

文章编号: 1000-0887(2003) 08_0799_06

卫星编队飞行中 C_W 方程与轨道根数法的比较*

高云峰, 宝音贺西, 李俊峰

(1. 清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(郑泉水推荐)

摘要: 目前卫星编队飞行动力学与控制的研究得到了广泛的重视, 这些研究的理论主要是基于描述卫星相对运动的 Clohessy-Wiltshire(C_W) 方程, 但根据特例及定性分析, 表明 C_W 方程在初始条件的选取、解的周期性等方面与实际情况不符, 从星的能量也不守恒. 以卫星轨道根数为基础, 提出了卫星编队飞行中的相对轨道根数法, 克服了 C_W 方程的局限性, 物理概念清楚, 应用范围广, 解的周期性成为自然结论. 在主星为小偏心率的情况下, 得到了简化的相对运动方程. 最后对两种方法进行了比较, 指出了 C_W 方程的局限性及其原因.

关键词: 卫星编队飞行; 相对运动; C_W 方程; 相对轨道根数; 周期解

中图分类号: V412 **文献标识码:** A

引 言

从 20 世纪 80 年代中期开始, 国际上出现了小卫星的研制热潮. 仅从 1985 年到 1994 年的 10 年间, 世界各国就发射了 300 多颗小卫星, 约占同期卫星总发射量的 27%^[1]. 与大卫星相比, 小卫星的功能单一, 所以为了充分发挥小卫星的潜在优势, 先后出现了卫星星座和卫星编队飞行概念. 即小卫星的优势在于多颗卫星的“群体”效应.

相对比较成熟的卫星星座技术, 卫星编队飞行还处于理论研究阶段. 卫星编队飞行的特点是有多颗卫星, 保持一定的距离, 构成一定的队形, 相互间可以通讯协作, 在整体上相当于一颗巨大的“虚拟卫星”^[2].

由于编队飞行的卫星之间的距离可以从几十米到几十千米, 与传统的大卫星相比, 有巨大的口径或测量基线, 在电子侦察、立体成像、精确定位、气象测量等方面都有很大的优势^[3]. 美国国家航空航天局(NASA)和国防部已把编队飞行技术视为下一代关键技术之一, 于 1998 年启动了大学纳米星(Nanosat)计划, 共有 10 所大学提出了 5 项纳米卫星编队飞行计划, 并计划于 2001 年开始发射和在轨试验^[4].

卫星编队飞行的关键问题是卫星间的相对运动规律. 在一般情况下, 相对运动微分方程

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_05_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10202008); 中国博士后基金资助项目((2001)31)

作者简介: 高云峰(1967—), 男, 武汉人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 航天器动力学与控制, 运动生物力学(E-mail: gaoyunfeng@tsinghua.edu.cn).

没有解析解。如果一颗卫星是圆轨道,另一颗卫星是近圆轨道,且相对距离较近,则相对运动微分方程可以简化为常系数的线性微分方程组,此时方程称为 Clohessy_Wiltshire 方程(简称 C_W 方程)^[5],也有文献称为 Hill 方程^[6]。

近两年很多研究者在编队飞行方面做了大量的工作,基本上是以 C_W 方程为理论基础^[6,7]。虽然 C_W 方程是近似方程,但大部分研究者都没有注意其解的误差问题。有研究表明 C_W 方程解的误差是随时间增长的^[8];但也有研究利用轨道根数,得到一般情况下的相对运动方程,但认为该方程在小偏心率情况下与 C_W 方程的误差为同一数量级^[9]。

本文的研究表明, C_W 方程所描述的运动在解的的周期性、初始条件选取、能量守恒等方面不符合实际情况,并提出了相对轨道根数法,克服了 C_W 方程的局限性。

1 C_W 方程及其反例

设主星(main satellite)为 S_1 , 从星(following satellite)为 S_2 (后面以下标 1 表示主星、2 表示从星)。定义 S_{1xyz} 为主星质心结体右手直角坐标系,其中坐标原点 S_1 为主星的质心, x 轴背离地心, z 轴垂直于卫星轨道平面, y 轴在卫星运动轨道平面内。设从地心 O 到 S_1, S_2 的矢径分别为 r_1 和 r_2 , S_2 相对于 S_1 的矢径为 ρ , 见图 1。设相对运动矢径 ρ 在主星结体坐标系中的投影为 x, y, z , 若不考虑主动控制及摄动,则 C_W 方程为^[5]

