

文章编号: 1000-0887(2003) 03_0289_11

基于时滞惯性流形的非线性 Galerkin 算法^{*}

侯延仁, 李开泰

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(张鸿庆推荐)

摘要: 针对 Marion_Temam 型非线性 Galerkin 方法可行性强烈依赖于最小解题规模的不足, 利用时滞惯性流形的新思想, 以二维 Navier-Stokes 方程为例, 给出了该类非线性 Galerkin 方法的一种改进形式, 并证明了改进后的方法在保持原方法优越性的同时, 其可行性条件得到了很大的改善, 从而, 给出的是一种可行的高效稳定算法。

关键词: 非线性 Galerkin 方法; 时滞惯性流形; Navier-Stokes 方程

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

过去十年中, 人们为了对 Navier-Stokes 方程进行长期数值模拟, 在惯性流形(IM)^[1]、近似惯性流形(AIM)^[2]概念基础上, 提出了非线性 Galerkin 方法(NGM)^[3,4], 并进行了大量的研究, 如[5], [6], [7]等。在各类 NGM 中, 人们研究最多的是一类被称为 M_T (Marion_Temam) 型的 NGM。以 $\Omega = (-\pi, \pi)^2$ 上具有周期边界条件的无量纲抽象自治 Navier-Stokes 方程为例

$$\begin{cases} \forall f \in H, \text{ 求 } u \in C(\mathbf{R}^+, V) \text{ 使} \\ \frac{du}{dt} + \lambda u + B(u, u) = f, \\ u(0) = a. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\lambda > 0$ 为粘性系数, A 为 $H = \left\{ \phi \in (L^2_{per}(\Omega))^2, \int_{\Omega} \phi dx = 0, \text{div } \phi = 0 \right\}$ 上的 Stokes 算子。对任意的 $\alpha \in \mathbf{R}$, A^α 为幂算子。 $D(A^\alpha)$ 为其定义域, 并记 $V = D(A^{1/2})$ 。若以 (\cdot, \cdot) 和 $|\cdot|$ 表示 L^2 内积和范数, 则 $|\cdot|_{A^\alpha} = (A^\alpha \cdot, A^\alpha \cdot)^{1/2}$ 为 $D(A^\alpha)$ 的 $H^{2\alpha}$ 等价范数。 $B(u, u) = P[(u \cdot \nabla)u]$, P 为 $(L^2_{per}(\Omega))^2$ 到 H 的 Leray 投影算子。对给定的 $n \in \mathbf{N}$, $V_n \subset V$ 是 n 维子空间, P_n 是从 V 到 V_n 的 L^2 正交投影算子, 并记 $Q_n = I - P_n$ 。若记 $p = P_n u$, $q = Q_n u$, 则 IM 认为 u 的大、小涡分量 p 和 q 之间存在某种相互作用规律, 而 AIM 就是这种规律的某种近似。M_T 型 AIM 认为大、小涡分量间满足如下近似关系

$$q \approx \Phi(p) = \lambda^{-1} A^{-1} Q_n [f - B(p, p)]. \quad (2)$$

于是, Navier-Stokes 方程在一定程度上, 可由下面有限维系统来逼近

* 收稿日期: 2001_09_18; 修订日期: 2002_09_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10101020); 国家重大基础研究“973”项目(G199032801_01_5)

作者简介: 侯延仁(1969—), 男, 陕西延安人, 副教授, 博士(E-mail: yrhou@mail.xjtu.edu.cn)。

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Mv + P_n B(v + w, v + w) = Pf, \\ Mw + Q_n B(v, v) = Qf, \\ v(0) = P_n a. \end{cases} \quad (3)$$

对 $N \in \mathbb{N}, N > n$, 将(3) 中的 w 限制在 $(P_N - P_n)V$ 中, 就是 M_T 型 NGM.

在文献[7]中, 作者对 M_T 型 Fourier NGM 进行了全面细致的分析, 结果显示, 相比于标准 Galerkin 方法(SGM), NGM 具有更好的数值稳定性和更高的计算效率, 因而更适合于用来对 Navier-Stokes 方程进行长时间和较大规模的数值模拟. 但需要注意的是, M_T 型 NGM 是建立在这样一种直观假定之上的, 即 u 的小涡分量 $q(t)$ 连同其时间导数 $\dot{q}(t)$ 均是“小”量. 只有当比值 $|q(t)| \setminus |p(t)|, |\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)|$ 很小时, 我们用(3) 来逼近(1) 才是可行的. 否则, 对一些大小相当的量进行取舍, 必然会引起精度上的严重损失. 那么, 它们会很小时吗? 回答是肯定的. 只要取 n 充分大, 它们就会充分小. 关于这一点, 我们下面引用文章[8] 中给出的几个数值结果作为论据.

