

文章编号: 1000-0887(2003) 08-0857-08

小曲率粘弹性索非线性随机稳定性分析*

李映辉, 高 庆

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031)

(程昌钧推荐)

摘要: 基于 Kelvin 粘弹性材料本构模型, 研究小曲率粘弹性索在窄带随机激励作用下的非线性随机稳定性及均方响应。首先建立小曲率粘弹性索数学模型; 然后提出一种确定粘弹性索均方响应及概率渐近稳定性方法; 给出了系统均方稳定对激励带宽、幅值、中心频率等要求; 给出系统的稳定区域; 最后讨论了材料粘性、波速比及介质阻尼对系统不稳定区域的影响。

关键词: 索; 均方响应; 随机稳定性; Kelvin 粘弹性模型; 窄带随机激励
中图分类号: TU501; TU5113⁺ 2 文献标识码: A

引 言

近几十年来, 索及其结构在土木工程、交通运输、电力传输、海洋工程和航空航天等领域得到广泛运用。索由于强度重量比高, 柔性大, 在外激励作用下可能引起大挠度和动态不稳定性。文献中有大量关于索固有频率^[1]、自由振动^[2]和强迫振动^[3]的报道。

但上述研究, 都是在材料为线弹性假设下进行的, 并未考虑阻尼或仅引入简单线性阻尼。由于索通常由粘弹性金属或粘弹性聚合物构成, 因此应该引入粘弹性本构关系描述索材料性质。

文献中有关粘弹性索报道很少, 目前仅检索到四篇文献讨论了粘弹性索动态动力响应与动力稳定性^[4-7]; 在弹性索讨论中, 也只见一篇文献研究其随机响应^[8]。尚未检索到有关索非线性均方响应与随机稳定性的文献。

本文基于 Kelvin 粘弹性本构模型, 研究小曲率粘弹性索在窄带随机激励下非线性均方响应与随机稳定性问题。建立小曲率粘弹性索数学模型; 提出确定粘弹性索均方响应及其解概率渐近稳定方法; 给出粘弹性索系统稳定区域; 讨论材料粘性、波速比及介质阻尼对系统稳定区域影响。

1 粘弹性索模型

基于 Perkin 和 Mote 的工作, 将索简化为忽略弯曲和扭转刚度, 悬挂于两固定端 ($x = 0$ 和 $x = l$) 的一维均匀连续体。质量密度为 ρ , 横截面积为 A , 重力面内的位移分量为 v 。仅考虑面内位移时, 运动方程为^[9]

* 收稿日期: 2002_01_08; 修订日期: 2003_04_21

作者简介: 李映辉(1964—), 男, 四川南江人, 副教授, 博士(E-mail: li_yinghui@sina.com)。

$$[(P + A\sigma)v_x]_x + \kappa[-\kappa(P + A\sigma)v + A\sigma] + F = 2Rv_t + \rho v_{tt}, \quad (1)$$

其中, F 为外激励分量, σ 为 x 方向上的动态应力分量, P 为索的平衡张力, κ 为索的平衡曲率, R 为介质横向阻尼因子. 下标 t 和 x 分别代表对相应变量的微分.

选择 Kelvin 粘弹性模型描述材料的粘弹性性质, 本构方程为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2)$$

其中, E 为材料弹性模量, η 为材料粘性常数, ε 为 x 方向上的应变分量, 表示为

$$\varepsilon = -\kappa v + \frac{1}{2}v_x^2. \quad (3)$$

由方程(1)、(2)、(3), 并忽略 κ 的高阶项得

$$v_{tt} + 2R_0v_t - c_1^2v_{xx} + c_1^2\left[\frac{1}{2}\kappa v_x^2 + \kappa v_{xx} - \frac{3}{2}v_x v_{xx}\right] + c_0(\kappa v_{xx}v_t - 2v_x v_{xx}v_{xt} - v_x^2 v_{xxt}) = f, \quad (4)$$

其中,

$$R_0 = \frac{R}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{P}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_0 = \frac{\eta}{\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho},$$

这里 c_1 和 c_1 分别为纵波和横波的波速, c_0 为粘性参数.

