应用数学和力学,第 24 卷 第 3 期(2003 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 03_0267_08

马氏环境中可数马氏链的 Poisson 极限率*

方大凡[1,2], 王汉兴[2], 唐矛宁[2]

(1. 岳阳师范学院 数学系,湖南岳阳 414000;
2. 上海大学 数学系, 上海 200436)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究了马氏环境中的可数马氏链, 主要证明了过程于小柱集上的回返次数是渐近地服从 Poisson 分布• 为此, 引入熵函数 h, 首先给出了马氏环境中马氏链的 Shannon_McMillan_Breiman 定理, 还给出了一个非马氏过程 Posson 逼近的例子• 当环境过程退化为一常数序列时, 便得到可数马氏链的 Poisson 极限定理• 这是有限马氏链 Pitskel 相应结果的拓广•

关 键 词: Poisson 分布; 马氏链; 随机环境
中图分类号: O211.62 文献标识码: A

1 过程与结果的陈述

随机过程中的 Poisson 极限率的研究不仅于概率论本身有其重要的意义, 而且在动力系统的遍历理论等其他领域中亦有着重要的应用• 一个多世纪以来, 有关 0_1 值独立随机序列的经典 Poisson 极限定理已得到了广泛的发展[1,2]• 1991 年 Pitske[3] 得到了关于遍历有穷马氏链的 Poisson 极限定理• 本文考虑马氏环境中的可数马氏链, 主要证明了链回返于小柱集的 Poisson 极限率• 熟知, 马氏环境中的马氏过程一般来说不是马氏链, 因此, 我们给出一个非马氏过程的 Poisson 逼近的例子• 另一方面, 当环境过程退化为一常数序列(即环境过程的状态空间只含有一个点) 时, 我们便得到可数马氏链的 Poisson 极限定理, 这是 Pitskel 关于有限马氏链相应结果的拓广[3]•

设 $\mathbf{Z}_+$ 为正整数全体所做成的集合, $\mathbf{Z}=\{0\}\cup\mathbf{Z}_+$• 又令 Θ 为一可数空间, $\{P(\theta):\theta\in\Theta\}$ 为可数状态空间 E 上的转移概率, $\vec{X}=\{X_0,X_1,\cdots\}$ 为一取值于 E 的随机序列, $\vec{\xi}=\{\xi_0,\xi_1,\cdots\}$ 为一取值于 Θ 的马氏链, 其转移概率为 $K(\theta,\alpha)$, $\theta,\alpha\in\Theta$• 对于 $n\in\mathbf{Z}$, $x\in E$, 若 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{X}$ 满足 $P(X_{n+1}=x\mid X_0,X_1,\cdots,X_n;\xi_0,\xi_1,\cdots)=P(\xi_n;X_n,x)$, $a.s.$, 则称 $\vec{X}$ 为马氏环境中的马氏链[4~6], $\vec{\xi}$ 称为马氏环境过程•

熟知, 双变量过程 $(\vec{X},\vec{\xi})=\{(X_0,\xi_0),(X_1,\xi_1),\cdots\}$ 为一马氏链[6], 我们称它为一个双链, 其转移概率取决于 $P((x,\theta),(y,\alpha))=K(\theta,\alpha)P(\theta;x,y)$, $\theta,\alpha\in\Theta$, $x,y\in E$•

---

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2002_12_10
基金项目: 国家自然科研基金资助项目(19971072);
作者简介: 方大凡(1958—) , 男, 湖南平江人, 副教授, 博士•

设 E^Z, Θ^Z, $\Omega=(E\times\Theta)^Z$ 分别表示过程 $\vec{X}$, 过程 $\vec{\xi}$ 以及双链 $(\vec{X},\vec{\xi})$ 的轨道空间•

在本文中, 我们总假定双链是不可约非周期的• 设 P 为具有平稳分布 $\pi=\{\pi_{(x,\theta)}:(x,\theta)\in E\times\Theta\}$ 的双链的马尔可夫测度, P^* 是 P 关于边缘过程 $\vec{X}$ 的边缘分布, T 表示 E^Z 上的转移变换• 对每个 $n\in\mathbf{Z}$, $\vec{x}\in E^Z$, 令 $S_n(\vec{x})=\{\vec{y}\in E^Z: y_i=x_i, 0\leqslant i\leqslant n\}$• 对 $\mu>0$, 以及满足 $\lim_{n\to\infty}\alpha(n)=0$ 的实数序列 $\{\alpha(n)\}$, 令 $N_n=[(\mu+\alpha(n))/P^*(S_n(\vec{x}))]$•