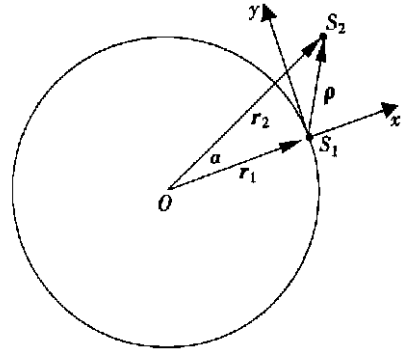


图 1 卫星编队飞行示意图

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega^2 y - 3\omega^2 x = 0, \\ \ddot{y} + 2\omega^2 x = 0, \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 ω 为主星绕地球运动的轨道角速度。方程(1)

积分后,得到 C_W 方程的解为

$$\begin{cases} x = 2 \left[2x_0 + \frac{y_0}{\omega} \right] - \left[\frac{2y_0}{\omega} + 3x_0 \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{x_0}{\omega} \right] \sin(\omega t), \\ y = \left[y_0 - \frac{2x_0}{\omega} \right] + 2 \left[\frac{2y_0}{\omega} + 3x_0 \right] \sin(\omega t) + 2 \left[\frac{x_0}{\omega} \right] \cos(\omega t) - 3(y_0 + 2\omega x_0)t, \\ z = \frac{z_0}{\omega} \sin(\omega t) + z_0 \cos(\omega t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_0, x_0, y_0, y_0, z_0, z_0$ 分别为 x, x, y, y, z, z 在 $t = 0$ 时的初始值。

由式(2)可见,在 C_W 方程的解中, y 方向(前进方向)包含有长期项, $-3(y_0 + 2\omega x_0)t$ 项导致卫星的相对运动在 y 方向会随时间而不断增大,从而不能长期保持编队飞行。为了使卫星能保持近距离编队,必须要求消除长期项的影响,即要求满足

$$y_0 = -2\omega x_0 \quad (3)$$

因此(3)式是 C_W 方程有周期解的条件。

C_W 方程及其解是否合理,可以通过两个特殊的例子来说明。

特例 1 在图 1 中,设相对运动的初始条件为

$$x_0 = z_0 = 0, y_0 \neq 0, x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

该初始条件满足 $y_0 = -2\omega x_0$, S_2 在 S_1 结体坐标系的 y 轴上,且解为

$$x = z = 0, y = y_0,$$

因此 C_W 方程预测这两颗卫星位置保持相对静止。

但是,主星半径为常数,相对距离又为常数,则从星半径为

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + \rho^2} = \sqrt{r_1^2 + y_0^2}$$

即主、从星均为圆轨道。但 $r_2 \neq r_1$ 表明两颗卫星不在同一圆轨道上。然而根据物理概念,不同圆轨道上两卫星的周期一定不同,它们之间不可能保持相对静止。

特例 2 在图 1 中,若设 S_1, S_2 在同一圆轨道上, $\angle S_1OS_2 = \alpha$ 为小角度。实际上同一圆轨道上的两颗卫星保持相对静止,由几何关系及运动学关系,初始运动条件为

$$x_0 = -r_1(1 - \cos\alpha), y_0 = r_1\sin\alpha, z_0 = 0, \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$$

由于 $\dot{y}_0 \neq 2\omega x_0$, 根据 C_W 方程,这种情况不可能保持长时间近距离编队。

根据上面的特例,可以发现 C_W 方程的结论与物理概念不符。

2 相对轨道根数法

卫星的运动可以用 6 个轨道根数来描述^[10]: 升交点赤经 Ω 、轨道倾角 i 、近地点幅角 ω 、半长轴 a 、偏心率 e 、卫星过近地点时刻 t_p 。在不考虑摄动以及主动控制时,这 6 个量均为常数,可以完全反映卫星的运动。

为了方便描述卫星的运动,在其轨道平面内(见图 2),设 O 为地心, S 为卫星质心, P 为轨道的近地点, ON 为卫星轨道平面与地球赤道平面的交线。定义 $Ox'y'z'$ 为卫星轨道坐标系,始终与结体坐标系平行。定义 OP 与 OS 的夹角为真近点角 f , ON 与 OS 的夹角为卫星轨道角 θ , M 为平近点角, E 为偏近点角。真近点角 f 、平近点角 M 、偏近点角 E 存在一定的关系,设 r 为 OS 的长度,其大小为^[10]

$$r = a(1 - e^2)/(1 + e\cos f)$$

对于卫星编队飞行问题,从星相对主星的相对运动为

$$\rho = r_2 - r_1 \tag{4}$$

式(4)是相对运动的矢量式,如向主星的结体坐标系中投影,有

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = (A(\Omega_1) A(i_1) A(\theta_1))^T (A(\Omega_2) A(i_2) A(\theta_2)) \begin{Bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