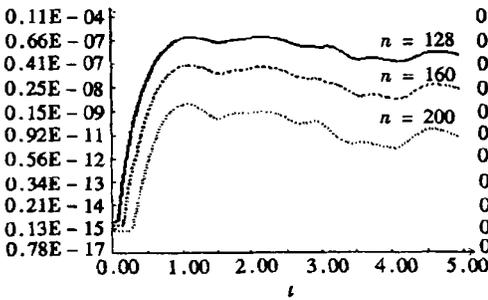


图1 比值 $|q(t)| \setminus |p(t)|$ 曲线

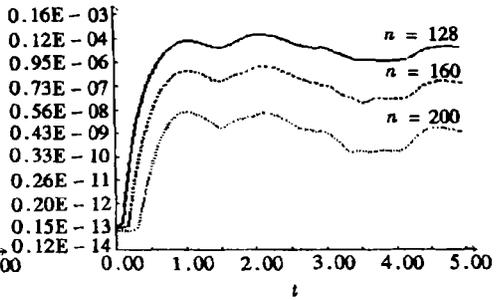


图2 比值 $|\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)|$ 曲线

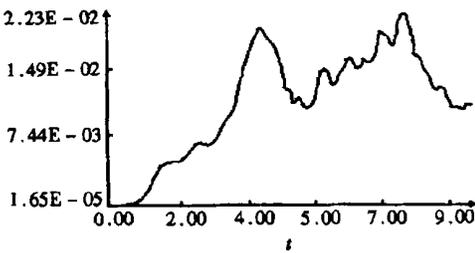


图3 比值 $|q(t)| \setminus |p(t)|$ 曲线

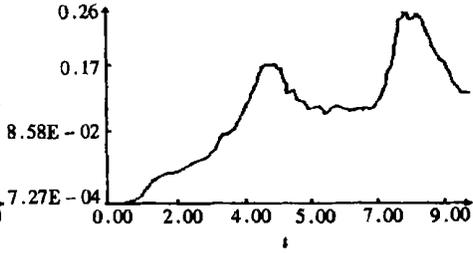


图4 比值 $|\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)|$ 曲线

在上面的例子中, $N = 256$, 而对不同的 n (128, 160 和 200), 给出了 $|q(t)| \setminus |p(t)|$ 和 $|\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)|$. 显然当 $n = 128$, 即 $n = N/2$ 时, 可以说 $|q(t)| \setminus |p(t)| = o(\bar{\chi}^{-1} N^{-2})$, 而至少可认可 $|\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)| = O(\bar{\chi}^{-1} N^{-2})$. 而当 $n = 160$ 和 200 时, 可认为 $|q(t)| \setminus |p(t)|, |\dot{q}(t)| \setminus |\dot{p}(t)| = o(\bar{\chi}^{-1} N^{-2})$, 即是空间离散误差的同阶或高阶小量. 因此, 对这样的 N 和 n , M_T 型 NGM 是可行的.

现在, 还有一个关键问题, 即计算资源. 上面两个在[8] 中给出的计算结果, 均是在 CRAY2 上完成的, 而同样规模的数值模拟, 由于其巨大的计算和内存使用量, 因而在通常的计算条件下几乎是不可能的. 为此, 我们必须降低求解规模以适应计算资源的限制, 即减小 N

和 n 。那么,在它们相对小的情况下,上述两个比值又会是什么情形呢?下面我们通过一个数值试验来说明。其中 $N = 48, n = 24, \lambda = 0.005$, 对时间导数用向后 Euler 差商近似, 时间步长 $k = 0.0001$ 。

图 3 显示 $|q(t)| \setminus |p(t)| = O(10^{-2}) = o(\lambda^{-1}N^{-2})$, 即 $|q(t)|$ 是比空间离散误差高阶的小量, 而图 4 说明 $q(t)$ 却不可以被视为“小”量, 如果在这样的解题规模下, 舍去 $q(t)$, 必然无法保证所有的 M_T 型 NGM 的精度。实际上, 对如此的 N 和 n , 我们对 M_T 型 NGM 所做的数值检验的结果与上面相一致的。

通过上面的数值实验可以看出, M_T 型 NGM 只有在解题规模适当大, 即 n 适当大时, 才是可行的, 即 M_T 型 NGM 的可行性强烈依赖于大涡方程的维数(称为最小解题规模), 具体情况是

$$n \geq \text{cmax} \left\{ \frac{|A|^{1/2} |u|^2 n^{1/4}}{\lambda^2}, \frac{|f|}{\lambda^2} \right\} \quad (\text{周期边条情形}), \tag{4}$$

而对固定边界, n 的要求就更苛刻。这种苛刻的条件源自于 IM 和 AIM 概念的隐含基础, 即他们认为大小涡分量间的相互作用是瞬时的。而最近人们提出的一种更合理的概念——时滞惯性流形(IMD)(参见[9]及[10])认为, 大小涡分量间的相互作用并不是一种简单的瞬时行为, 而是与涡发展的历史有关, 即

$$q(t) = \Phi(p(t), q(t - T)) \quad (T \text{ 是一个适当的时间延迟}). \tag{5}$$

文献显示这种形式的 IMD 对耗散系统来说是广泛存在的, 并且它对大涡方程的最小维数几乎没有限制。本文就试图基于形如(5)的 IMD, 对 M_T 型 NGM 进行改造, 在减弱其可行性条件(4)的同时, 保护其良好的稳定性和收敛性。

1 数值格式及其稳定性

由上述讨论, 我们利用 IMD 的思想可得(1)的如下近似:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \mathbb{A}v + P_n B(v + w, v + w) = Pf, \\ \frac{dw}{dt} + \mathbb{A}w + Q_n B(v, v) = Qf, \\ v(0) = P_n a, w(0) = Q_n a. \end{cases} \tag{6}$$

事实上, 由(6)我们可以照搬文献[10]的方法得到一个形如(5)的近似 IMD。下面, 对给定的 $n, N \in \mathbb{N}$ 及 $k > 0$, 就一种简单向前 Euler 差分格式为例, 对(6)进行全离散: $Q_{Nn} = P_N - P_n, V_N^n = Q_{Nn} V$

$$\begin{cases} \forall m \geq 0, \text{若 } (v_m, w_m) \in V_n \times V_N^n \text{ 已知, 求 } (v_{m+1}, w_{m+1}) \text{ 使} \\ v_{m+1} - v_m + \mathbb{A}v_{m+1} + kP_n B(v_m + w_m, v_m + w_m) = kPf, \\ w_{m+1} - w_m + \mathbb{A}w_{m+1} + kQ_{Nn} B(v_{m+1}, v_{m+1}) = kQ_{Nn} f, \\ v_0 = P_n a, w_0 = Q_{Nn} a, \end{cases} \tag{7}$$

