应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 08_0835_04

平面运动学位似运动 Steiner 公式的推广*

N. 库柔格鲁, M. 杜尔杜尔, A. 图塔

(昂达库日 麻伊什大学 科学和艺术学院 数学系, 土耳其)

(钱伟长推荐)

摘要: 对单参数闭平面复意义位似运动, 给出了 M ller 提出的 Steiner 公式和混合面公式的表达式• 利用推广的 Steiner 公式得到了位似运动的 Holditch 定理• 作为特例, 给出了 M ller 位似比 $h \equiv 1$ 时的结果•

关 键 词: 位似运动; Steiner 公式; Holditch 定理
中图分类号: O186.11 文献标识码: A

引 言

设 E 和 E' 分别为活动和固定复平面, $\{O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$、$\{O';\ \boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2\}$ 为相应的坐标系• 则由变换

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u}' + h\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1}$$

定义的运动称为单参数平面位似运动, 表示为 E/E', 其中 h 为位似比; φ 为运动 E/E' 的转动角, 即 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}'_1$ 间的夹角; $\boldsymbol{x} = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $\boldsymbol{x}' = x'_1 + \mathrm{i}x'_2$ 为复数, 分别表示活动和固定直角坐标系中的点 $X \in E$; 复数 $\boldsymbol{u}'$ 表示固定坐标系中的原点 O• 位似比 h, 转动角 φ 和 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{u}'$ 均为实参数 t 的连续可微函数• 同时, 在初始时刻 $t = 0$ 时, 两个坐标系重合•

若 $\boldsymbol{u} = u_1 + \mathrm{i}u_2$ 为活动坐标系中的原点 O', 则

$$\boldsymbol{u}' = -\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}• \tag{2}$$

由方程(1) 和(2) 有

$$\boldsymbol{x}' = (h\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}• \tag{3}$$

上式对 t 微分, 有

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}} = (\dot{h} + \mathrm{i}h\dot{\varphi})\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - (\dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{i}\boldsymbol{u}\dot{\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + h\dot{\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{a}}$ 为运动 E/E' 的绝对速度, "•" 表示对 t 求导• 为了避免纯平移和纯转动的情况, 我们假定

$$\dot{\varphi}(t) \neq 0,\quad h = h(t) \neq \mathrm{const}•$$

式(4) 中的项

$$(\dot{h} + \mathrm{i}h\dot{\varphi})\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - (\dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{i}\boldsymbol{u}\dot{\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

称为单参数平面位似运动 E/E' 的滑动速度, 表示为 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{f}}$• 因此

* 收稿日期: 2002_05_31
本文原文为英文, 吴承平 译, 张禄坤 校•

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{f}} = (\dot{h} + \mathrm{i}h\dot{\varphi})\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - (\dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{i}\boldsymbol{u}\dot{\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{5}$$

设运动 E/E' 中 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{f}} = 0$, 则得到运动的极点 $P = (p_1, p_2)$,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\dot{\boldsymbol{u}} + \mathrm{i}\boldsymbol{u}\dot{\varphi}}{\dot{h} + \mathrm{i}h\dot{\varphi}}.$$

因此有 $$u_1 = p_1 h + \frac{p_2 \mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\varphi},\quad u_2 = p_2 h + \frac{p_1 \mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{6}$$

1 平面位似运动中的 Steiner 面公式和混合面公式

设 E/E' 为单参数平面位似运动, $t \in [0, T]$ 为一实闭区间. 若

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t+T) = \boldsymbol{u}'(t), \\ \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \qquad \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{7}$$

则运动 E/E' 称为单参数闭平面位似运动, 其中 T 为闭平面位似运动的周期, 整数 ν 为闭平面位似运动的转动次数.

本文中取 $\nu > 0$.