我们的主要结果如下:

定理 设双链是 * – 混合的[7]并且是不可约非周期的, 如果

(i) Θ 是一有限空间, 或者

(ii) 对某个常数 $\rho>0$, 有 $\inf\{P(\theta,x,y)>0:\theta\in\Theta, x,y\in E\}>\rho$,

那么对几乎所有的 $\vec{x}\in E^Z$ (关于 P^*), $\sum_{i=0}^{N_n} I_{S_n}(\vec{x})\circ T^i(\vec{X})$ 关于参数 μ 弱收敛于 Poisson 分布, 即

$$\lim_{n\to\infty}P^*\left(\sum_{i=0}^{N_n} I_{S_n}(\vec{x})\circ T^i(\vec{X})=k\right)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\qquad(k=0,1,\cdots)\text{•}$$

值得指出, 当环境过程的状态空间 Θ 只含一个点时, 过程 $\vec{X}$ 变成一马氏链, 于是, 作为定理的推论, 我们得到可数马氏链的 Poisson 极限定理•

通过检验 Sevast′yanov 定理[3]的条件, 我们将在第 3 节证明这个定理, 而证明的完成主要依赖于我们在第 2 节建立的引理, 这些引理本身也是令人感兴趣的•

2 若干引理及其证明

为了证明上述定理, 这一节我们先给出几个引理, 它们是有限马氏链相应结果的自然延伸• 设

$$h=-\sum_{\theta,x,y}\pi_{(x,\theta)}P(\theta,x,y)\ln P((x,\theta),\{y\}\times\Theta)\text{•}$$

我们注意到, 当环境过程 $\vec{\xi}$ 的状态空间 Θ 只含一个点时, h 变成马氏链 $\vec{X}$ 的熵•

下述引理可称为马氏环境中马氏链的 Shannon_McMillan_Breiman 定理[8], 它的证明依赖于双链的马尔可夫性•

引理 1 设 $h<\infty$, 如果

(i) Θ 是一有限空间, 或者

(ii) 对某常数 $\rho>0$, 有 $\lim\{P(\theta,x,y)\geq 0:\theta\in\Theta, x,y\in E\}\geqslant\rho$,

那么对于任意 $\delta>0$, 存在常数 $C_1(\vec{x})$ 和 $C_2(\vec{x})$, 对几乎所有的 $\vec{x}\in E^Z$ (关于 P^*), 都有

$$C_1(\vec{x})e^{-(h+\delta)n}<P^*(S_n(\vec{x}))<C_2(\vec{x})e^{-(h-\delta)n}\text{•}$$

证明 设

$$f(\omega)=f(\vec{x},\vec{\theta})=\begin{cases}\ln P((x_0,\theta_0),\{x_1\}\times\Theta) & (\text{如果 } P((x_0,\theta_0)),\{x_1\}\times\Theta)>0,\\ 0 & (\text{否则}),\end{cases}$$

又设

$$A_k=\{(\vec{x},\vec{\theta}):\exists\, i\leqslant k, P((x_i,\theta_i),(x_{i+1},\theta_{i+1}))=0\}\qquad(k\in\mathbf{Z}),$$

$$A=\{(\vec{x},\vec{\theta}):\exists\, i\in\mathbf{Z}, P((x_i,\theta_i),(x_{i+1},\theta_{i+1}))=0\}\text{•}$$

显然, $P(A_k)=0$, 并且 $P(A)=P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)=0$. 容易看出, 当 $\omega=(\vec{x},\vec{\theta})\notin A$, 也就是说, 对几乎所有的 $(\vec{x},\vec{\theta})$, 我们有 $-\ln P(\theta_i;x_i,x_{i+1})<\infty$, $(i\geqslant 0)$. 又由于 $h=\int f(\omega)P(\mathrm{d}\omega)<\infty$, 根据遍历定理, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)=\int f(\omega)P(\mathrm{d}\omega)=-h, P-a.s.., \text{ 并且}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(T^k\omega)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln P((x_k,\theta_k),(x_{k+1}\times\Theta))=$$