将函数 $v(x, t)$ 和 $f(x, t)$ 按索的模式展开

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(t) \varphi_i(x), \quad f(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) \varphi_i(x), \quad (5)$$

其中, $\varphi_i(x)$ 为线性索模型的第 i 阶模态函数, 可以表示为^[10]:

对称模态:

$$\varphi_i(x) = 1 - \cos(B_i x/L) - \tan(B_i/L) \sin(B_i x/L) \quad (i = 1, 3, 5, \dots),$$

其中, B_i 为超越方程

$$\tan(B_i/2) = B_i/2 - (4/\Lambda^2)(B_i/2)^3$$

的根. $\Lambda^2 = 64(EA/P)(d/l)^2$, d 为索的垂度.

反对称模态:

$$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x/L) \quad (i = 2, 4, 6, \dots).$$

若激励 $f(x, t)$ 为零均值、中心频率接近索第 n 阶模态的窄带 Gauss 过程, 则有^[11]

$$V_i \ll V_n \quad i \neq n.$$

由于上述关系, 可仅保留 n 阶模态(这里第 n 阶模态假设为反对称模态, 对称模态可用同样方法处理), 定义如下无量纲量

$$V = \frac{V_n}{l}, \quad T = \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{n\pi c_1}{l}, \quad k = \frac{R_0}{\omega_n}, \quad \varepsilon = \frac{3n^2\pi^2 c_1^2}{4c_1^2}, \quad F = \frac{F_n}{\omega_n^2 l},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3n^3\pi^3 c_0}{2lc_1}, \quad \kappa_1 = \frac{4\kappa l [(-1)^n - 1]}{3n^2\pi^2}, \quad \kappa_2 = \frac{8\kappa l [(-1)^n - 1]}{9n^3\pi^3}.$$

方程(4)可表示为(用 t 表 T)

$$\dot{V} + 2kV + V + \varepsilon(\kappa_1 V^2 + V^3) + \varepsilon_1(\kappa_2 V + V^2) = F(t). \quad (6)$$

若力函数 $F(t)$ 为零均值、弱平稳、窄带 Gauss 随机过程, 其自相关函数 $R_{FF}(\tau)$ 、功率谱密度 $S_{FF}(\omega)$ 为

$$R_{FF}(\tau) = \langle F(t), F(t+\tau) \rangle = \Phi^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \Omega\tau \quad \beta \ll \Omega, \quad |\Omega^2 - 1| \ll 1, \quad (7a)$$

$$S_{FF}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{FF}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\beta\phi^2 \left[\frac{\omega^2 + \Omega^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \Omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} \right], \quad (7b)$$

其中, Ω 为激励中心频率, β 为激励带宽, ϕ 为激励幅值。因此激励可表为 Fourier 形式, 其幅值为慢变随机函数^[11]

$$F(t) = a_0(t)\cos \Omega t + b_0(t)\sin \Omega t, \quad (8)$$

其中, a_0, b_0 为相对于 $\cos \Omega t$ 和 $\sin \Omega t$ 来说的慢变时间函数。

2 均方响应

利用等效线性化方法^[12], 得方程(6)的等效线性方程

$$\dot{V} + 2 \left[k + \frac{1}{2} \varepsilon_1 k_2 \sigma + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sigma^2 \right] V + (1 + 2\varepsilon k_1 \sigma + 3\varepsilon \sigma^2) V = F(t), \quad (9)$$

其中, σ 为 V 的均方差。 $V(t)$ 的谱密度为

$$S_{VV}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega), \quad (10)$$

其中, $H(\omega) = [(-\omega^2 + 1 + 2\varepsilon k_1 \sigma + 3\varepsilon \sigma^2) + i(2k + 2\varepsilon_1 k_2 \sigma + 3\varepsilon_1 \sigma^2)]^{-1}$ 为方程(9)的传递函数。对方程(10)进行 Fourier 变换得 $V(t)$ 的自相关函数

$$R_W(\tau) = \frac{\phi^2}{4k_{ve}(\Omega_1^2 + k_{ve}^2)} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta_1 |\tau-t|} \cos \Omega(\tau-t) e^{-k_{ve} |t|} \left[\cos \Omega_1 t + \frac{k_{ve}}{\Omega} \sin \Omega_1 |t| \right] dt, \quad (11)$$

