应用数学和力学, 第 24 卷 第 8 期(2003 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2003) 08_0874_07

瞬时混沌神经网络的混沌动力学*

阮　炯,　赵维锐,　刘荣颂

(复旦大学 数学系,非线性中心,非线性模型与方法开放实验室,上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 首先利用“不可分意味着混沌”从理论上证明了一维瞬时混沌神经网络在一定的条件下按 Li_Yorke 意义是混沌的;特别地,进一步推出了混沌神经网络按 Li_Yorke 意义是混沌的充分条件,而这将从理论上证明 Aihara 等人通过数值计算所得结论;最后,为说明前面的结论给出了一个例子及其数值计算的结果•

关　键　词: 混沌神经网络; 混沌; 不可分性
中图分类号: O29; TP18　　文献标识码: A

引　　言

自从瞬时混沌神经网格(transiently chaotic neural networks(TCNN))在文献[1]中引进以来,已经被广泛应用于信息处理和组合优化问题• 目前存在许多研究瞬时混沌神经网络的混沌的文献,文[2]中 Aihara 用数值方法得出在混沌神经网络(chaotic neural networks(CNN))中当输出函数的陡度参数充分小时存在数值混沌(具有正 Liapunov 指数);尽管在文献[3]和[4]中陈洛南和 Aihara 等用 Marotto 定理[5]证明了当自连接权值充分大时,在 TCNN 中存在混沌结构• 但是 Chen G. 在[6]中发现了 Marotto 在证明互斥子暗示混沌的定理[5]时出现了一个致命的错误,而且在[6]的更正证明中加强了互斥子的条件,因而,Marotto 的互斥子暗示混沌至今还没有真正证明• 从而 TCNN 具有混沌结构的结论至今还没有从理论上证明•

另一方面,关于混沌本身也存在各种各样的数学定义• 例如包含马蹄的几何混沌;Solenoid 和 Plykin 系统;以移位映射作为子系统的具有正拓扑熵的正规混沌;通过数值观察出正 Liapunov 指数的数值混沌等等• 在离散动力系统中广泛应用的混沌的定义是 Li 和 Yorke 引进的相当于拓扑混沌的定义• 即在 1975 年,Li 和 Yorke 得出一个相当简单的混沌存在的条件,即:周期 3 意味着混沌[7]• 而在 1982 年,Li 和 Misiurewicz 推广了 Li 和 Yorke 的条件,即:不可分意味着混沌[8]•

这篇文章的目的,是应用 Li 和 Misiurewicz 的定理,从理论上证明一维的 TCNN 具有混沌结构• 并且给出了一维离散神经网络具有混沌结构的充分条件•

---

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_04_17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70271065)
作者简介: 阮炯(1943—),男,上海人,教授,博导(E_mail: jruan@fudan.edu.cn);
赵维锐(1967—),男,湖北巴东人,博士研究生(E_mail: wrzhao@sina.com.cn)•

在本文的第 1 节我们给出了一些定义和 Li_Misiurewicz 定理; 第 2 节我们首先给出 TCNN 的模型, 然后证明了在一维 TCNN 中存在混沌的充分条件的主要定理, 同时也显示了该结论对混沌神经网络(CNN)[2] 也成立的结论• 最后在第 3 节我们给出了一些讨论和进一步研究的展望•

1 一些定义和 Li_Misiurewicz 定理

在整个文章中, 我们使用 Li_Misiurewicz[8] 中的定义和定理• 设有如下的离散动力系统

$$x(t+1) = f(x(t)), \tag{1}$$

这里, $x(t) \in \mathbf{R}(t = 1, 2, \cdots,)$ 且 $f \in C^1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$•