这里 $k > 0$ 是时间步长。有时, 为了避免累赘, 我们以 u_m 记 $v_m + w_m$ 。(7)就是本节将要讨论的, 方程(2)的基于 IMD 的全离散 NGM 逼近形式。

下面讨论中经常出现的三线性形式 $b(u; v, w) = (B(u, v), w)$ 具有如下性质(参见[11]):

$$\left\{ \begin{array}{l} b(u; v, w) = -b(u; w, v) \quad (\forall u, v, w \in V), \\ b(u; u, Au) = 0 \quad (\forall u \in D(A)), \\ |b(u; v, w)| \leq c_1 |A^{s_1/2} u| |A^{(s_2+1)/2} v| |A^{s_3/2} w|, \\ \quad (s_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 s_i > 1 \text{ 或 } \sum_{i=1}^3 s_i = 1 \text{ 但 } s_i \neq 1), \\ |A^\alpha B(u, v)| \leq \begin{cases} c_1 |A^{1/2} u| |Av| & (\forall \alpha < 1/2), \\ c_1 |A^{3/4} u| |Av| & (\forall \alpha = 1/2), \\ c_1 (|u|_{L^\infty} |A^{\alpha+1/2} v| + |A^\alpha u| |A^{1/2} v|_{L^\infty}) / 2, & (\forall \alpha > 1/2). \end{cases} \end{array} \right. \quad (8)$$

另外, 我们给出会经常用到的投影算子 P_n 和 Q_n 的性质:

$$|P_n A^\alpha \phi| \leq n^{2(\alpha-\mu)} |A^\mu \phi|, \quad |Q_n A^\mu \phi| \leq n^{2(\mu-\alpha)} |A^\alpha \phi|, \\ \forall 0 \leq \mu \leq \alpha, \phi \in D(A^\alpha).$$

如下的离散 Gronwall 引理也会经常用到.

离散 Gronwall 引理 若正数序列 $\{d_l\}_{l=0}^\infty$ 对任意的 $l \in \mathbf{N}$ 满足 $\alpha d_{l+1} - \beta d_l \leq h$, 这里 α, β 和 h 是三个正常数且 $\alpha \neq \beta$. 则

$$\forall l \in \mathbf{N}, d_l \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^l \left[d_0 - \frac{h}{\alpha - \beta}\right] + \left[\frac{h}{\alpha - \beta}\right].$$

定理 1.1 假定 $\alpha \in V, f \in H$. 令 $R_1^2 = |A^{1/2} a|^2 + \frac{10|f|^2}{\lambda^2}$, 若 k 和 n 满足如下稳定性条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{50c_1^2 kn R_1^2}{\lambda}, 2c_1 k L_n n R_1 \leq \frac{1}{3}, \frac{n}{L_n} \geq \frac{80c_1 R_1}{3\lambda}, \\ k \leq \frac{\lambda}{6c_1 L_n (|f|^2 + c_1(1+L_n)^2 R_1^2)^{1/2}}, \end{array} \right. \quad (9)$$

则(7)的解在 V 中是一致稳定的, 且

$$\forall m \geq 0, |A^{1/2}(v_m + w_m)| \leq R_1. \quad (10)$$

定理中出现的与 n 有关的常数 L_n 是如下 Brezis_Gallouet 不等式的系数: $\forall \phi \in P_n V$

$$|\phi|_{L^\infty} \leq L_n |A^{1/2} \phi|, \quad L_n \sim (1 + \ln n)^{1/2}.$$

证 我们将利用数学归纳法证明该定理.

首先假定当 $l = m$ 时有

$$|A^{1/2}(v_m + w_m)| \leq R_1.$$

在(7)第一式两边同乘 Av_{m+1} 并在 Ω 上积分, 则有

$$\begin{aligned} |A^{1/2} v_{m+1}|^2 - |A^{1/2} v_m|^2 + |A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2 + 2k\lambda |Av_{m+1}|^2 = \\ 2k(f, Av_{m+1}) - 2b(u_m, u_m, Av_{m+1}) \leq \\ 2k|f| |Av_{m+1}| + 2k|b(v_m, u_m, Av_{m+1})| + 2k|b(w_m, v_m, Av_{m+1})| \leq \\ k\lambda |Av_{m+1}|^2 + \frac{k|f|^2}{\lambda} + 2c_1 k R_1^2 (L_n + 1) |Av_{m+1}| \leq \\ 2k\lambda |Av_{m+1}|^2 + \frac{k(|f|^2 + c_1^2(1+L_n)^2 R_1^2)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (11)$$

现在我们考虑

$$|A^{1/2}v_{m+1}|^2 \geq |A^{1/2}v_m|^2,$$

利用(11)可得

$$|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2 \leq \frac{k(|f|^2 + c_1^2(1 + L_n)^2 R_1^2)}{\lambda}. \quad (12)$$

分别以 Av_{m+1} 和 Aw_{m+1} 乘以(7)第一和第二式, 并把它们加起来有

$$|A^{1/2}u_{m+1}|^2 - |A^{1/2}u_m|^2 + |A^{1/2}(u_{m+1} - u_m)|^2 + 2k\lambda|Au_{m+1}|^2 = 2k(f, Au_{m+1}) - 2kb(v_m + w_m, v_m + w_m, Av_{m+1}) - 2kb(v_{m+1}, v_{m+1}, Aw_{m+1}).$$

