文章编号: 1000_0887(2003) 03_0300_05

结构的失效可能度及模糊概率计算方法*

郭书祥[1], 吕震宙[2]

(1. 空军工程大学 工程学院 力学教研室, 西安 710038;
2. 西北工业大学 飞机工程系, 西安 710072)

(吕和祥推荐)

摘要: 依据模糊可能性理论, 系统地建立含模糊变量时结构的可靠性计算模型· 旨在解决模糊结构、模糊_随机结构和模糊状态假设下结构的可靠性计算问题· 所建模型可给出模糊结构失效的可能度和模糊_随机结构失效概率的可能性分布· 研究表明: 对同时含模糊变量和随机变量的混合可靠性计算问题, 把失效概率(或可靠度) 作为模糊变量, 能更客观地反映系统的安全状况· 算例分析说明了文中方法的合理性和有效性·

关 键 词: 结构可靠性; 可能度; 模糊变量; 模糊概率
中图分类号: O213.2;TB114.3 文献标识码: A

引 言

几十年来, 随着现代工业技术的发展, 可靠性逐渐成为科学和工程中一个非常重要的概念· 可靠性问题的提出源于工程中大量不确定性的存在· 按不确定因素的产生机理和物理意义的不同, 一般可分为随机性、模糊性和未确知性[1]· 统计数学和模糊数学是处理不确定性的两种最主要的数学工具· 据此, 逐渐建立和形成了两种主要的可靠性理论– 随机可靠性和模糊可靠性· 在过去的几十年中, 随机可靠性方法在各种工业系统的可靠性评估方面得到了成功的应用· 并成为处理不确定性的最为普遍的方法。经过众多学者的研究, 模糊可靠性理论也取得了长足的进展和大量有益的成果[2~ 8]· 在机械和结构系统的分析和设计中, 由于各种因素的影响, 常不可避免地同时存在随机的和模糊的不确定性· 此时, 须同时考虑随机性和模糊性· 模糊随机结构的可靠性计算, 目前常用的方法是依据著名的模糊事件的概率计算公式· 但对模糊_随机混合可靠性问题, 该公式的计算结果往往不能真实地反映结构的安全状况· 本文系统地研究含模糊变量时结构的可靠性计算问题· 所提出的计算模型可给出结构失效的可能度和模糊失效概率的可能性分布·

1 可靠性计算

在机械和结构的可靠性分析中, 结构的功能函数通常可表示为

$$M = g(R, S) = R - S, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2001_03_18; 修订日期: 2002_12_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59575040, 59775032); 航空基金资助项目(00B53010)
作者简介: 郭书祥(1964—) , 男, 陕西商州人, 教授, 博士·

其中, R、S 分别为结构的广义强度和广义应力• 可为其它基本变量的函数• 当 R、S 均为随机变量时, 可用常规的随机可靠性模型求解• 在此, 仅考虑含模糊变量的情况•

1.1　R、S 均为模糊变量

假设 R、S 为由 L_R 型模糊数所限定的模糊变量, 其可能性分布函数分别为 $\pi_R(r)$ 和 $\pi_S(s)$• 则对任一截集水平 α, R、S 退化为区间变量• 其上、下界分别为

$$\begin{cases} r^l(\alpha) = (\pi_R^l)^{-1}(\alpha), \\ r^u(\alpha) = (\pi_R^r)^{-1}(\alpha) \cdot \end{cases} \qquad \begin{cases} s^l(\alpha) = (\pi_S^l)^{-1}(\alpha), \\ s^u(\alpha) = (\pi_S^r)^{-1}(\alpha) \cdot \end{cases} \tag{2}$$

其中, π_R^l, π_R^r 和 π_S^l, π_S^r 分别为可能性分布函数 $\pi_R(r)$ 和 $\pi_S(s)$ 的左、右分枝• 根据(2)式对(1)式作如下标准化变换

$$\begin{cases} R = r^c(\alpha) + r^r(\alpha)\delta_R, \\ S = s^c(\alpha) + s^r(\alpha)\delta_S, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases} r^c(\alpha) = \dfrac{r^u(\alpha) + r^l(\alpha)}{2}, \\ r^r(\alpha) = \dfrac{r^u(\alpha) - r^l(\alpha)}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} s^c(\alpha) = \dfrac{s^u(\alpha) + s^l(\alpha)}{2}, \\ s^r(\alpha) = \dfrac{s^u(\alpha) - s^l(\alpha)}{2}, \end{cases} \tag{4}$$