用 f^t 表示 f 同其自身的 t 次复合, 如果 $f^p(x) = x$, 但对一切 $1 \leqslant t < p, f^t(x) \neq x$, 则称点 x 是 p_周期点; 特别地如果 $p = 1$, 即: $f(x) = x$, 则称 x 是一个不动点; 如果对一切 $i = 0, 1, \cdots, n-1$, 有 $x_{i+1} = f(x_i)$, 则称 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是 f 的一个轨道•

定义 1[8] 对于 $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \subset \mathbf{R}$, 如果不存在 $a \in \mathbf{R}$ 使得或者对一切偶数 j, 有 $x_j < a$ 而对一切奇数 j, 都有 $x_j > a$, 或者对一切偶数 j, 有 $x_j > a$ 而对一切奇数 j, 都有 $x_j < a$ 则称 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 具有不可分性•

引理 1[8] 设 $x_n \leqslant x_0 < x_1$, 或者 $x_n \geqslant x_0 > x_1$, 且 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 具有不可分性, 1) 如果 n 是奇数, 则 f 具有 n 周期的周期点; 2) 如果 n 是偶数, 则 f 具有 $n-1$ 周期的周期点•

注 1[8] 如果 n 是奇数 $x_n \leqslant x_0 < x_1$ 或者 $x_n \geqslant x_0 > x_1$, 则 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 具有不可分性•

引理 2[7] 设 J 是一个区间且 $F: J \to J$• 如果存在一点 $a \in J$, 使得 $b = F(a)$, $c = F^2(a)$, $d = F^3(a)$ 满足

$$d \leqslant a < b < c \text{ 或 } d \geqslant a > b > c,$$

则方程(1)在 Li_Yorke 意义下是混沌的• 即:

T1: 对每一个 $k = 1, 2, \cdots$, 在 J 中 f 存在 k 周期的周期点•

而且

T2: 存在一个由非周期点组成的不可数集合 $T \subset J$, 满足下列条件:

(A) 对每一个 $p, q \in S$ 且 $p \neq q$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup | F^n(p) - F^n(q) | > 0,$$

和

$$\lim_{n \to \infty} \inf | F^n(p) - F^n(q) | = 0;$$

(B) 对每一个 $p \in S$ 和周期点 $q \in J$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup | F^n(p) - F^n(q) | > 0•$$

注 2[7] 如果 f 存在周期为 3 的周期点, 则引理 2 的条件自动满足•

2 一维 TCNN 的混沌

在这一节, 我们首先介绍瞬时混沌神经网络(TCNN)模型, 然后推出几个一维 TCNN 出现混沌的充分条件•

2.1 瞬时混沌神经网络(TCNN)模型

根据文献[1], 我们可以将瞬时混沌神经网络用下面的纯量差分方程来描述:

$$x_i(t)=f(y_i(t))=\frac{1}{1+e^{-y_i(t)/\epsilon}},\tag{2}$$

$$y_i(t+1)=ky_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}x_j(t)+a_i-\omega_{ii}(t)a_{0i},\tag{3}$$

$$|\omega_{ii}(t+1)|=(1-\beta)|\omega_{ii}(t)|,\tag{4}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ t=1,2,\cdots),$$

这里, $\omega_{ii}=\omega_{ii}(t)$ 是依赖于方程(4)的变量且所有变量和参数都是实数, x_i 一第 i 上神经元的输出; y_i 一第 i 个神经元的内部状态; ω_{ij} 一从第 j 个神经元到第 i 个神经元的连接权值; a_i 一第 i 个神经元的输入偏差; k 一神经膜衰减因子; ϵ一输出函数的陡度参数($\epsilon>0$); ω_{ii} 一自连接权值, 且 $\omega_{ii}=\omega_{ii}(t)$; β一衰减因子($0\leqslant\beta\leqslant1$); a_{0i} 一第 i 个神经元的自偏差•