$$\frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}P((x_k,\theta_k),(x_{k+1}\times\Theta))=$$

$$\frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\alpha}P((x_k,\theta_k),(x_{k+1},\alpha))\right)=$$

$$\frac{1}{n}\ln\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}P((x_0,\theta_0),(x_1,\alpha_1))\cdots P((x_{n-1},\theta_{n-1}),(x_n,\alpha_n))=$$

$$\frac{1}{n}\ln\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\left[K(\theta_0,\alpha_1)P(\theta_0;x_0,x_1)\right]\cdots\left[K(\theta_{n-1},\alpha_n)P(\theta_{n-1};x_{n-1},x_n)\right]=$$

$$\frac{1}{n}\ln\left[P(\theta_0;x_0,x_1)P(\theta_1;x_1,x_2)\cdots P(\theta_{n-1};x_{n-1},x_n)\right]=$$

$$\frac{1}{n}\ln P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\theta},X_0=x_0\right),$$

这样, 我们便有

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\ln P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\xi},X_0=x_0\right)\right)=h,\ P-a.s.,$$

由此, 对任意 $\delta>0$, 存在一函数 $C(\vec{x},\vec{\xi})>0$ 满足

$$C(\vec{x},\vec{\xi})\mathrm{e}^{-(h+\delta)n}<P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\xi},X_0=x_0\right),\ P-a.s.$$

设 $C_1(\vec{x})=EC(\vec{x},\vec{\xi})$, 我们得到

$$C_1(\vec{x})\mathrm{e}^{-(h+\delta)n}<P^*\left(X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right),\ P^*-a.s.$$

下面分两种不同情况证明之:

(i) 设 Θ 有限, 固定 $\vec{x}$ 并使 $\vec{\theta}^*$ 满足 $-\ln P(\theta_k,x_k,x_{k+1})\leqslant-\ln P(\theta_k^*,x_k,x_{k+1})<\infty$, $\vec{\theta}\in\Theta^Z$, 我们得到

$$-\frac{1}{n}\ln P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\xi},X_0=x_0\right)=$$

$$-\frac{1}{n}\ln\left[P(\xi_0;x_0,x_1)\cdots P(\xi_{n-1};x_{n-1},x_n)\right]\leqslant$$

$$-\frac{1}{n}\ln\left[P(\theta_0^*;x_0,x_1)\cdots P(\theta_{n-1}^*;x_{n-1},x_n)\right].$$

由控制收敛定理

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\frac{1}{n}\ln P^*\left(X_0=x_0,X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)\right)=$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\frac{1}{n}\ln E\left(P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\xi},X_0=x_0\right)\right)\right)\leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}E\ln P\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\mid\vec{\xi},X_0=x_0\right)\right)=h.$$

于是, 对任意 $\delta > 0$, 存在常数 $C_2(\vec{x})$ 满足 $P^*(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) < C_2(\vec{x}) e^{-(h-\delta)n}$.

(ii) 由假设, 对任意的 $(\vec{x}, \vec{\theta}) \notin A$, 有

$$-\frac{1}{n}\ln\left[P(\theta_0; x_0, x_1)\cdots P(\theta_{n-1}; x_{n-1}, x_n)\right] \leqslant -\ln\rho,$$

由控制收敛定理,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\frac{1}{n}\ln P\left(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\right)\right) \leqslant$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\frac{1}{n}E\ln P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n \mid \vec{\xi}, X_0 = x_0\right)\right) = h.$$

这样, 对任意的 $\delta > 0$, 存在一常数 $C_2(\vec{x})$, 使得 $P^*(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) < C_2(\vec{x}) e^{-(h-\delta)n}$.

引理证毕.

引理 2 设双链是不可约非周期的, 如果 $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{(x,\theta)}\left|P^n((x,\theta),(y,\alpha)) - \pi_{y,\alpha}\right|\right) = 0$, 那么, 存在正常数 C 和 q, 使得对每一个 $\vec{x} \in E^Z$, 都有

(a) $P^*\left(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\right) < Cq^n$,

(b) $P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \xi_0 = \theta_0\right) < Cq^n$.

证明 这里, 我们仅给出(a) 的证明, 类似地可以证得(b).