其中, $k_{ve} = k + (\varepsilon_1 k_2 \sigma + \varepsilon_1 \sigma^2)/2$, $\Omega_1^2 = 1 + 2\varepsilon k_1 \sigma + 3\varepsilon \sigma^2 - k_{ve}^2$ 为包含材料粘性和环境阻尼的等效阻尼。

利用等效线性化有效条件: $\varepsilon \sigma^2 \ll 1$ 和 $\varepsilon_1 \sigma^2 \ll k$, 对方程(11) 积分并令 $\tau = 0$, 得小阻尼条件下均方响应方程(仅考虑反对称模态)

$$(3\varepsilon_0 \sigma^2)^3 + 2[1 - \Omega^2 - k^2 + (\beta + k)^2](3\varepsilon_0 \sigma^2)^2 + \{ [1 - \Omega^2 - k^2 + (\beta + k)^2]^2 + 4(\beta + k)^2 \Omega^2 \} (3\varepsilon_0 \sigma^2) - 3\beta^2(\beta + k)/k = 0, \quad (12)$$

其中, $\varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_1 k/3$, 下面仅分析 $\varepsilon_0 > 0$ 的情形。

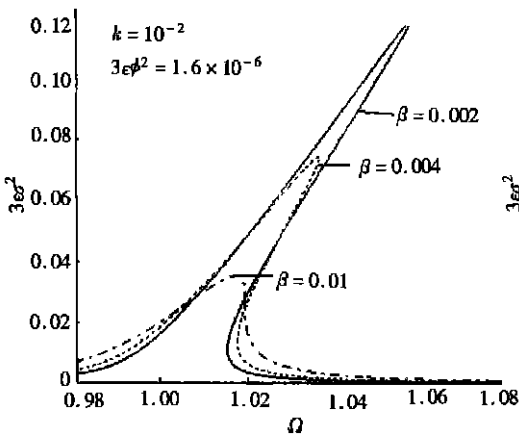


图1 不同激励带宽 β 下的均方响应

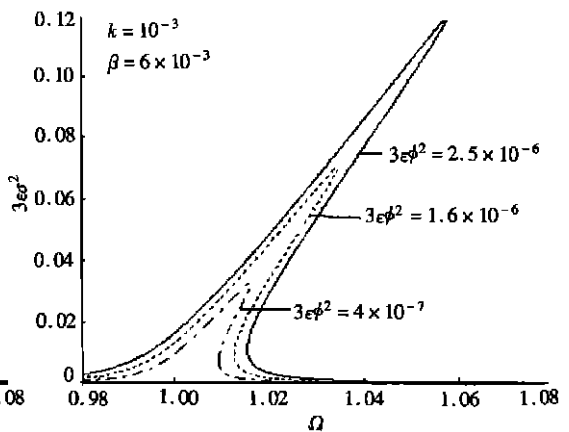


图2 不同激励幅值 $\varepsilon\phi^2$ 下的均方响应

求解方程(12)得粘弹性索均方响应如图1、2。该方程为 $3\varepsilon_0 \sigma^2$ 三次方程, 对给定一组参数($\varepsilon\phi^2, \Omega, \beta, k$), 有1个或3个正实根。如果方程(12)有唯一正实根, 响应总是单值稳态响

应。如果方程(12)有3个正实根,出现跳跃现象,相应解可能为不稳定多值响应。由高次代数方程理论,方程(12)有3正实根的充要条件为

$$b > 0, G^2 + 4I^3 < 0, \quad (13)$$

其中

$$G = \frac{1}{4}b(b^2 + 4c^2) - d, \quad I = \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{4}b^2,$$

$$b = \frac{2}{3}[(\Omega^2 - 1) - (\beta + k)^2 + k^2],$$

$$c^2 = 4(\beta + k)^2 \Omega^2, \quad d = 3\varepsilon\phi^2[1 + (\beta/k)].$$

基于不等式(13)第二式,方程(12)存在三值响应的激励临界频率

$$\Omega_{cr} = \sqrt{3(\beta + k) + \{1 - k^2 + 4(\beta + k)^2\}^{1/2}}. \quad (14)$$

如果 $\Omega < \Omega_{cr}$, 对任何 ϕ 都不存在三值响应, 相应临界响应

$$\varepsilon_0 \sigma_{1cr}^2 = \frac{4}{3}(\beta + k)^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}(\beta + k)\{1 + 4(\beta + k)^2 - k^2\}^{1/2}. \quad (15)$$