但是在这篇文章中, 我们只考虑一维($\beta=0$)的TCNN, 即:

$$y(t+1)=F(y(t))=ky(t)+\omega f(y(t))+a-\omega a_0\text{•}\tag{5}$$

显然, 在方程(5)中的 F 是一个 C^1 类函数• 如果 $a_0=0$, 方程(5)就是混沌神经网络(CNN)[2]•

2.2 一维 TCNN 中的混沌

在这一节, 我们利用 Li_Misiurewicz 定理给出了在方程(5)中存在混沌的充分条件, 并且给出了理论的证明•

首先, 我们证明当 $k>0$, $\omega<0$ 以及 ϵ充分小时, 方程(5)具有混沌结构, 即:

定理 1 设 $k>0$, $\omega<0$ 以及下列二条件之一满足

1) $-\dfrac{1}{k+1}\omega<a-\omega a_0<-\dfrac{k^2+k+1}{k^3+k^2+k+1}\omega$ 且 $a-\omega a_0\neq-\dfrac{k+1}{k^2+k+1}$;

或者

2) $-\dfrac{k^3}{k^3+k^2+k+1}\omega<a-\omega a_0<-\dfrac{k}{k+1}\omega$ 且 $a-\omega a_0\neq\dfrac{k^2}{k^2+k+1}\omega$•

则存在一个正常数 δ 使得对任意 $0<\epsilon<\delta$, 方程(5)在 Li_Yorke 意义下是混沌的•

证明 由方程(5)

$$F'(y)=k+\frac{\omega}{\epsilon}f(y)(1-f(y))\text{•}$$

由于 $k>0$, $\omega<0$, 存在正常数 δ_1 使得当 $0<\epsilon<\delta_1$, $1+4k\epsilon/\omega>0$• 由 $F'(y)=0$, 有

$$y_{10}=\epsilon\ln\frac{1-\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}{1+\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}<0,\ \text{和}\ y_{20}=\epsilon\ln\frac{1+\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}{1-\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}>0\text{•}$$

$$f(y_{10})=\frac{1-\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}{2},\ \text{和}\ f(y_{20})=\frac{1+\sqrt{1+4\dfrac{k\epsilon}{\omega}}}{2}\text{•}$$

显然, $\lim\limits_{\epsilon\to0}y_{10}=\lim\limits_{\epsilon\to0}y_{20}=0$•

对于条件 1)• 因为 $a-\omega a_0>-\omega/(k+1)$, 从而

$$\lim_{\epsilon\to0}y_{11}=\lim_{\epsilon\to0}F(y_{10})=\lim_{\epsilon\to0}(ky_{10}+\omega f(y_{10})+a-\omega a_0)=$$

$$a-\omega a_0>-\frac{\omega}{k+1}>0,$$

$$\lim_{\epsilon\to0}y_{12}=\lim_{\epsilon\to0}F(y_{11})=\lim_{\epsilon\to0}(ky_{11}+\omega f(y_{11})+a-\omega a_0)=$$

$$(k+1)(a-\omega a_0)+\omega>0,$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{13}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{12})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{12}+\varphi(y_{12})+a-\omega a_0)=$$
$$(k^2+k+1)(a-\omega a_0)+(k+1)\omega\cdot$$

如果 $y_{13}<0$, 即 $a-\omega a_0<-\omega(k+1)/(k^2+k+1)$, 则存在一个正常数 $\delta\in(0,\delta_1)$ 使得当 $0<\epsilon<\delta$ 时, $y_{13}<y_{10}<y_{11}$• 因此, $(y_{10},y_{11},y_{12},y_{13})$ 具有不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yorke 意义下是混沌的•

否则, $y_{13}>0$, 即 $a-\omega a_0>-\omega(k+1)/(k^2+k+1)$, 则由条件 1) 的第二个不等式有,

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{14}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{13})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{13}+\varphi(y_{13})+a-\omega a_0)=$$
$$(k^3+k^2+k+1)(a-\omega a_0)+(k^2+k+1)\omega<0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}(y_{14}-y_{13})=\lim_{\epsilon\to 0} k(y_{13}-y_{12})<0\cdot$$