设 X 为 E 中一固定点, 则 X 相对于 E' 的滑动速度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})(\mathrm{d}h + \mathrm{i}h\mathrm{d}\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{8}$$

因此, 由[1] 给出的 X 点的轨道面为

$$F_X = \frac{1}{2}\oint (x_1'\mathrm{d}x_2' - x_2'\mathrm{d}x_1') = \frac{1}{2}\oint [\boldsymbol{x}', \mathrm{d}\boldsymbol{x}'], \tag{9}$$

其中符号 $[a, b]$ 由下面的行列式确定:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

质量密度分布为 $h^2\mathrm{d}\varphi$ 的运动极曲线 (P) 的重心称为 Steiner 点 S. 并由下式给出为

$$\boldsymbol{s} = s_1 + \mathrm{i}s_2 = \oint \boldsymbol{p}h^2\mathrm{d}\varphi \Big\backslash \oint h^2\mathrm{d}\varphi, \tag{10}$$

其积分路径为闭极曲线 (P).

由于 $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, 且 $\dot{\varphi}(t)$ 为连续函数, 因此有 $\dot{\varphi}(t) < 0$ 或 $\dot{\varphi}(t) > 0$, 即 $\dot{\varphi}(t)$ 在闭区间 $[0, T]$ 内处处同号. 根据闭区间 $[0, T]$ 积分学中值定理, 至少存在一点 $t_0 \in [0, T]$ 使如下方程成立.

$$\oint h^2\mathrm{d}\varphi = \int_0^T h^2(t)\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t = 2h^2(t_0)\pi\nu. \tag{11}$$

将式(3) 和(8) 代入式(9) 并利用式(10) 和(11), 可得闭平面位似运动的 Steiner 面公式:

$$F_X = F_O + h^2(t_0)\pi\nu(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}\mu + \boldsymbol{x}\mu), \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{s}$ 和 μ 分别为 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{s}$ 和 μ 的复共轭, $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\mu_2$, 且

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\oint(-2hp_2\mathrm{d}h + h\mathrm{d}u_2 + u_2\mathrm{d}h),\quad \mu_2 = \frac{1}{2}\oint(2hp_1\mathrm{d}h - h\mathrm{d}u_1 - u_1\mathrm{d}h).$$

至此, 我们可以给出如下定理:

定理 1 设 X 为运动平面 E 上的一个固定点, 则式(12) 给出了单参数闭平面位似运动闭轨道曲线 (X) 的面方程.

特例 位似比 $h \equiv 1$ 时, 我们就得到复数意义上的 Steiner 面公式[2].

由式(12) 有如下推论:

推论1 运动平面上的所有固定点位于运动 E/E' 的同一轨道面,它依赖于运动平面中以

$$M = \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0)\pi\nu},\ s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0)\pi\nu} \right) \tag{13}$$

为圆心的同一圆•

特例 当 $h(t) \equiv 1$ 时,由于 $\mu_1 = \mu_2 = 0$,则点 M 和Steiner点 S 重合[2]•

设 X 和 Y 为运动平面 E 上的两个固定点,Z 为线段 XY 上的任意固定点,则

$$\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x} + \xi\boldsymbol{y}, \qquad \lambda + \xi = 1, \quad \lambda, \xi \in \mathbf{R}• \tag{14}$$

根据方程(1)有

$$\boldsymbol{z}' = \lambda\boldsymbol{x}' + \xi\boldsymbol{y}'• \tag{15}$$

现在我们利用轨道面 F_X 和 F_Y 来求轨道面 F_Z•

由方程(9)和(15)可得轨道面 F_Z 的方程如下:

$$F_Z = \frac{1}{2}\oint[\boldsymbol{z}', \mathrm{d}\boldsymbol{z}'] = \frac{1}{2}\oint[\lambda\boldsymbol{x}' + \xi\boldsymbol{y}', \lambda\mathrm{d}\boldsymbol{x}' + \xi\mathrm{d}\boldsymbol{y}']•$$

由上式可得

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\xi F_{XY} + \xi^2 F_Y, \tag{16}$$

其中 $$F_{XY} = \frac{1}{4}\oint\left([\boldsymbol{x}', \mathrm{d}\boldsymbol{y}'] + [\boldsymbol{y}', \mathrm{d}\boldsymbol{x}']\right), \tag{17}$$