代 ε^2 和 Ω 的临界值代入方程(12), 并用 $\beta \ll 1$ 和 $k \ll 1$, 得激励幅值 ϕ^2 的临界值

$$\varepsilon\phi_{cr}^2 = (64\sqrt{3}/27)k(\beta + k)^2. \quad (16)$$

如果 $\phi^2 < \phi_{cr}^2$, 对任何 Ω 都不存在三值响应。

由方程(16)得激励带宽 β 的临界值

$$\beta_{cr}(\phi) = (27\varepsilon\phi^2/64\sqrt{3}k)^{1/2} - k, \quad (17)$$

该临界值是 ϕ^2 的函数。由不等式(13)第一式, 得 β 临界值为激励中心频率 Ω 的函数

$$\beta_{cr}(\Omega) = (\Omega^2 - 1 + k^2)^{1/2} - k. \quad (18)$$

对给定的 (Ω, ϕ) , 仅当激励带宽 β 小于由(17)和(18)确定的两临界值中最小者, 才存在三值响应。

由图1可见, 给定 $\varepsilon\phi^2$, 不同 β 的均方响应曲线相交于2点, 其中之一位于最上的稳定分支上, 另一交点位于中间不稳定分支上。当中心频率 Ω 小于1, σ^2 随激励带宽 β 增加而增大; 但对较大的激励中心频率 Ω , σ^2 随激励带宽 β 增加而减小。在最下面稳定分支上, 对任何 Ω , σ^2 随激励带宽 β 增加而增大。

由图2可见, 对给定 β , 不同 $\varepsilon\phi^2$ 均方响应曲线不相交, 最上面和最下面稳态分支上, σ^2 总是随 $\varepsilon\phi^2$ 增加而增大。

3 平均方程与随机稳定条件

由文献[11], 当激励 $F(t)$ 为零均值、中心频率接近索第 n 阶固有频率的窄带 Gauss 过程时, 响应可表为

$$V = a(t) \cos \Omega t + b(t) \sin \Omega t, \quad (19)$$

其中, a 、 b 为相对于 $\cos \Omega t$ 和 $\sin \Omega t$ 的慢变时间函数。于是得到^[11]

$$\dot{a} = -\Omega[a(t) \sin \Omega t + b(t) \cos \Omega t], \quad (20)$$

$$a(t) \cos t + b(t) \sin \Omega = 0, \quad (21)$$

代方程(8)、(19)~(21)到方程(6)得

$$\dot{a} = \frac{f \sin \Omega t}{\Omega}, \quad \dot{b} = -\frac{f \cos \Omega t}{\Omega}, \quad (22)$$

其中,

$$f = (1 - \Omega^2)(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t) - 2k \Omega (a \sin \Omega t - b \cos \Omega t) + \varepsilon (\kappa_1 + a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)^2 - \varepsilon_1 \Omega (\kappa_2 + a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)(a \sin \Omega t - b \cos \Omega t) - a \cos \Omega t - b \sin \Omega t \cdot$$

因参数 a_0, b_0, a, b 为慢变时间函数, 在 $(t, t + T_0)$ 内变化很小 ($T_0 = 2\pi/\Omega$), 可认为其值为常量, 于是得平均方程为

$$2\Omega a - (1 - \Omega^2)b + 2k\Omega a - \frac{3}{4}\varepsilon(b^3 + a^2b) + \frac{1}{4}\Omega\varepsilon_1(a^3 + ab^2) = -b_0, \quad (23)$$

$$2\Omega b + (1 - \Omega^2)a + 2k\Omega b - \frac{3}{4}\varepsilon(a^3 + ab^2) + \frac{1}{4}\Omega\varepsilon_1(b^3 + a^2b) = a_0 \cdot \quad (24)$$