因此, $y_{13}<y_{12}$, 存在正常数 $\delta\in(0,\delta_1)$ 使得当 $0<\epsilon<\delta$ 时, $y_{14}<y_{10}<y_{13}<y_{12}$, $y_{14}<y_{10}<y_{11}$• 进而 $(y_{10},y_{11},y_{12},y_{13},y_{14})$ 存在不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的•

对于条件 2)• 因为 $a-\omega a_0<-\omega k/(k+1)$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{21}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{20})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{20}+\varphi(y_{20})+a-\omega a_0)=$$
$$a-\omega a_0+\omega<\frac{1}{k+1}\omega<0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{22}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{21})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{21}+\varphi(y_{21})+a-\omega a_0)=$$
$$(k+1)(a-\omega a_0)+k\omega<0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{23}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{22})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{22}+\varphi(y_{22})+a-\omega a_0)=$$
$$(k^2+k+1)(a-\omega a_0)+k^2\omega\cdot$$

如果 $y_{23}>0$, 即 $a-\omega a_0>-\omega k^2/(k^2+k+1)$, 则存在一个正常数 $\delta\in(0,\delta_1)$ 使得当 $0<\epsilon<\delta$ 时, $y_{23}>y_{20}>y_{21}$• 进而 $(y_{20},y_{21},y_{22},y_{23})$ 具有不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的•

否则 $y_{23}<0$, 即 $a-\omega a_0<-\omega k^2/(k^2+k+1)$, 则由条件 2) 的第一个不等式

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_{24}=\lim_{\epsilon\to 0} F(y_{23})=\lim_{\epsilon\to 0}(ky_{23}+\varphi(y_{23})+a-\omega a_0)=$$
$$(k^3+k^2+k+1)(a-\omega a_0)+k^3\omega>0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}(y_{24}-y_{23})=\lim_{\epsilon\to 0} k(y_{23}-y_{22})>0\cdot$$

因此, $y_{23}>y_{22}$, 从而存在一个正常数 $\delta\in(0,\delta_1)$ 使得当 $0<\epsilon<\delta$ 时, $y_{24}>y_{20}>y_{23}>y_{22}$ 及 $y_{21}<y_{20}<y_{24}$• 进而 $(y_{20},y_{21},y_{22},y_{23},y_{24})$ 具有不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的• □

其次, 我们将证明当 $k<0$, $\omega>0$ 和 ϵ 充分小时, 方程(5) 具有混沌结构, 即

定理 2　设 $k<-1$, $\omega>0$ 且满足下列条件之一

1) $-\omega<a-\omega a_0<-\dfrac{k^2+k}{k^2+k+1}\omega$;

或者

2) $-\dfrac{1}{k^2+k+1}\omega<a-\omega a_0<0\cdot$

则存在一个正常数 δ 使得对任意 $0<\epsilon<\delta$ 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的•

证明　按照方程(5)

$$F'(y) = k + \frac{\omega}{\epsilon} f(y)(1 - f(y))\cdot$$

由于 $k < -1$, $\omega > 0$, 存在一个正常数 δ_1 使得当 $0 < \epsilon < \delta_1$, $1 + 4k\epsilon/\omega > 0$• 由 $F'(y) = 0$, 有

$$y_{10} = \epsilon \ln \frac{1 - \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}}{1 + \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}} < 0, \quad 及\ y_{20} = \epsilon \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}}{1 - \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}} > 0;$$

$$f(y_{10}) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}}{2}, \quad 及\ f(y_{20}) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{k\epsilon}{\omega}}}{2}\cdot$$

显然, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} y_{10} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} y_{20} = 0$•

对于条件 1)• 由条件 1) 的第一个不等式,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{21} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{20}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{20} + \omega f(y_{20}) + a - \omega a_0) = a - \omega a_0 + \omega > 0\cdot$$