其中 $\begin{Bmatrix} x, y, z \end{Bmatrix}^T$ 表示相对运动的矢径 ρ 在主星结体坐标系 $S_1x_1y_1z_1$ 中的列阵; $\begin{Bmatrix} r_1, 0, 0 \end{Bmatrix}^T$ 表示矢径 r_1 在主星轨道坐标系中的列阵; $\begin{Bmatrix} r_2, 0, 0 \end{Bmatrix}^T$ 表示矢径 r_2 在从星轨道坐标系中的列阵; $(A(\Omega_1) A(i_1) A(\theta_1))$ 、 $(A(\Omega_2) A(i_2) A(\theta_2))$ 分别表示 $S_1x_1y_1z_1$ 、 $S_2x_2y_2z_2$ 相对惯性坐标系 $OXYZ$ 的坐标转换矩阵,见图 3。

方程(5)就是利用轨道根数描述的卫星编队飞行的相对运动方程。由于轨道根数均为常数,而变量 $f_1, f_2, \theta_1, \theta_2$ 均为周期函数,所以相对运动一定不会发散。

在实际编队飞行中,卫星应保持近距离,因此两卫星的各个轨道根数也很接近。设 $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$, $\Delta i = i_2 - i_1$ 均为小量,则式(5)可简化为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2\cos f_2} \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta - \Delta\Omega\cos i_1\sin\Delta\theta \\ \sin\Delta\theta + \Delta\Omega\cos i_1\cos\Delta\theta \\ -\Delta\Omega\sin i_1\cos\theta_2 + \Delta i\sin\theta_2 \end{bmatrix} - \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1\cos f_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

如果主、从星的偏心率 e_1, e_2 均为小量,则式(6)可进一步简化。根据真近点角 f 与平近点角 M 的关系,保留 e_1, e_2 的一次项,有

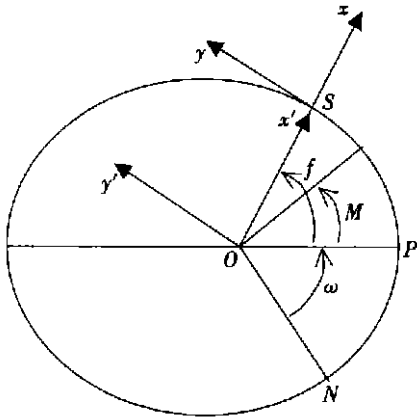


图2 卫星轨道平面内的转角

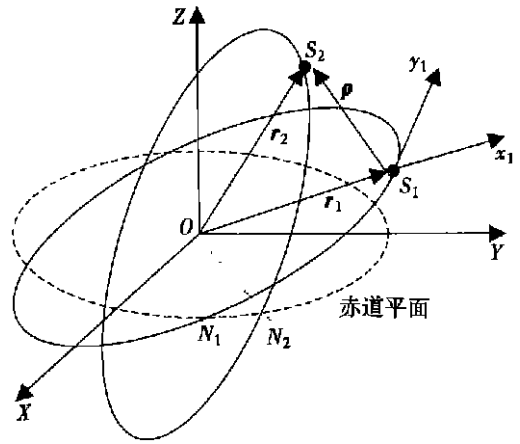


图3 卫星编队相对飞行示意图

$$\begin{cases} M_1 = \frac{2\pi}{T_1}(t - t_{p1}), \\ M_2 = \frac{2\pi}{T_2}(t - t_{p2}), \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 \approx M_1 + 2e_1 \sin M_1, \\ f_2 \approx M_2 + 2e_2 \sin M_2. \end{cases}$$

利用 $\theta_1 = \omega_1 + f_1$, $\theta_2 = \omega_2 + f_2$, 得

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta^* + \frac{2\pi\Delta T}{T_1 T_2} t, \quad (7)$$

$$\text{其中 } \Delta\theta^* = \left[\Delta\omega - \frac{2\pi t_{p2}}{T_2} + \frac{2\pi t_{p1}}{T_1} \right] + 2e_2 \sin M_2 - 2e_1 \sin M_1. \quad (8)$$