给方程(23)、(24)中变量 a, b 的一个小扰动 δa 和 δb , 并忽略扰动 δa 和 δb 的高阶项, 得变分方程

$$2\Omega\delta a - (1 - \Omega^2)\delta b + 2k\Omega\delta a - \frac{3}{4}\varepsilon[2ab\delta a + (3b^2 + a^2)\delta b] + \frac{1}{4}\Omega\varepsilon_1[(3a^2 + b^2)\delta a + 2ab\delta b] = 0, \quad (25)$$

$$2\Omega\delta b + (1 - \Omega^2)\delta a + 2k\Omega\delta b + \frac{3}{4}\varepsilon[(3a^2 + b^2)\delta a + 2ab\delta b] + \frac{1}{4}\Omega\varepsilon_1[2ab\delta a + (3b^2 + a^2)\delta b] = 0 \cdot \quad (26)$$

因方程(25)、(26)的系数为慢变随机函数, 其解可表为

$$\delta a(t) = \delta a(0) \exp\left[\int_0^t \lambda(s) ds\right], \quad \delta b(t) = \delta b(0) \exp\left[\int_0^t \lambda(s) ds\right] \cdot$$

代入方程(25)、(26)得特征方程

$$|A - 2\Omega E| = 0, \quad (27)$$

其中, E 为 2×2 单位矩阵, $\lambda(t)$ 为特征值, A 为 2×2 矩阵, 元素为

$$a_{11} = 2k\Omega - \frac{3}{2}ab\varepsilon + \frac{1}{4}(3a^3 + b^2)\Omega\varepsilon_1,$$

$$a_{12} = -(1 - \Omega^2) - \frac{3}{4}(3b^3 + a^2)\varepsilon + \frac{1}{2}ab\Omega\varepsilon_1,$$

$$a_{21} = (1 - \Omega^2) + \frac{3}{4}(3a^3 + b^2)\varepsilon + \frac{1}{2}ab\Omega\varepsilon_1,$$

$$a_{22} = 2k\Omega + \frac{3}{2}ab\varepsilon + \frac{1}{4}(3b^3 + a^2)\Omega\varepsilon_1 \cdot$$

方程(27)为慢变系数二阶代数方程。如果两个根 λ_1 和 λ_2 为各态历经随机过程, 则有

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \lambda_j(s) ds\right\} = P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} \int_0^t \lambda_j(s) ds\right\} = P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} t \langle \lambda_j \rangle\right\} \quad (j = 1, 2), \quad (28)$$

其中, P 为概率测度, $\langle \lambda_j \rangle$ 为表示集合平均。因此如果所有的 $\langle \lambda_j \rangle$ 有负实部, 则扰动在概率意义下按指数规律消失。

4 稳定域

由方程(27)得(为方便简记 $\varepsilon_1 \Omega$ 为 ε_1)

$$\lambda^2 + [4k\Omega + (a^2 + b^2)\varepsilon_1]\lambda + 4k^2\Omega^2 + (1 - \Omega^2)^2 + 3(a^2 + b^2)(1 - \Omega^2)\varepsilon +$$

$$2k\Omega(a^2 + b^2)\varepsilon_1 + \frac{27}{16}(a^2 + b^2)^2\varepsilon^2 + \frac{3}{16}(a^2 + b^2)^2\varepsilon_1^2 = 0 \quad (29)$$

若方程(29)的根为 λ_1 和 λ_2 , 则有

$$\lambda_{1,2} = -2k\Omega + \mu_1 \pm \mu_2,$$

其中,

$$\mu_1 = -2r^2\varepsilon_1, \quad \mu_2 = \left\{ -[(1-\Omega^2)^2 + 12\varepsilon(1-\Omega^2)r^2 + (27\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2)r^4] \right\}^{1/2}, \quad (30)$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2). \quad (31)$$

当响应 $V(t)$ 均值为 0, 方差为 σ^2 , 由方程(19)、(31)得随机变量 r 服从 Rayleigh 分布, 其密度函数为

$$p(r) = (r/\sigma_r^2)\exp(-r^2/2\sigma_r^2) \quad r \geq 0, \quad \sigma_r^2 = \sigma^2/4.$$

当 r 在其取值范围内变化时, 方程(30)的第二式右边为实数还是为虚数, 依赖于 Ω , ε 和 ε_1 的值, 但我们仅需考察 $\langle \mu_2 \rangle$ 的实部. 下面仅考虑工程中有实际意义的情形: $27\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2 > 0$.