因为 $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x,\theta}\left|P((x,\theta),(y,\alpha)) - \pi_{y,\alpha}\right|\right) = 0$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一整数 n_0, 便得当 $n \geqslant n_0$ 并且 $n = mn_0 + r$, $0 \leqslant r < n_0$ 时, 有

$$P^*\left(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\right) \leqslant$$
$$P^*\left(X_{n_0} = x_{n_0}, X_{2n_0} = x_{2n_0}, \cdots, X_{mn_0} = x_{mn_0}\right) =$$
$$\sum_{\theta_{n_0}, \cdots, \theta_{mn_0}} P\left((X_{n_0}, \xi_{n_0}) = (x_{n_0}, \theta_{n_0}), \cdots, (X_{mn_0}, \xi_{mn_0}) = (x_{mn_0}, \theta_{mn_0})\right) =$$
$$\sum_{\theta_{n_0}, \cdots, \theta_{mn_0}} \sum_{x,\theta} \pi_{(x,\theta)} P^{n_0}((x,\theta),(x_{n_0},\theta_{n_0}))\cdots$$
$$P^{n_0}\left((x_{(m-1)n_0}, \theta_{(m-1)n_0})(x_{mn_0}, \theta_{mn_0})\right) =$$
$$\sum_{(x,\theta)} \pi_{(x,\theta)}\left(\sum_{\theta_{n_0}} P^{n_0}((x,\theta),(x_{n_0},\theta_{n_0}))\right)\cdots$$
$$\left(\sum_{\theta_{mn_0}} P^{n_0}((x_{(m-1)n_0}, \theta_{(m-1)n_0}),(x_{mn_0}, \theta_{mn_0}))\right) \leqslant$$
$$\sum_{(x,\theta)} \pi_{(x,\theta)}\left(\pi\left(\left\{(x_{n_0}\right\} \times \Theta\right) + \varepsilon\right)\cdots\left(\pi\left(\left\{x_{mn_0}\right\} \times \Theta\right) + \varepsilon\right).$$

令 $\beta = \sup_{x\in X}\pi(\{x\} \times \Theta)$, 显然 $0 < \beta < 1$. 取 ε 充分小, 使得 $\beta + \varepsilon < 1$, 又令 $q = (\beta + \varepsilon)^{1/n_0}$, $C = q^{-n_0}$. 不难看出 $P^*(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) < Cq^n$. 引理证毕.

注 如果双链是强遍历的, 特别地, E 是有限的, 那么自然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x,\theta}\left|P((x,\theta),(y,\alpha)) - \pi_{y,\alpha}\right|\right) = 0.$$

引理 3 设双链是 $*$ - 混合的, 那么存在常数 C_1 和 λ, $C_1 > 0$, $0 < \lambda < 1$, 使得

$$\left|\frac{P^*\left(T^{k_2}\circ\vec{X} \in S_n(\vec{x}) \mid T^{k_1}\circ\vec{X} \in S_n(\vec{x})\right)}{P^*\left(T^{k_2}\circ\vec{X} \in S_n(\vec{x})\right)} - 1\right| < C_1\lambda^{k_1-k_2}.$$

证明　因为双链是$*$－混合的，所以它的边缘过程$\vec{X}$也是$*$－混合的，于是，由$*$－混合的定义，结论即得证．

注　当E和Θ都是有限空间时，双链$(\vec{X},\vec{\xi})$自然是$*$－混合的．当Θ只含一个点θ_0时，这一过程的$*$－混合条件[7]等价于：对某正整数m，某实数β，$0<\beta<1$，有

$$\sup_{x,y\in E}\left|\frac{P^m(\theta_0;x,y)-\pi_y}{\pi_y}\right|\leqslant\beta.$$

例　设双链$(\vec{X},\vec{\xi})$是不可约非周期的，如果存在常数α，β，$0<\alpha$，$\beta<1$，$\lambda=\beta+\alpha(1+\beta)<1$，使得

$$\sup_{\theta}K(\theta,\theta')\leqslant(1+\alpha)\inf_{\theta}K(\theta,\theta'),$$

$$\sup_{y,\theta}P(\theta;,y,y')\leqslant(1+\beta)\inf_{y,\theta}K(\theta;y,y'),$$