上式称为 E 上点 X、Y 的混合面方程•

现在我们可以计算混合面 F_{XY} 了•

将式(3)和(8)代入式(17),可得

$$F_{XY} = F_O + \frac{h^2(t_0)\pi\nu}{2}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{s}] + \frac{1}{4}[(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\mu + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\mu]• \tag{18}$$

显然 $F_{XX} = F_X$, $F_{XY} = F_{YX}$•

因此有如下定理:

定理2 设 X 和 Y 为运动平面 E 上的两个固定点,则点 X 和 Y 的混合面公式由式(18)给出•

特例 当 $h(t) \equiv 1$ 时,由于 $\mu = 0$,则得到[2]给出的混合面公式:

$$F_{XY} = F_O + \frac{\pi\nu}{2}[\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{s}]•$$

若原点 O 和(13)式给出的点 M 重合,则 $F_O = F_M$ 并由式(12)和(18),可得

$$\begin{cases} F_X = h^2(t_0)\pi\nu\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} + F_M, \\ F_{XY} = \dfrac{1}{2}h^2(t_0)\pi\nu(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) + F_M• \end{cases} \tag{19}$$

则由后者可得

$$F_X > F_M \qquad X \neq M, \tag{20}$$

且 $$F_X - 2F_{XY} + F_Y = h^2(t_0)\pi\nu d^2 \qquad X \neq Y, \tag{21}$$

其中 d 为点 X 和 Y 间的距离•

推论2 由(20)式可知点 M 的轨道曲线具有最小轨道面•

此外,由式(21)有

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y > 0 \tag{22}$$

且
$$F_{XY} = \frac{1}{2}(F_X + F_Y - h^2(t_0)\pi\nu d^2) \cdot \tag{23}$$
因此，将式(23)代入式(16)，可得
$$F_Z = \lambda F_X + \xi F_Y - \lambda\xi h^2(t_0)\pi\nu d^2 \cdot \tag{24}$$

2　闭平面位似运动的Holditch定理

定理3　设 k 为平面 E' 上的一个卵形(即闭凸曲线)，XY 为该卵形的弦，长度为 d•　弦上一点 Z 划分该弦为长 a 和 b 的两段•　在闭平面位似运动 E/E' 情况下，若弦 XY 的范围覆盖卵形 k，则卵形 k 和点 Z 画出的闭曲线构成的面取决于参数 a、b 和 h，h 为运动 E/E' 的位似比•

证明　设 XY 表示实轴方向，这时有
$$d = y - x,\ a = z - x = \xi d,\ b = y - z = \lambda d,\ a + b = d \cdot \tag{25}$$
当点 Z 的轨道面的转动次数 $\nu = 1$ 时，由(24)和(25)式有
$$F_Z = \frac{1}{d}(bF_X + aF_Y) - h^2(t_0)\pi ab \cdot \tag{26}$$
又当点 X 和 Y 划出同一个卵形 k 时，则有 $F_X = F_Y$，由式(26)又可得
$$F_X - F_Z = h^2(t_0)\pi ab \cdot \tag{27}$$
定理证毕•

特例　当 $h(t) \equiv 1$ 时，就得到[3]的结果
$$F_X - F_Z = \pi ab \cdot$$

[参　考　文　献]

[1] Spivak M. Calculus on Manifolds[M]. New York: W A Benjamin, 1965.

[2] M ller H R. Verallgemeinerung einer formel von Steiner[J]. Abh d Brschw Wiss Ges, 1978, **24**: 107—113.

[3] Holditch A. Ladies and gentleman's diary for the year 1858[Z].

Generalization of Steiner Formula for the Homothetic Motions on the Planar Kinematics

N. Kuruoglu,　M. D ld l,　A. Tutar

(Department of Mathematics, Science and Arts Faculty, Ondokuz May Is University, Kurupelit 55139, Samsun, Turkey)

Abstract: The Steiner formula and the mixture area formula given by M ller were expressed under the 1_parameter closed planar homothetic motions in the complex sense. Also, using the generalization of Steiner formula, the result of Holditch theorem for homothetic motions is got. In the case of the homothetic scale h ≡ 1 the results given by M ller are obtained as a special case.

Key words: homothetic motion; Steiner formula; Holditch theorem