可见如果 $\Omega^2 \leq 1$, 对所有 r , μ_2 为虚数. 当 $\Omega^2 > 1$, 仅当

$$r_1^2 = \frac{\Omega^2 - 1}{6\varepsilon + \sqrt{9\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2}} < r^2 < \frac{\Omega^2 - 1}{6\varepsilon - \sqrt{9\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2}} = r_2^2$$

时, μ_2 为实数. 因此 $\langle \mu_1 \pm \mu_2 \rangle$ 实部为

$$\begin{cases} \text{Re}(\langle \mu_1 \pm \mu_2 \rangle) = \text{Re}(\langle \mu_1 \rangle) \pm \text{Re}(\langle \mu_2 \rangle) = \\ \int_0^\infty \mu_1 p(r) dr \pm \int_{r_1}^{r_2} \mu_2 p(r) dr & \Omega^2 > 1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

将 $p(r)$, μ_1 和 μ_2 代入得到

$$\text{Re}(\langle \mu_1 \rangle) = -4\varepsilon\sigma_r^2,$$

$$\text{Re}(\langle \mu_2 \rangle) = \pi(\Omega^2 - 1) \left[\frac{r_2}{r_1} \exp\left(-\frac{r_1^2}{\sigma_r^2}\right) I_1\left(\frac{r_1^2}{2\sigma_r^2}\right) \right] \quad \text{当 } \Omega^2 > 1.$$

其中, $I_1(z)$ 为一阶修正 Bessel 函数. 由此特征根 $\lambda_{1,2}$ 实部为

$$\begin{cases} \text{Re}(\lambda_1) = -2k\Omega + \text{Re}(\langle \mu_1 \rangle) + \text{Re}(\langle \mu_2 \rangle), \\ \text{Re}(\lambda_2) = -2k\Omega + \text{Re}(\langle \mu_1 \rangle) + \text{Re}(\langle \mu_2 \rangle). \end{cases} \quad (32)$$

应用稳定性判据 $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 (i = 1, 2)$, 得系统稳定域

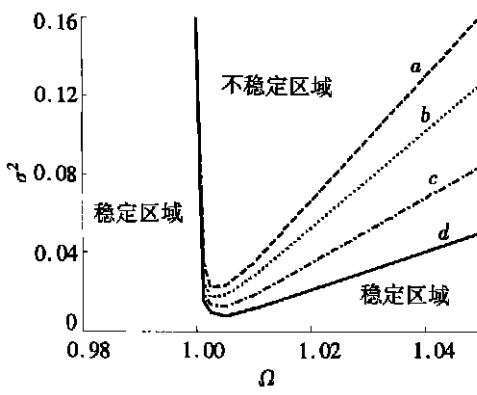
$$\text{Re}(\langle \mu_1 \rangle) + \text{Re}(\langle \mu_2 \rangle) \leq 2k\Omega \quad (33)$$

5 结果与讨论

不等式(33)给出了粘弹性索面内响应的稳定条件. 显然, 当 $\Omega \leq 1$ 系统始终是稳定的. 当 $k = 0$, σ^2 在 $\Omega > 1$ 的整个半平面内无界, 为不稳定. 下面通过数值仿真, 研究波速比 ε 和粘性参数 ε_1 对不稳定域的影响.

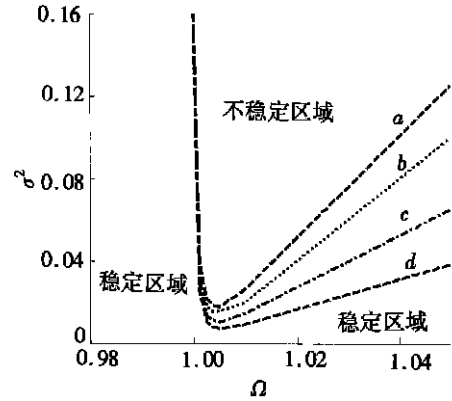
图 3 说明材料粘性对稳定域的影响. 其中, $k = 0.001$, $\varepsilon = 0.005$. 可见材料粘性 ε_1 对系统不稳定域有很大影响. 当粘性增加时, 不稳定域变小.