那么双链是$*$－混合的．

事实上，不难看出$\sup_{\omega,\omega'\in\theta}\left|\frac{P(\omega,\omega')-\pi'_\omega}{\pi'_\omega}\right|\leqslant\lambda$．我们知道这是可数状态空间马氏链$*$－混合的充分条件．

3　定理的证明

利用 Sevast' yanov 的定理[3]，我们来证明本文的主要结果．设$n,r\geqslant1$是整数．集$I_r(n)$称为稀疏的，如果它仅由一些具有相互不同指标$1\leqslant i_k\leqslant n$的$(i_1,\cdots,i_r)$所组成．

引理 4　设$\left\{\eta_i^n\right\}_{i=1}^n$，$n\geqslant1$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上 0_1 随机变量序列，定义

$$\xi_n=\eta_1^n+\eta_2^n+\cdots+\eta_n^n.$$

令$b_{i_1,\cdots,i_r}^n=P(\eta_{i_1}^n=\eta_{i_2}^n=\cdots=\eta_{i_r}^n=1)$，假定

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}b_i^n\right)=0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n b_i^n=\lambda>0. \tag{2}$$

进一步，假定存在稀疏集$I_r(n)$，使得对任意$r\geqslant1$，下列各式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(n)}b_{i_1\cdots i_r}^n=0, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(n)}b_{i_1}^n\cdots b_{i_r}^n=0, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{i_1}^n\cdots b_{i_r}^n}{b_{i_1,\cdots,i_r}^n}=1. \tag{5}$$

在$(i_1,\cdots,i_r)\notin I_r(n)$中一致成立，那么就有

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

我们引入如下一些记号：对$\mu>0$，$\vec{x}\in E^Z$，令

$$\eta_i^n(\vec{y})=I_{S_n}(\vec{x})(T^i\vec{y}),$$

$$\xi^n(\vec{y})=\sum_{i=0}^{N_n}\eta_i^n(\vec{y}),$$

$$b^n_{i_1,\cdots,i_r} = P^*(\eta^n_{i_1} = 1, \cdots, \eta^n_{i_r} = 1).$$

令 $W_r(N_n)$ 是所有 $(i_1, \cdots, i_r)$ 全体所做成的集, 使得 $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant N_n$, 又令

$$I_r(N_n) \subset W_r(N_n),\quad J_r(N_n) \subset W_r(N_n),$$

$$I_r(N_n) = \left\{(i_1, \cdots, i_r): \min_{1\leqslant j\leqslant r-1} |i_{j+1} - i_j| < n + [\ln n]\right\},$$

$$J_r(N_n) = \left\{(i_1, \cdots, i_r): \min_{1\leqslant j\leqslant r-1} |i_{j+1} - i_j| < n - 3[\ln n/\ln q^{-1}]\right\}.$$

类似于[3]中证明引理1.2和1.3的方法, 由引理2, 可以得到下述结果, 由于利用了引理2中的(b), 我们的证明似乎更简单一些.

引理5 对充分大的 n, 如果 $(i_1, \cdots, i_r) \notin J_r(N_n)$, 那么 $b^n_{i_1,\cdots,i_r} = 0$.

证明 设 m, n 是整数, 满足 $1 \leqslant m < n$, 又设 $K_n = n - 3[\ln n/\ln q^{-1}] \geqslant 1$, 令

$$D_{n,m} = \left\{\vec{x} \in E^Z: x_{i+m} = x_i, 0 \leqslant i \leqslant n - m\right\},$$

$$D_n = \bigcup_{1\leqslant m\leqslant k_n} D_{n,m}.$$

由[3]中引理1.2, 当 $(i_1, \cdots, i_r) \in J_r(N_n)$ 且 $\left\{\vec{y}: \eta^n_{i_1}(\vec{y}) = 1, \cdots, \eta^n_{i_r}(\vec{y}) = 1\right\} \neq \phi$ 时, 有 $S_n(\vec{x}) \subset D_n$, 由引理2中的(b), 则有

$$P^*(D_{n,m}) = P^*(\vec{x}: x_{i+m} = x_i, 0 \leqslant i \leqslant n - m) =$$
$$\sum_{y_0,\cdots,y_{m-1}} \sum_{\alpha_0,\cdots,\alpha_{m-1}} P\left((\vec{x}, \theta): x_i = y_i, \theta_i = \alpha_i, 0 \leqslant i \leqslant m - 1, \vec{x} \in D_{n,m}\right) \leqslant$$
$$Cq^{n-m}.$$

由 $n - m > 3[\ln n/\ln q^{-1}]$, 我们又可得到 $P^*(D_{n,m}) < Cn^{-3}$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} P^*(D_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} Cn^{-2} < \infty$, 于是由 Borel_Cantelli 引理, $P^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k\right) = 0$. 这意味着对充分大的 n 和 $(i_1, \cdots, i_r) \in J_r(N_n)$, 有 $b^n_{i_1,\cdots,i_r} = 0$. 证毕.