下面对上式右端各项进行估计.

$$2k(f, Av_{m+1}) \leq 2k|f||Av_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{10}|Av_{m+1}|^2 + \frac{10k|f|^2}{\lambda},$$

$$\begin{aligned} 2kb(v_m, v_m, Av_{m+1}) &= 2kb(v_m, v_m, A(v_{m+1} - v_m)) \leq \\ &2k|(A^{1/2}B(v_m, v_{m+1}), A^{1/2}(v_{m+1} - v_m))| + 2k|b(v_m, v_{m+1} - v_m, A(v_{m+1} - v_m))| \leq \\ &2c_1kn^{1/2}B|A^{1/2}v_m||Av_{m+1}||A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)| + \\ &2c_1kLn|A^{1/2}v_m||A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2 \leq \\ &\frac{k\lambda}{10}|Av_{m+1}|^2 + \left[\frac{10c_1^2knR_1^2}{\lambda} + 2c_1kLnR_1 \right] |A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2kb(v_m, w_m, Av_{m+1}) &\leq 2k|b(v_m, w_{m+1} - w_m, Av_{m+1})| + 2k|b(v_m, w_{m+1}, Av_{m+1})| \leq \\ &2c_1kLnR_1|A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)||Av_{m+1}| + 2c_1kLn^{-1}R_1|Au_{m+1}|^2 \leq \\ &\left[\frac{k\lambda}{10} + 2c_1kLn^{-1}R_1 \right] |Au_{m+1}|^2 + \frac{10c_1^2kLn^2R_1^2}{\lambda} |A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2kb(w_m, v_m, Av_{m+1}) &\leq 2k|b(w_{m+1} - w_m, v_m, Av_{m+1})| + 2k|b(w_{m+1}, v_m, Av_{m+1})| \leq \\ &2c_1kR_1|A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)||Av_{m+1}| + 2c_1kn^{-1}R_1|Au_{m+1}|^2 \leq \\ &\left[\frac{k\lambda}{10} + 2c_1kn^{-1}R_1 \right] |Au_{m+1}|^2 + \frac{10c_1^2kR_1^2}{\lambda} |A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2kb(w_m, w_m, Av_{m+1}) &\leq 2k|b(w_{m+1} - w_m, w_m, Av_{m+1})| + 2k|b(w_{m+1}, w_m, Av_{m+1})| \leq \\ &2c_1kR_1|A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)||Av_{m+1}| + 2c_1kn^{-1}R_1|Au_{m+1}|^2 \leq \\ &\left[\frac{k\lambda}{10} + 2c_1kn^{-1}R_1 \right] |Au_{m+1}|^2 + \frac{10c_1^2kR_1^2}{\lambda} |A^{1/2}(w_{m+1} - w_m)|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2kb(v_{m+1}, v_{m+1}, Aw_{m+1}) &\leq 2k|b(v_{m+1} - v_m, v_{m+1}, Aw_{m+1})| + 2k|b(v_m, v_{m+1}, Aw_{m+1})| \leq \\ &2k|b(v_{m+1} - v_m, v_{m+1} - v_m, Aw_{m+1})| + \\ &2k|b(v_{m+1} - v_m, v_m, Aw_{m+1})| + 2k|AB(v_m, v_{m+1}), w_{m+1}| \leq \\ &2c_1kLn|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2|Aw_{m+1}| + \\ &2c_1kLnR_1|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)||Aw_{m+1}| + 2c_1kLn^{-1}R_1|Aw_{m+1}|^2 \leq \\ &\frac{2k\lambda}{10}|Au_{m+1}|^2 + \frac{10c_1^2kLn^2}{\lambda}|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2 + \\ &\frac{10c_1^2kLn^2R_1^2}{\lambda}|A^{1/2}(v_{m+1} - v_m)|^2 + 2c_1kLn^{-1}R_1|Au_{m+1}|^2. \end{aligned}$$

不失一般性, 我们总假定 $L_n^2 \leq n$. 综合上面六个估计并注意(12), 可知

$$|A^{1/2}u_{m+1}|^2 - |A^{1/2}u_m|^2 + k\lambda|Au_{m+1}|^2 \leq \left[1 - \frac{50c_1^2knR_1^2}{\lambda} - 2c_1kLnR_1 - \right.$$

$$\frac{10c_1^2 k^2 L_n^2 \left(|f|^2 + c_1^2 (1 + L_n)^2 R_1^2 \right)}{\lambda^2} \left| A^{V/2} (u_{m+1} - u_m) \right|^2 +$$

$$k\lambda \left[1 - \frac{7}{10} - \frac{5c_1 L_n n^{-1} R_1}{\lambda} \right] |A u_{m+1}|^2 \leq \frac{10k |f|^2}{\lambda}.$$

当定理条件(9)满足时,有

$$(1 + k\lambda) |A^{V/2} u_{m+1}|^2 - |A^{V/2} u_m|^2 \leq \frac{10k |f|^2}{\lambda}. \quad (13)$$

如果

$$|A^{V/2} v_{m+1}| \leq |A^{V/2} v_m|,$$

则我们很容易会得到(13)式.