注意到 $\Delta\theta^*$ 虽然随时间变化, 但可以一直保持为小量. $t(2\pi\Delta T)/(T_1 T_2)$ 则随时间不断增加. 但当两卫星的运行周期相同时, $\Delta\theta$ 始终为小量, 长期编队有可能实现. 因此在卫星编队飞行中, 主星与从星的轨道周期相同是一个重要条件, 即

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 0 \text{ 或 } a_1 = a_2 = a. \quad (9)$$

根据式(6)~(9), 主星为小偏心率情况下的相对运动方程简化为

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{bmatrix} -\Delta e \cos M_1 \\ \Delta\omega - 2\pi\Delta t_p/T + \Delta\Omega \cos i_1 + 2\Delta e \sin M_1 \\ -\Delta\Omega \sin i_1 \cos(\omega_2 + M_2) + \Delta i \sin(\omega_2 + M_2) \end{bmatrix} a. \quad (10)$$

方程(10)的右边只有平近点角 M_1, M_2 随时间均匀变化, 其余参数均为常数.

3 两种方法的比较

1 解的周期性与初始条件的比较

根据物理概念, 两轨道周期相同的卫星在地球中心引力场中都绕地球做周期运动, 因此相对运动也一定是周期性的.

而一般情况下 C_W 方程的解不是周期解, 只有满足 $\gamma_{\partial} = -2\omega_0$, C_W 方程才有周期解. 因此 $\gamma_{\partial} = -2\omega_0$ 对于 C_W 方程的周期解有重要意义. 但根据特例1、2, $\gamma_{\partial} = -2\omega_0$ 对于保证相对运动具有周期性既不是充分条件也不是必要条件. 在 C_W 方程中, 初始条件只有6个, 除了 $\gamma_{\partial} = -2\omega_0$, 其它的相对运动初始参数没有限制. 但实际上, 其余5个参数仍可能有某些限制关系, 而 C_W 方程本身给不出这个关系, 只能任意给定. 如在特例2中, S_1, S_2 在同一圆轨道上, 则 x_{∂} 不能随意取值.

利用相对轨道根数法得到的解一定是周期解。为了保持长时间近距离编队,各轨道根数应比较接近,且轨道半长轴应相等。利用轨道根数法分析特例 1、2,不会与物理概念矛盾。轨道根数法有 12 个参数,保证 $a_1 = a_2 = a$ 后,则有 11 个独立参数。根据具体的队形,这 11 个参数还必须满足一定的约束关系,具体的求解方法见文献[11]。

2 能量变化的比较

根据物理概念,在不考虑摄动及主动控制的情况下,每颗卫星的能量守恒。因此可以根据能量变化来验证各种方法是否合理。

设从星初始时刻能量为 E_0 ,任意时刻的能量为 E 。定义能量的相对变化率为

$$\eta = (E - E_0)/E_0 \quad (11)$$

为了便于比较,各种方法采用等价的初始条件,即给出主、从星的轨道根数(主星为圆轨道),然后根据轨道根数与位置、速度的转换关系^[12],求出从星相对运动的初始位置和速度,并进而求出从星的能量。

对于未简化的轨道根数法,利用轨道根数,可以计算出从星任意时刻的位置和速度,得到能量的相对变化率为 10^{-15} 数量级。

对于简化的轨道根数法,由于略去的是 Δe 的一阶以上的高阶小量,因此相对误差约为 $(\Delta e)^2$ 数量级,当 $\Delta e = 10^{-3}$ 时相对误差的数量级为 10^{-6} 。

对于 C_W 方程,得到能量的相对变化率为 10^0 数量级。

3 方程简化处理的比较

前面提到的 C_W 方程的局限性,实际上是由于方程推导过程中的近似处理带来的。

从物理概念上分析,C_W 方程的推导过程中对从星矢量的大小、方向进行了近似处理,其实质相当于改变了地球引力的大小和方向。引力的改变(特别是引力方向的改变)虽然数量级很小,但破坏了地球引力场是中心引力场这一重要性质,结果从星不再做开普勒运动,其周期性不能保证。而主星没有近似处理,仍是周期运动。因此在 C_W 方程中,周期性条件不能自动满足。