图 4 说明波速比对不稳定域影响. 其中, $k = 0.001$, $\varepsilon_1 = 0.005$. 可见不稳定域随波速比增加而变大.



a: $\varepsilon_1 = 0.008$; b: $\varepsilon_1 = 0.005$; c: $\varepsilon_1 = 0.002$;
d: $\varepsilon_1 = 0$ ($k = 0.001, \varepsilon = 0.005$)

图3 粘性对不稳定域的影响



a: $\varepsilon = 0.005$; b: $\varepsilon = 0.006$; c: $\varepsilon = 0.007$;
d: $\varepsilon = 0.008$ ($k = 0.001, \varepsilon_1 = 0.005$)

图4 波速比对不稳定域影响

6 结 论

本文给出了一种确定在窄带随机激励作用下粘弹性索概率稳定性方法。该分析包含了如下两个假设条件: 1) 确定响应的平均技术有效性; 2) 方程(27)的特征值 $\lambda_i(t)$ 为各态历经随机过程。

从上述讨论, 可以得如下结论:

- 1) 介质阻尼参数 k 、波速比 ε 和材料粘性对粘弹性索在随机激励下的不稳定域有很大影响;
- 2) 不稳定区域随材料粘性增加而变小, 随波速比增加而变大;
- 3) 小带宽条件下, 窄带激励的均方响应曲线与简谐激励的均方响应曲线类似, 带宽的大小对决定响应曲线的特性起临界作用; 当带宽增加时, 响应曲线的峰值下降;
- 4) 激励幅值的大小对决定响应曲线特性起重要作用, 均方响应总是随激励幅值减小而减小。

[参 考 文 献]

- [1] Triantafyllon M S, Grinfolgel L. Natural frequencies and modes of inclined cables[J]. Journal of Structure Engineering, 1987, **113**(1): 139—148.
- [2] Rega G, Benedettini F. Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable [J]. International Journal of Non Linear Mechanics, 1984, **20**(1): 95—105.
- [3] Rega G, Benedettini F. Non_linear dynamics of an elastic cable under planar excitation[J]. International Journal of Non Linear Mechanics, 1987, **23**(3): 497—509.
- [4] 李映辉, 殷学纲. 粘弹性索非线性响应分析[J]. 非线性动力学学报, 1999, **6**(3): 242—248.
- [5] Li Y H, Peng R Q, Gao Q. The stochastic stability of a viscoelastic cable with small sag[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2001, **13**(1): 31—39.
- [6] Li Y H, Jian K L, Gao Q, et al. Wave propagation in viscoelastic cable with small sag[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2001, **14**(2): 147—154.
- [7] 李映辉, 殷学纲. 小垂度粘弹性索非线性响应及动力稳定性[J]. 重庆大学学报, 1999, **26**(3): 342—348.

- [8] Alberti F P. Non_stationary random response of a finite cable[J]. Journal of Sound and Vibration , 1983, **86**(2): 227—233.
- [9] Perkin N C, Mote D C. Three_dimensional vibration of traveling elastic cables[J]. Journal of Sound and Vibration , 1987, **114**(2): 325—340.
- [10] Warnitchai P, Fujino Y, Susumpov T. A non_linear dynamic model for cables and its application to a cable structure system[J]. Journal of Sound and Vibration , 1995, **187**(4): 695—712.
- [11] Richard K, Anand G V. Non_linear resonance in strings under narrow band random excitation[J]. Journal of Sound and Vibration , 1982, **85**(1): 85—98.
- [12] 龙运佳, 梁以德. 近代工程动力学——随机·混沌[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

Nonlinear Random Stability of Viscoelastic Cable With Small Curvature

LI Ying_hui, GAO Qing

(Department of Applied Mechanics and Engineering ,
Southwest Jiaotong University , Chengdu 610031, P. R, China)

Abstract: The non_linear planar mean square response and the random stability of a viscoelastic cable that has a small curvature and subjects to planar narrow band random excitation is studied. The Kelvin viscoelastic constitutive model is chosen to describe the viscoelastic property of the cable material. A mathematical model that describes the nonlinear planar response of a viscoelastic cable with small equilibrium curvature is presented first. And then a method of investigating the mean square response and the almost sure asymptotic stability of the response solution is presented and regions of instability are charted. Finally, the almost sure asymptotic stability condition of a viscoelastic cable with small curvature under narrow band excitation is obtained.

Key words: cable; mean square response; stochastic stability; Kelvin viscoelastic model; narrow band random excitation