由离散 Gronwall 不等式立即可得

$$|A^{V/2} u_{m+1}|^2 \leq (1 + k\lambda)^{-(m+1)} \left[|A^{V/2} a|^2 - \frac{10|f|^2}{\lambda^2} \right] + \frac{10|f|^2}{\lambda^2} \leq$$

$$|A^{V/2} a|^2 + \frac{10|f|^2}{\lambda^2} \leq R_1^2.$$

由数学归纳法可得定理结果. \square

由上面关于全离散 NGM 逼近形式(7)的稳定性条件可以看出,其稳定性只与 nL_n 有关,即要求 knL_n 适当小. 而 SGM 的稳定性条件却是要求 kN^2 适当小. 显然,(7)的稳定性好于 SGM(N/n 越大时尤其如此). 另外,比较定理条件(9)中关于最小解题规模的限制和 M_T 型 NGM 最小解题规模的限制(4)可知,NGM 算法(7)对最小解题规模的限制要明显弱于 M_T 型 NGM.

2 误差估计

为简单起见,设 $2n \leq N$. 此时 $Q_{Nn}B(v_m, v_m) = Q_nB(v_m, v_m)$. 在不至于引起混淆的情况下,我们在下面的讨论中也以 $|u_m|$ 表示 $\max_{0 \leq i \leq m} |u_i|$. 我们用同一个常数 R_1 来表示真解 $u(t)$ 在 \mathbf{R}^+ 的上界,即 $|A^{V/2} u| \leq R_1$.

在讨论算法(7)的误差之前,我们先给出(1)的下面传统 Galerkin 逼近格式的一些性质.

$$\begin{cases} u^{m+1} - u^m + kA u^{m+1} + kP_N B(u^{m+1}, u^{m+1}) = kP_N f, \\ u^0 = P_N a. \end{cases} \quad (14)$$

引理 2.1 如果 $a \in D(A), f \in D(A^{V/2})$, 则(1)的解满足

$$u \in C(\mathbf{R}^+, D(A)), u' \in C(\mathbf{R}^+, H),$$

并且存在常数 $R_2 = R_2(\lambda, |f|, |Aa|) > 0$ 及 $M_0(t) > 0$ 使得

$$|Au^m|, |Au(t)| \leq R_2, |u(mk) - u^m|^2 \leq M_0(t)(k^2 + N^{-4})$$

$$(\forall m \geq 0, t \in \mathbf{R}^+).$$

定理 2.1 假设定理 1.1 和引理 2.1 的条件成立. 则 $\forall m \in \mathbf{N}$,

$$|u(mk) - u_m|^2 \leq M_1(t)k^2 + M_2(t)\lambda^2 n^{-6} + M_0(t)N^{-4}, \quad (15)$$

此处

$$M_1(t) = 4C_1^2 E^m + M_0(t), M_2(t) = (22E^m + 8)c_1^2 R_1^2 R_2^2,$$

$$E = 1 + 7c_1^2 R_1 R_2 k \lambda^{-1},$$

c_1 为正常数,将在定理证明当中给出.

证 我们知道

$$|u(mk) - u_m| \leq |u(mk) - u_m| + |u^m - u_m|.$$

由引理 2.1, 为得到定理结果, 我们只需估计上式右端第二项.

在定理的证明中, 我们将分别对小涡和大涡分量的误差进行估计, 从而充分利用小涡方程的性质, 这也是证明的关键.

首先记

$$v^m = P_n u^m, w^m = Q_n u^m,$$

则

$$\begin{cases} v^{m+1} - v^m + k\lambda v^m + kP_n B(v^{m+1} + w^{m+1}, v^{m+1} + w^{m+1}) = kP_n f, \\ w^{m+1} - w^m + k\lambda w^m + kQ_n B(v^{m+1} + w^{m+1}, v^{m+1} + w^{m+1}) = kQ_n f, \\ V_m = v^m - v_m, W_m = w^m - w_m. \end{cases} \quad (16)$$

则可得

用(16)第二式减去(7)第二式并将差乘 W_{m+1} , 然后在 Ω 上积分, 记

$$\begin{aligned} & |W_{m+1}|^2 - |W_m|^2 + |W_{m+1} - W_m|^2 + 2k\lambda |A^{1/2} W_{m+1}|^2 \leq \\ & 2k |b(w^{m+1}, u^{m+1}, W_{m+1})| + 2k |b(v^{m+1}, w^{m+1}, W_{m+1})| + \\ & 2k |b(V_{m+1}, v^{m+1}, W_{m+1})| + 2k |b(v_{m+1}, V_{m+1}, W_{m+1})|. \end{aligned}$$

现在我们对上式右端四项进行估计.

$$\begin{aligned} 2k |b(w^{m+1}, u^{m+1}, W_{m+1})| & \leq 2c_1 k |w^{m+1}|_{1/2} |A^{1/2} u^{m+1}| |W_{m+1}|_{1/2} \leq \\ & 2c_1 k n^{-2} R_1 R_2 |A^{1/2} W_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{4} |A^{1/2} W_{m+1}|^2 + \frac{4c_1^2 k R_1^2 R_2^2}{\lambda^4}, \\ 2k |b(v^{m+1}, w^{m+1}, W_{m+1})| & \leq 2c_1 k |v^{m+1}|_{L^\infty} |A^{1/2} w^{m+1}| |W_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 k n^{-2} L_n R_1 R_2 |A^{1/2} W_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{4} |A^{1/2} W_{m+1}|^2 + \frac{4c_1^2 k L_n^2 R_1^2 R_2^2}{\lambda^4}, \\ 2k |b(V_{m+1}, v^{m+1}, W_{m+1})| & \leq 2c_1 k |V_{m+1}|_{L^\infty} |A^{1/2} v^{m+1}| |W_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 k L_n R_1 |V_{m+1}| |A^{1/2} W_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{4} |A^{1/2} W_{m+1}|^2 + \frac{4c_1^2 k L_n^2 R_1^2}{\lambda} |V_{m+1}|^2, \\ 2k |b(v_{m+1}, V_{m+1}, W_{m+1})| & \leq 2c_1 k |v^{m+1}|_{L^\infty} |A^{1/2} V_{m+1}| |W_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 k L_n R_1 |V_{m+1}| |A^{1/2} W_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{4} |A^{1/2} W_{m+1}|^2 + \frac{4c_1^2 k L_n^2 R_1^2}{\lambda} |V_{m+1}|^2. \end{aligned}$$

