\varepsilon|<\frac{1}{2}$ 及 $C|\varepsilon|(1+t)^{2-\kappa(p-1)}\leqslant L<1$ 成立, 则

$$\|v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|^{m-1})\cdot$$

下面给出渐近性定理•

定理 2　假设 $v(t,x,\varepsilon)$ 满足(19)~(21), 非线性项 f, 初值 u_0、u_1 满足 i)~iii)• $c_1(t,x,\varepsilon)$, $c_2(x,\varepsilon)$, $c_3(x,\varepsilon)$ 满足(22)、(23)• 则当 $m>1$ 时, 形式渐近解 $v(t,x,\varepsilon)$ 是初值问题(1)~(3) 解 $u(t,x,\varepsilon)$ 的渐近渐近解, 且

①如果 $(t,x)\in[0,+\infty)\times R^2$, $\frac{2}{p-1}<\kappa<\frac{1}{2}(p>5)$, 则 $\|u-v\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|^{m-1})$

②如果 $x\in R^2$ 及 $0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-\kappa(p-1)}}$, $0<\kappa<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{p-1}\right\}$, 这里 $L>0$ 充分小

且不依赖于 ε. 则 $\|u-v\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|^{m-1})$.

3 应　　用

本节将应用定理 2 去分析如下的摄动波动方程

$$u_{tt}-\Delta u=\varepsilon u^6,x\in R^2,0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1,t>0, \tag{25}$$

给定初值

$$u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\psi(x),x\in R^2, \tag{26}$$

这里 $|\partial_x^\alpha\varphi(x)|,|\partial_x^\beta\psi(x)|\leqslant\dfrac{1}{(1+|x|)^{1+\kappa}},0<\kappa<\dfrac{1}{2},|\alpha|\leqslant 3,|\beta|\leqslant 2$, 因形式渐近解可以采用渐近级数去构造. 使用[1]、[2] 同样的方法, 我们要求 $\varphi(x),\psi(x)$ 充分光滑, 以便定理 1 及定理 2 的假设都成立. 在定理 2 意义下, $\bar{u}(t,x)$ 可以在 C^2 意义下满足(25) ~ (26), 即 $\|u(t,x)-\bar{u}(t,x)\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|)(\varepsilon\to 0,(t,x)\in J_\kappa)$. 为构造 $\bar{u}$, 假设 $u(t,x,\varepsilon)$ 有如下的渐近展开式:

$$u(t,x,\varepsilon)=u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\varepsilon^2u_2(t,x)+\cdots. \tag{27}$$

在定理 2 意义下, 我们可知级数(27) 是一致收敛的 ($\varepsilon\to 0$).
把(27) 代入(25) ~ (26), 由 ε 同次幂相等得

$$\begin{cases}u_{0tt}-\Delta u_0=0,\\ u_0(0,x)=\varphi(x),\ u_{0t}(0,x)=\psi(x),\end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases}u_{1tt}-\Delta u_1=u_0^6,\\ u_1(0,x)=0,\ u_{1t}(0,x)=0\end{cases} \tag{29}$$

由于(28) (29) 是线性方程, 我们可以知道 $u_0(t,x),u_1(t,x)$ 的具体表达式如下

$$u_0(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\varphi(x+t\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right]+\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\psi(x+t\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}},$$

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{u_0^6(\tau,x+(t-\tau)\xi)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi.$$

令 $\bar{u}=u_0+\varepsilon u_1$, 则

$$\begin{aligned}\bar{u}_{tt}-\Delta\bar{u}-\varepsilon\bar{u}^6&=(u_{0tt}-\Delta u_0)+\varepsilon(u_{1tt}-\Delta u_1)-\varepsilon(u_0+\varepsilon u_1)^6=\\ &\varepsilon(u_{1tt}-\Delta u_1-u_0^6)-\varepsilon^2C(u_0,u_1)=-\varepsilon^2C(u_0,u_1),\end{aligned}$$

这里 $C(u_0,u_1)$ 是 u_0 及 u_1 的 6 次多项式. 选取 u_0,u_1 充分光滑, 则 $\|C\|\leqslant C/(1+t+|x|)^{\kappa p}$. 由定理 2 知

$$\|u-\bar{u}\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|), 当(t,x)\in J_\kappa$$

因

$$\begin{aligned}\|u-u_0\|_{J_\kappa}&\leqslant\|u-\bar{u}\|_{J_\kappa}+\|\bar{u}-u_0\|_{J_\kappa}=\\ &O(|\varepsilon|)+\|\varepsilon u_1(t,x)\|_{J_\kappa}=O(|\varepsilon|)\end{aligned}$$

令 $\kappa=23/50>2/5$, 当 $(t,x)\in[0,+\infty)\times R^2$ 时, 则 $\|u-\bar{u}\|_{J_{23/50}}=O(|\varepsilon|)$ 及 $\|u-u_0\|_{J_{23/50}}=O(|\varepsilon|)$.

如果令 $\kappa=3/10$, 则当 $x\in R^2,0<t\leqslant L|\varepsilon|^{-2}$ 时(L 充分小且不依赖于 ε) 有

$$\| u - u \|_{J_{23/50}} = O(|\varepsilon|) \text{ 及 } \| u - u_0 \| = O(|\varepsilon|)\cdot$$

致谢 感谢审稿先生对本文提出的合理建议和修改•

[参 考 文 献]

[1] Van Horssen W T. An asymptotic theory for a class of initial boundary value problems for weakly nonlinear wave equation with an application to a model of the galloping oscillation of overhead transmission lines[J]. SIAM, J Appl Math, 1988, **48**(6): 1227—1243.

[2] Van Horssen W T, Van Der Burgh A H P. On initial boundary value problems for weakly semilinear telegraph equations: asymptotic theory and application[J]. SIAM J Appl Math, 1988, **48**(4): 719—737.

[3] Van Horssen W T. Asymptotics for a class of semilinear hyperbolic equations with an application to a problem with a quadratic nonlinearity[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application, 1992, **19**(6): 501—503.

[4] Blom C J, Van Der Burgh A H P. Validity of Approximations for time perodic solutions of a forced nonlinear hyperbolic differential equation[J]. Applicable Analysis, 1994, **52**(4): 155—176.

[5] 赖绍永. 半线性摄动电板方程的渐近理论及应用[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**B(7): 657—616.

[6] LAI Shao_yong, MU Chun_lai. The asymptotic theory of initial value problems for semilinear wave equations in three space dimensions[J]. Appl Math_JCU, 1997, **12**B(4): 321—332.

[7] Guenther Ronald B, Lee, John W. Parital Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations[M]. New Jersey: Prentice_Hall, 1988.

[8] K[illegible]ji Kubota. Existence of a global solution to a semilinear wave equations with initial data of non_compact support in low space dimensions[J]. Hokkaido Math Journal, 1993, **22**(1): 123—180.

The Asymptotic Theory of Initial Value Problems for Semilinear Perturbed Wave Equations in Two Space Dimensions

LAI Shao_yong[1], FU Qing_long[2]

(1. Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China;
2. Department of Technology, Xichang Teacher's College, Xichang, Sichuan 630025, China)

Abstract: The asymptotic theory of initial value problems for semilinear wave equations in two space dimensions was dealt with. The well_posedness and vaildity of formal approximations on a long time scale were discussed in the twice continuous classical space. These results describe the behavior of long time existence for the validity of formal approximations. And an application of the asymptotic theory is given to analyze a spacial wave equation in two space dimensions.

Key words: semilinear wave equation; asymptotics; long time scale; application