从数学角度分析,C_W 方程所做的近似处理,相当于把一个非线性方程线性化了。一个典型的例子就是 Duffing 方程,它的解本来是周期的,如果采用摄动法(如 Poincaré 法)进行处理,解就会出现长期项。但是采用改进的摄动法(如 KBM 法),解就可以不包括长期项^[13]。

轨道根数法在近似处理时,没有破坏地球中心引力场这一性质,因此解的周期性、能量守恒等都比 C_W 方法的结果要好。

4 结 论

用 C_W 方程描述卫星编队飞行的相对运动问题,主星必须是圆轨道,且解的周期性、初始条件、能量守恒等方面与物理概念不符,因此 C_W 方程不适宜描述卫星长期编队飞行。

轨道根数法克服了 C_W 方程的局限性,物理概念清楚,应用范围广。主星不必是圆轨道,编队飞行的时间、距离不受限制,解的周期性自然满足,初始条件可任意选取,符合能量守恒定律。对于简化的轨道根数法,仍有以上大部分特点,比 C_W 方法的结果要好。

[参 考 文 献]

- [1] 林来兴.微小卫星编队飞行组成虚拟卫星研究[A].见:林来兴编.微小卫星编队飞行组成分布式卫星技术研讨会[C].北京:国家高技术专家委员会微星技术组,2002,1—35.
- [2] 肖业伦,张晓敏.微小卫星编队飞行动力学特征与构形设计[A].见:林来兴编.微小卫星编队飞

- 行组成分布式卫星技术研讨会[C]. 北京: 国家高技术专家委员会微星技术组, 2002, 133—144.
- [3] David Folta, Francesco Bordi, Christopher Scolese. Considerations on formation flying separation for earth observing satellite missions[J]. AAS 92_144. Advances in the Astronautical Sciences, 1992, 79 (2): 803—822.
- [4] David Weidow, John Bristow. NASA/ DoD university nano_satellites for distributed spacecraft control [A]. In: SSC99_Y_5. 13th. AIAA/ USU Small Satellite Conference [C]. Logan, Utah, 1999, 23—26.
- [5] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. Journal of the Aerospace Science, 1960, 27: 653—674.
- [6] Yan Q, Kapila V, Sparks A G. Pulse_based periodic control for spacecraft formation flying[A]. In: Proceeding of the American Control Conference [C]. Chicago, Illinois, 2000, 374—378.
- [7] Kapila V, Sparks A G, Buffington J M, et al. Spacecraft formation flying: dynamics and control[A]. In: Proceeding of the American Control Conference [C]. San Diego, California, 1999, 4137—4141.
- [8] 杨维廉. 卫星相对运动的新解法[J]. 中国空间科学技术, 1999, 20(6): 20—26.
- [9] 张晓敏. 航天器相对轨道运动动力学与控制研究[D]. [博士学位]. 北京: 北京航空航天大学, 2000.
- [10] 章仁为. 航天器轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998, 1—7.
- [11] 高云峰. 卫星编队飞行相对轨道运动动力学研究[D]. [博士学位]. 北京: 清华大学, 2001.
- [12] 杨家骝. 航天器轨道动力学与控制[M]. 北京: 宇航出版社, 1995, 52—54.
- [13] 陈予恕, 唐云, 郑兆昌, 等. 非线性动力学中的现代分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 1992, 10—30.

Comparison of Two Methods in Satellite Formation Flying

GAO Yun_feng, BAOYIN He_xi, LI Jun_feng

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: Recently, the research of dynamics and control of the satellite formation flying has been attracting a great deal of attentions of the researchers. The theory of the research was mainly based on Clohessy_Wiltshire' s(C_W ' s) equations, which describe the relative motion between two satellites. But according to some special examples and qualitative analysis, neither the initial parameters nor the period of the solution of C_W ' s equations accord with the actual situation, and the conservation of energy is no longer held. A new method developed from orbital element description of single satellite, named relative orbital element method(ROEM), was introduced. This new method, with clear physics conception and wide application range, overcomes the limitation of C_W ' s equation, and the periodic solution is a natural conclusion. The simplified equation of the relative motion is obtained when the eccentricity of the main satellite is small. Finally, the results of the two methods(C_W ' s equation and ROEM) are compared and the limitations of C_W ' s equations are pointed out and explained.

Key words: satellite formation flying; relative motion; C_W ' s equaton; relative orbital element method; periodic solution