于是, 综合上述估计我们有

$$(1 + \lambda n^2) |W_{m+1}|^2 - |W_m|^2 \leq \frac{8c_1^2 k R_1^2 R_2^2}{\lambda^4} + \frac{8c_1^2 k L_n^2 R_1^2}{\lambda} |V_{m+1}|^2.$$

应用离散 Gronwall 不等式, 则

$$|W_{m+1}|^2 \leq \frac{8c_1^2 R_1^2 R_2^2}{\lambda^2 n^6} + \frac{8c_1^2 L_n^2 R_1^2}{\lambda^2 n^2} |V_{m+1}|^2, \quad (17)$$

这里 $|V_{m+1}| = \sup_{0 \leq l \leq m+1} |V_l|$.

然后, 我们着手对低频分量进行估计. 记

$$\Delta u^{m+1} = u^{m+1} - u^m,$$

由(14)我们可知存在常数 $C_1 = \mathcal{R}_2 + cR_1^{3/2}R_2^{1/2} + |f|$, 使得

$$|\Delta u^{m+1}| \leq C_1 k. \quad (18)$$

用(16)第一式减去(7)第一式,有

$$V_{m+1} - V_m + k\lambda V_{m+1} + kP_n B(\Delta u^{m+1}, u^{m+1}) + kP_n B(u^m, \Delta u^{m+1}) + kP_n B(V_m + W_m, u^m) + kP_n B(u_m, V_m + W_m) = 0.$$

用 V_{m+1} 乘以上式并在 Ω 上积分有

$$\begin{aligned} & |V_{m+1}|^2 - |V_m|^2 + |V_{m+1} - V_m|^2 + 2k\lambda |A^{1/2} V_{m+1}|^2 \leq \\ & 2k |b(\Delta u^{m+1}, u^{m+1}, V_{m+1})| + 2k |b(u^m, \Delta u^{m+1}, V_{m+1})| + \\ & 2k |b(V_m, u^m, V_{m+1})| + 2k |b(u_m, V_m, V_{m+1})| + \\ & 2k |b(W_m, u^m, V_{m+1})| + 2k |b(u_m, W_m, V_{m+1})|. \end{aligned}$$

对于上式右端各项,我们有如下估计

$$\begin{aligned} & 2k |b(\Delta u^{m+1}, u^{m+1}, V_{m+1})| \leq 2c_1 k |\Delta u^{m+1}| |u^{m+1}|_{3/2} |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 C_1 k^2 R_1^{1/2} R_2^{1/2} |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{6} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{6c_1^2 C_1^2 R_1 R_2 k^3}{\lambda}, \\ & 2k |b(u^m, \Delta u^{m+1}, V_{m+1})| \leq 2c_1 k |u^m|_{3/2} |\Delta u^{m+1}| |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 C_1 k^2 R_1^{1/2} R_2^{1/2} |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{6} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{6c_1^2 C_1^2 R_1 R_2 k^3}{\lambda}, \\ & 2k |b(V_m, u^m, V_{m+1})| \leq 2c_1 k |V_m| |A^{1/2} V_{m+1}| |u^m|_{3/2} \leq \\ & 2c_1 k R_1^{1/2} R_2^{1/2} |V_m| |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{6} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{6c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |V_m|^2, \\ & 2k |b(u_m, V_m, V_{m+1})| = 2k |b(u_m, V_{m+1}, V_{m+1} - V_m)| \leq \\ & 2c_1 k L_n R_1 |A^{1/2} V_{m+1}| |V_{m+1} - V_m| \leq \\ & \frac{k\lambda}{6} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{6c_1^2 R_1^2 k L_n^2}{\lambda} |V_{m+1} - V_m|^2, \\ & 2k |b(W_m, u^m, V_{m+1})| \leq 2c_1 k |W_m| |A^{1/2} V_{m+1}| |u^m|_{3/2} \leq \\ & 2c_1 k R_1^{1/2} R_2^{1/2} |W_m| |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \frac{k\lambda}{3} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{3c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |W_m|^2, \\ & 2k |b(u_m, W_m, V_{m+1})| = 2k |b(V_{m+1}, W_m, V_{m+1}) + b(W_m, W_m, V_{m+1}) - \\ & b(V_{m+1} - V_m, W_m, V_{m+1}) - b(u^m, W_m, V_{m+1})| \leq \\ & 2c_1 k n^{-1} L_n |A^{1/2} W_m| |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + 2c_1 k |A^{1/2} W_m| |W_m| |A^{1/2} V_{m+1}| + \\ & 2c_1 k L_n |A^{1/2} W_m| |V_{m+1} - V_m| |A^{1/2} V_{m+1}| + 2c_1 k |u^m|_{3/2} |W_m| |A^{1/2} V_{m+1}| \leq \\ & 2c_1 k n^{-1} L_n R_1 |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{5k\lambda}{6} |A^{1/2} V_{m+1}|^2 + \frac{3c_1^2 R_1^2 k}{\lambda} |W_m|^2 + \\ & \frac{6c_1^2 R_1^2 L_n^2 k}{\lambda} |V_{m+1} - V_m|^2 + \frac{3c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |W_m|^2, \end{aligned}$$

上面估计中多次用到了 Sobolev 插值不等式,为了避免引入更多的常数记号,我们将不等式中的系数作1处理,这并不会引起太大的差别.