引理6 对几乎所有的 $\vec{x} \in E^Z$, 任意 $\delta > 0$ 充分大的 n, 存在常数 $C_1(r, \vec{x})$, 使得

$$|I_r(N_n)| \leqslant C_1(r, \vec{x})(n + [\ln n])e^{n(r-1)(h+\delta)}.$$

证明 由[3]中的引理1.5, 可得 $|I_r(N_n)| \leqslant (r - 1)N_n^{r-1}(n + [\ln n])$, 根据 N_n 的定义及引理1, 对几乎所有的 $\vec{x}$, 任意 $\delta_1 > 0$ 及充分大的 n, 我们有 $N_n \leqslant (\mu + \alpha(n))C_1^{-1}(\vec{x})e^{n(h+\delta_1)}$. 取 $\delta_1 < \delta$ 及 $C_1(r, \vec{x}) = (r - 1)(\mu + \alpha(n))C_1^{-1}(\vec{x})$, 证明即可完成.

引理7 对任意 $\delta > 0$, 正整数 r, 及几乎所有的 $\vec{x}$, 存在整数 n_0, 正数 t 以及常数 $C_2(r, \vec{x})$, 使得对 $n > n_0$ 及 $(i_1, \cdots, i_r) \notin J_r(N_n)$, 有 $b^n_{i_1,\cdots,i_r} < C_2(r, \vec{x})n^t e^{-nr(h-\delta)}$.

证明 设 $k_n = n - 3[\ln n/\ln q^{-1}]$, 并且 k_n 充分大, 如果 $(i_1, \cdots, i_r) \notin J_r(N_n)$, 则有

$$i_{j+1} - i_j > n - 3[\ln n/\ln q^{-1}], (1 \leqslant j \leqslant r - 1).$$

显然, $b^n_{i_1,\cdots,i_r} \leqslant P^*(\vec{y}: T^{i_1}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x}), \cdots, T^{i_r}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x}))$, 且

$$P^*(\vec{y}: T^{i_1}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x}), \cdots, T^{i_r}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x})) =$$
$$P^*(\vec{y}: T^{i_1} \in S_{k_n}(\vec{x})) \times$$
$$\prod_{j=2}^{r} P^*(T^{i_j}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x}) \mid T^{i_{j-1}}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x}), \cdots, T^{i_1}\vec{y} \in S_{k_n}(\vec{x})).$$

由引理3, 可以得到

$$\left|\frac{P^*(T^{i_j}\vec{y}\in S_{k_n}(\vec{x})\mid T^{i_{j-1}}\vec{y}\in S_{k_n}(\vec{x}),\cdots,T^{i_1}\vec{y}\in S_{k_n}(\vec{x}))}{P^*(T^{i_j}\vec{y}\in S_{k_n}(\vec{x}))}-1\right|<C\lambda^{[\ln n]}.$$

于是, 由引理 1, 我们有

$$b^n_{i_1,\cdots,i_r}\leqslant C_2^r(\vec{x})\,e^{-nr(h-\delta)}e^{3r(h-\delta)\ln n/\ln q^{-1}+r(h-\delta)\ln n}\left(1+C\lambda^{[\ln n]}\right)^r.$$

令

$$C_2(r,\vec{x})=C_2^r(\vec{x})(1+C\lambda^{[\ln n]})^r,\ t=[3r(h-\delta)/\ln q^{-1}]+r(h-\delta)+1.$$

引理证毕.

定理的证明　我们需要证明引理 4 中的条件(1) ~ (5).