因为 $k < -1$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{22} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{21}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{21} + \omega f(y_{21}) + a - \omega a_0) = (k + 1)[(a - \omega a_0) + \omega] < 0\cdot$$

由条件 1) 的第二个不等式,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{23} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{22}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{22} + \omega f(y_{22}) + a - \omega a_0) = (k^2 + k + 1)(a - \omega a_0) + (k^2 + k)\omega < 0\cdot$$

因此, 存在一个正常数 $\delta \in (0, \delta_1)$ 使得当 $0 < \epsilon < \delta$ 时, $y_{23} < y_{20} < y_{21}$• 进而$(y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{23})$ 具有不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的•

对于条件 2)• 由条件 2) 的第一个不等式,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{11} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{10}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{10} + \omega f(y_{10}) + a - \omega a_0) = a - \omega a_0 < 0\cdot$$

因为 $k < -1$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{12} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{11}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{11} + \omega f(y_{11}) + a - \omega a_0) = (k + 1)(a - \omega a_0) > 0\cdot$$

由条件 2) 的第二个不等式,

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_{13} = \lim_{\epsilon \to 0} F(y_{12}) = \lim_{\epsilon \to 0}(ky_{12} + \omega f(y_{12}) + a - \omega a_0) = (k^2 + k + 1)(a - \omega a_0) + \omega > 0\cdot$$

因此, 存在一个正常数 $\delta \in (0, \delta_1)$ 使得当 $0 < \epsilon < \delta$ 时, $y_{13} < y_{10} < y_{11}$• 进而$(y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13})$ 存在不可分性, 按照引理 1, F 有周期 3 点• 又由引理 2 和注 2, 方程(5) 在 Li_Yokre 意义下是混沌的• □

最后, 我们给出一个关于 CNN 的推论, 按照[2] , CNN 模型如下:

$$y(t + 1) = F(y(t)) = ky(t) - \omega f(y(t)) + a\cdot \tag{6}$$

推论 1 设 $0 < k < 0$, $\omega > 0$ 而且下列条件之一满足

1) $\frac{1}{k+1}\omega < a < \frac{k^2+k+1}{k^3+k^2+k+1}\omega$ 及 $a \neq \frac{k+1}{k^2+k+1}$;

或者

2) $\frac{k^3}{k^3+k^2+k+1}\omega < a < \frac{k}{k+1}\omega$ 及 $a \neq \frac{k^2}{k^2+k+1}\omega$•

则存在一个正常数 δ 使得对任意 $0<\epsilon<\delta$, CNN 在 Li_Yorke 意义下是混沌的•

证明　在定理 1 中令方程(5)的 $a_0 = 0$ 即可得此推论•　□

我们用一个例子来说明我们的定理的作用•

例 1　在 CNN 中让 $k = 0.5$, $\omega = -1.0$, $\epsilon = 0.04$, 由推论, 我们可以得到 $1/15 < a < 1/3$, $a \neq 1/7$, 或者 $2/3 < a < 14/15$, $a \neq 6/7$, 以及 ϵ 充分小时, CNN 具有 Li_Yorke 意义下的混沌结构•　图 1 显示了李雅普诺夫指数 λ 和参数 a 的关系•