在定理条件满足时有 $2c_1 k L_n n^{-1} R_1 \leq 1/6$, 综合上面估计及(17),

$$\begin{aligned} & |V_{m+1}|^2 - |V_m|^2 \leq \frac{12c_1^2 C_1^2 R_1 R_2 k^3}{\lambda} + \frac{6c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |V_m|^2 + \frac{9c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |W_m|^2 \leq \\ & \frac{12c_1^2 C_1^2 R_1 R_2 k^3}{\lambda} + \frac{6c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} |V_m|^2 + \frac{72c_1^4 R_1^3 R_2^3 k}{\lambda^3 n^6} + \frac{72c_1^4 R_1^3 R_2^2 k}{\lambda^3 n^2} |V_m|^2. \end{aligned}$$

在定理条件保证下, 有 $\frac{72c_1^4 R_1^3 R_2 L^2 nk}{\lambda^3 n^2} \leq \frac{c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda}$, 从而

$$|V_{m+1}|^2 \leq \frac{12c_1^2 C_1^2 R_1 R_2 k^3}{\lambda} + \frac{72c_1^4 R_1^3 R_2^3 k}{\lambda^3 n^6} + \left[1 + \frac{7c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} \right] |V_m|^2.$$

利用离散 Gronwall 不等式最终可得

$$|V_m|^2 \leq \left[1 + \frac{7c_1^2 R_1 R_2 k}{\lambda} \right]^m \left[2C_1^2 k^2 + \frac{11c_1^2 R_1^2 R_2^2}{\lambda^2 n^6} \right]. \tag{19}$$

综合 (17) 和 (19) 及引理 2.1, 可得定理结果 (15). □

定理 1.1 和 2.1 的结果显示了改进后的 NGM 算法格式 (7) 保持了 M_T 型 NGM 的良好稳定性和精度. 同时, 由定理 1.1 的条件 (9) 和定理 2.1 的条件我们可以看出它对 n 的要求远弱于条件 (4). 综合定理 1.1 与 2.1, 可以说改进形式 (7) 达到了预期的目的, 不但保持了 M_T 型 NGM 的良好逼近精度, 进一步改善了算法的稳定性, 同时降低了算法可行性对最小求解规模的苛刻限制.

3 数值实验

在本节所给的两个数值实验中, 我们总是在 (7) 中取 $N = 48, n = 24$. 即大涡部分要求解 576 个方程, 小涡部分要求解 1728 个方程. 另外, 与前面一样, 在本节中出现的所有物理量 (如时间 t , 速度 u 等) 均是无量纲的. 在对 (7) 进行数值实现时, 计算工作量主要集中在双线性算子 $P_n B(v_m + w_m, v_m + w_m)$ 和 $(Q_{Nn} B(v_m, v_m))$ 的计算上. 这里, 我们将利用向量值快速 Fourier 变换 (VFFT) 的标准程序对它们进行计算. 另外, 为了避免所谓的 Aliasing Error (参见 [12]), 我们将采用通常的 2/3- 准则来处理上述两项. 当然, 这必然会增加一些不必要的计算量. 还需要说明的是, 在利用 VFFT 对上面两个双线性算子进行计算时, 尽管它们分别只是要求大涡或小涡分量, 但在实际实验中, 参加变换的矩阵均必须是 $3N/2 \times 3N/2$ 阶的, 当然所得结果也是同样阶的矩阵, 我们不得不花费很多 CPU 时间来求一些并不感兴趣的量, 这是由标准 VFFT 程序的通用性带来的. 通过上面的说明, 我们不难发现, (7) 每推进一个时间步所需计算量与同样规模的 SGM 推进两个时间步是一样的 (这是在利用 VFFT 时的情况; 如果是直接计算, 例如在有限元 NGM 中, (7) 每步的工作量当然少于传统方法). 尽管如此, 从数值实验来看, NGM 仍然可以说是一种节省 CPU 时间的算法, 这将在下面的数值结果后说明.

首先, 我们对一个已知精确解的 Navier-Stokes 方程, 分别用本文给出的 NGM 格式 (7) 和 SGM 来模拟, 从而可以比较其解的误差大小及能量的发展.

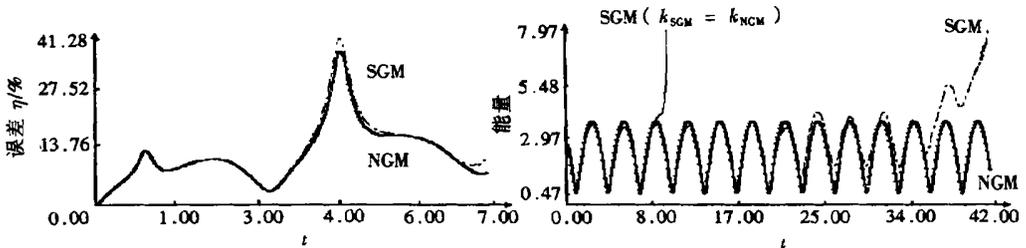


图 5 相对误差演化图

图 6 范数演化图

这里所谓精确解是指, 我们指定一个已知函数

$$u(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2, l \neq 0} \alpha_l \cos(\omega_0 + |l_1| t + |l_2| t) e^{i \cdot x}, \quad (20)$$