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_i b_i^n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}Cq^n=0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N_n}b_i^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\mu+\alpha(n))=\mu.$

3) 由引理 5, 对充分大的 n 和$(i_1,\cdots,i_r)\in J_r(N_n)$, 可得 $b^n_{i_1,\cdots,i_r}=0$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in J_r(N_n)}b^n_{i_1,\cdots,i_r}=0.$$

如果 $(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(N_n)-J_r(N_n)$, 由引理 6 和 7, 又可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(N_n)-J_r(N_n)}b^n_{i_1,\cdots,i_r}\leqslant\lim_{n\to\infty}|I_r(N_n)-J_r(N_n)|\,C_2(r,\vec{x})\,n^t e^{-nr(h-\delta)}\leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}C_1(r,x)\,C_2(r,\vec{x})(n+[\ln n]\,n^t e^{n(r-1)(h+\delta)-nr(h-\delta)})=0.$$

这样, 我们就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(N_n)}b^n_{i_1,\cdots,i_r}=0.$

4) 由引理 1 和引理 6, 我们可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r(N_n)}b^n_{i_1}\cdots b^n_{i_r}<\lim_{n\to\infty}|I_r(N_n)|\,e^{-nr(h-\delta)}C_2^r(\vec{x})\leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}C_1^r(\vec{x})\,C_2^r(r,\vec{x})(n+[\ln n]\,e^{n(r-1)(h+\delta)-nr(h-\delta)})=0.$$

5) 注意到 $i_j-i_{j-1}>n+[\ln n]$ 及

$$b^n_{i_1,\cdots,i_r}=P^*(T^{i_1}\vec{y}\in S_n(\vec{x}))\prod_{j=2}^{r}P^*(T^{i_j}\vec{y}\in S_n(\vec{x}),\cdots,T^{i_1}\vec{y}\in S_n(\vec{x})).$$

由引理3, 对 $(i_1,\cdots,i_r)\notin I_r(N_n)$, 我们有

$$b^n_{i_1}\cdots b^n_{i_r}(1-C\lambda^{[\ln n]})^r<b^n_{i_1,\cdots,i_r}<b^n_{i_1}\cdots b^n_{i_r}(1+C\lambda^{[\ln n]})^r.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^n_{i_1,\cdots,i_r}}{b^n_{i_1}\cdots b^n_{i_r}}=1$ 在$(i_1,\cdots,i_r)\notin I_r(N_n)$ 中一致成立.　定理证毕.

[参　考　文　献]

[1] Seyast' yanov B A. Poisson limit law for a scheme of sums of independent random variables[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1972, **17**(4): 695—699.

[2] Wang Y H. A Compound poisson Convergence Theorem[J]. Ann Probab, 1991, **19**: 452—455.

[3] Pitskel B. Poisson limit law for markov chains[J]. Ergod Th Dynam Sys, 1991, **11**, 501—513.

[4] Nawrotzki K. Discrete open systems or markov chains is a random environment[J]. J Inform Process Cybernet, 1981, **17**: 569—599.

[5] Nawrotzki K. Discrete open systems or Markov chains in random environment[J]. J Inform Process Cybernet, 1982, **18**: 83—98.

[6] Cogburn R. Markov chains in random environments: the case of Markovian environments[J]. Ann Probab, 1980, **8**: 908—916.

[7] Blum J R, Hanson D L, Koopmans L H. On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes[J]. Z Wahrsch Verw Gebrete, 1963, **2**: 1—11.

[8] Cornfeld I, Fomin S, Sinai Ya G. Ergodic Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1982.

Poisson Limit Theorem for Countable Markov Chains in Markovian Environments

FANG Da_fan[1, 2], WANG Han_xing[2], TANG Mao_ning[2]

(1. Department of Mathematics, Yueyang Normal University, Hunan 414000, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 2000436, P. R. China)

Abstract: A countable Markov chain in a Markovian environment is considered. A Poisson limit theorem for the chain recurring to small cylindrical sets is mainly achieved. In order to prove this theorem, the entropy function h is introduced and the Shannon_McMillan_Breiman theorem for the Markov chain in a Markovian environment is shown. It's well known that a Markov process in a Markovian environment is generally not a standard Markov chain, so an example of Poisson approximation for a process which is not a Markov process is given. On the other hand, when the environmental process degenerates to a constant sequence, a Poisson limit theorem for countable Markov chains, which is the generalization of Pitskel's result for finite Markov chains is obtained.

Key words: Poisson distributions; Markov chains; random environments