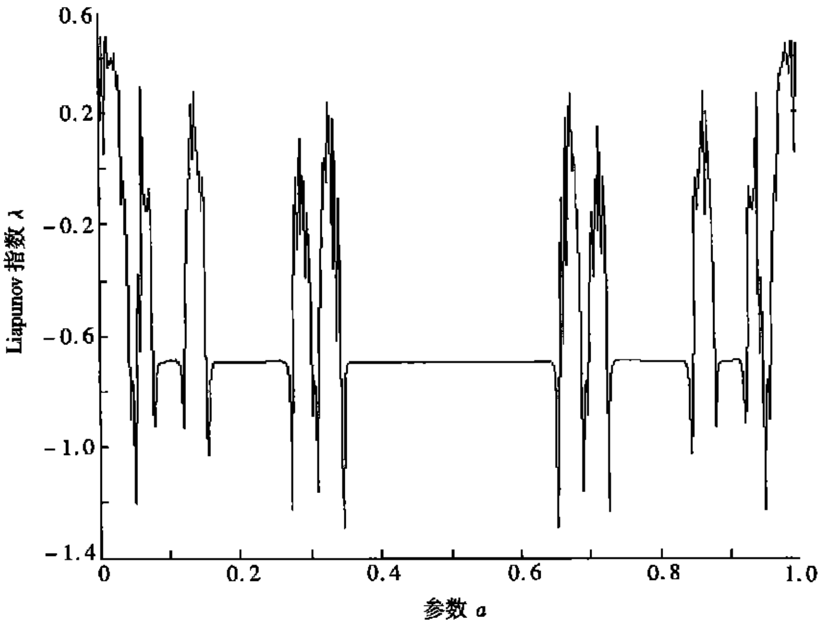

图 1　Liapunov 指数 λ 和参数 a 的关系($k = 0.5$, $\omega = -0.1$, $y(0) = 0.5$)

3　结　　论

在这篇文章中, 我们给出了几个一维 TCNN 中存在混沌的充分条件•　Aihara 在[2]中通过数值计算所观察的结论是本文的特例•　同时, 这些结论对于在组合优化和联想记忆等实际问题中设计 TCNN 具有一定的指导作用•　但是由于在这篇文章中, 我们仅仅考虑了一维的 TCNN, 在高维空间中如何寻找混沌存在的充分条件等问题是很重要的, 而这正是我们进一步研究的主题•

[参　考　文　献]

[1]　Chen L, Aihara K. Chaotic simulated annealing by a neural networks model with transient chaos[J]. Neural Networks, 1995, **8**(6): 915—930.

[2]　Aihara K, Takabe T, Toyoda M. Chaotic neural networks[J]. Phys Lett A, 1990, **144**(6): 333—340.

[3]　Chen L, Aihara K. Chaos and asymptotical stability in discrete_time neural networks[J]. Physica D,

1997, **104**(2): 286—325.

[4] Chen L, Aihara K. Global searching ability of chaotic neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Systems I, 1999, **46**(8): 974—993.

[5] Marotto F R. Snap_back repellers imply chaos in R^n [J]. J Math Anal Appl, 1978, **63**(1): 199—223.

[6] Chen G, Hsu S B, Zhou J. Snapback repelers as a cause of chaotic vibration of the wave equation with a Van der Pol boundary condition and energy injection at the middle of the span[J]. J Math Phys, 1998, **39**(12): 6459—6489.

[7] Li T, Misiurewicz M, Pianigiani G, et al. No division implies chaos[J]. Trans Amer Math Soc, 1982, **273**(1): 191—199.

[8] Li T, Yorke J. Period three implies chaos[J]. Amer Math Monthly, 1975, **82**(1): 985—992.

[9] Adachi M, Aihara K. Associative dynamics in a chaotic neural networks[J]. Neural Networks, 1997, **10**(1): 83—98.

Chaos in Transiently Chaotic Neural Networks

RUAN Jiong, ZHAO Wei_rui, LIU Rong_song

(Department of Mathematics, Research Center for Nonlinear Science and Laboratory of Mathematics for Nonlinear Science, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Abstract: It was theoretically proved that one_dimensional transiently chaotic neural networks have chaotic structure in sense of Li_Yorke theorem with some given assumptions using that no division implies chaos. In particular, it is further derived sufficient conditions for the existence of chaos in sense of Li_Yorke theorem in chaotic neural network, which leads to the fact that Aihara has demonstrated by numerical method. Finally, an example and numerical simulation are shown to illustrate and reinforce the previous theory.

Key words: chaotic neural networks; chaos; no division