为 Navier-Stokes 方程的解, 反过来利用 Navier-Stokes 方程求出相应的外力项 f , 而初值当然是 $a = u(x, 0)$. 然后利用 a 和 f 数值求解 u . 在这个算例中, 我们要求

$$|\alpha_l| \sim |l|^{-5}. \quad (21)$$

在这里, 对 SGM, 取步长为 $k_{SGM} = 0.0001$, 对 NGM 算法(7) 取步长 $k_{NGM} = 0.0005$. 从图 5 可以看出 NGM 算法(7) 的精度与 SGM 相当, 但当时间不断推进时, (7) 显示了更好的逼所性质. 而图 6 显示, 当 $k_{SGM} = k_{NGM}$ 时, 传统方法很快就发散了. 这充分说明了基于 IMD 的 NGM 算法(7) 较 SGM 具有更好的稳定性, 因而更适于用来对解进行长时间的数值模拟.

在下面给出的算例中, 我们给定安装值 a 和外力 f , 然后分别用 NGM 算法(7) 和 SGM 算法对其进行数值模拟, 并给出流体的能量 ($u(x, t)$ 的 L^2 范数) 随时间的演变情况. 在这里, 对初值 a , 同样要求其满足(21). 另外, 我们在 NGM 算法(7) 中, 取时间步长为 $k_{NGM} = 0.0005$, 而在 SGM 算法中, 也分别对时间步长 $k_{SGM} = 0.0001$ 和 $k_{SGM} = k_{NGM} = 0.0005$ 给出了计算结果. 在下面的例子中, 我们统一取粘性系数为 $\lambda = 0.005$.

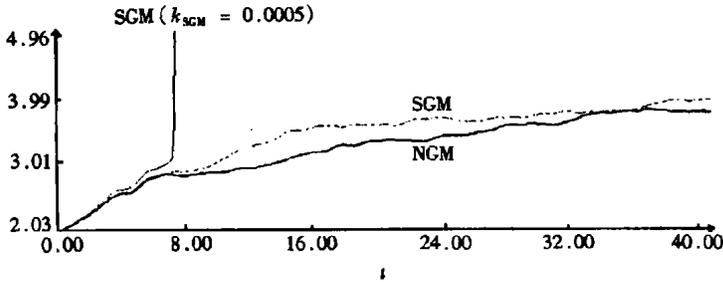


图 7 范数演化图

从上面两个算例来看, 基于 IMD 的 NGM 算法(7) 的稳定性和对真实解的逼所程度明显优于 SGM 算法. 特别值得指出的是(7) 的良好稳定性, 这使得它可以取更大的时间步长. 在这里, $k_{SGM} = 5k_{NGM}$. 综合考虑由于利用 VFFT 给(7) 带来的附加计算量, 在分别利用 NGM 和 SGM 算法对 Navier-Stokes 方程进行同样长时间的数值模拟时, (7) 给出的 NGM 算法所用 CPU 时间应该不及 SGM 的一半. 实际计算的情况也正是这样的. NGM 算法更适合于计算长时间的数值模拟, 因而, 它的应用将有助于人们对 Navier-Stokes 方程解的长期行为的研究.

[参 考 文 献]

- [1] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations[J]. J Diff Eqs, 1998, 73(2): 309—353.
- [2] Foias C, Manley O, Temam R. On the interaction of small eddies in two-dimensional turbulence flows [J]. Math Modeling and Numerical Analysis, 1998, 22: 93—114.
- [3] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, 21(5): 1139—1157.
- [4] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods: the finite elements case[J]. Numer Math, 1990, 57(3): 205—226.
- [5] Marion M, XU Jin_chao. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two-grid finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, 32(4): 1170—1184.

- [6] SHEN Jie, Temam R. Nonlinear Galerkin method using Chebyshev and Legendre polynomials I: the one_dimensional case[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, **32**(1): 215—234.
- [7] LI Kai_tai, HOU Yan_ren. Fourier nonlinear Galerkin method for the Navier_Stokes equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1996, **2**(4): 497—524.
- [8] Dubois T, Jauberteau F, Marion M, et al. Subgrid modelling and the interaction of small and large wavelengths in turbulent flows[J]. Computer Physics Communications, 1991, **65**(1_3): 100—106.
- [9] Debussche A, Temam R, Inertial manifolds with delay[J]. Applied Math Letters, 1995, **8**(1): 21—24.
- [10] 李开泰, 侯延仁. 时滞惯性流形及近似时滞惯性流形族[J]. 数学学报, 2000, **43**(3): 435—444.
- [11] Temam R. Navier_Stokes Equations [M]. 3rd Edition. Amsterdam: North_Holland, 1984.
- [12] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. Spectral Methods in Fluid Dynamics [M]. New York_Heidelberg_Berlin: Springer_Verlag, 1987.

IMD Based Nonlinear Galerkin Method

HOU Yan_ren, LI Kai_tai

(College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract: By taking example of the 2D Navier_Stokes equations, a kind of improved version of the nonlinear galerkin method of Marion_Temam type based on the new concept of the inertial manifold with delay(IMD) is presented, which is focused on overcoming the defect that the feasibility of the M_T type nonlinear Galerkin method heavily depended on the least solving scale. It is shown that the improved version can greatly reduce the feasible conditions as well as preserve the superiority of the former version. Therefore, the version obtained here is an applicable, high performance and stable algorithm.

Key words: nonlinear Galerkin method; inertial manifold with delay; Navier_Stokes equation