这里, $\alpha \in [0, 1]$ 为单位区间变量, δ_R, $\delta_S \in [-1, 1]$ 为标准化区间变量• 从而, 有

$$M = r^r(\alpha)\delta_R - s^r(\alpha)\delta_S + r^c(\alpha) - s^c(\alpha) = 0 \cdot \tag{5}$$

其模糊可靠性指标为[3]

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{r^c(\alpha) - s^c(\alpha)}{r^r(\alpha) + s^r(\alpha)} & (r^c(\alpha) \geqslant s^c(\alpha)), \\ 0 & (\text{否则}) \cdot \end{cases} \tag{6}$$

于是, 结构失效的可能度为

$$\pi_f = \mathrm{Poss}(\eta(\alpha) \leqslant 1) = \mathrm{Poss}(r^l(\alpha) \leqslant s^u(\alpha)) = \mathrm{Sup}\{\alpha \mid r^l(\alpha) \leqslant s^u(\alpha),\ \alpha \in [0, 1]\} \tag{7}$$

若 R、S 的可能性分布为如下正态型

$$\pi_R(r) = \exp\left\{-\frac{(r - \bar{r})^2}{2\sigma_r^2}\right\}, \quad \pi_S(s) = \exp\left\{-\frac{(s - \bar{s})^2}{2\sigma_s^2}\right\}, \tag{8}$$

则结构的模糊可靠性指标为

$$\eta(\alpha) = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{-2\ln\alpha}(\sigma_r + \sigma_s)} \qquad (\alpha \in [0, 1]), \tag{9}$$

结构失效的可能度为

$$\pi_f = \mathrm{Poss}(\eta(\alpha) \leqslant 1) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\bar{r} - \bar{s}}{(\sigma_r + \sigma_s)}\right)^2\right\} & (\bar{r} \geqslant \bar{s}), \\ 1 & (\bar{r} < \bar{s}) \cdot \end{cases} \tag{10}$$

1.2　R 为模糊变量, S 为随机变量

当已知状态变量 M 的概率密度函数 $f_M(m)$ 及 M 对安全状态的隶属函数 $\mu_A(m)$ 时, 可用如下模糊事件的概率计算公式求解•

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(m) f_M(m)\,\mathrm{d}m, \tag{11}$$

此式由模糊理论的创始人、著名的控制论专家 Zadeh 提出• 在模糊事件的概率计算中得到广泛应用• 当(1)式中 R、S 之一为随机变量, 另一个为模糊变量时, 不少学者也直接采用此式计算失效概率• 考虑到模糊性和随机性的本质区别, 本文认为, 在随机载荷作用下, 当强度界限或其允许范围具有模糊性时, 结构的失效概率应是模糊的• 基于此, 本文提出如下解法•

令 $S = s$, 即随机变量 S 取其一确定的样本, 则(1)式可写为

$$M = R - s \cdot \tag{12}$$

此时仅含模糊变量 R, 将 R 表示为如(3)式标准化形式• 由(6)式可得其模糊可靠性指标为

$$\eta(\alpha) = \frac{r^{c}(\alpha) - s}{r^{l}(\alpha)} \cdot \tag{13}$$

考虑到 s 的随机性, 结构失效的概率可表示为

$$P_f(\alpha) = P\left\{\eta(\alpha) \leqslant 1\right\} = P\left\{S \geqslant r^{c}(\alpha) - r^{r}(\alpha)\right\} = P\left\{S \geqslant r^{l}(\alpha)\right\} \cdot \tag{14}$$

对不同的 α, 可得相应的失效概率• 从而即得模糊失效概率的可能性分布• 如: 当 S 为正态随机变量, R 的可能性分布为如(8)式所示正态型时, 可得

$$P_f(\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{r^{l}(\alpha) - s}{\sigma_s}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{r - s - \sqrt{-2\ln\alpha}\,\sigma_r}{\sigma_s}\right), \tag{15}$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态概率分布函数•

1.3 R 为随机变量、S 为模糊变量

类似于前述推导过程, 在 $R = r$ 时, 模糊可靠性指标可表为

$$\eta(\alpha) = \frac{r - S^{c}(\alpha)}{S^{r}(\alpha)} \cdot \tag{16}$$

考虑到 r 的随机性, 结构的失效概率可表示为

$$P_f(\alpha) = P\left\{\eta(\alpha) \leqslant 1\right\} = P\left\{R \leqslant S^{u}(\alpha)\right\} \cdot \tag{17}$$

根据模糊失效概率的可能性分布, 可得结构失效概率大于某给定值的可能度为

$$\mathrm{Poss}(P_f(\alpha) \geqslant P_{f0}) = \sup\left\{\alpha \mid P_f(\alpha) \geqslant P_{f0},\ \alpha \in [0, 1]\right\} \cdot \tag{18}$$

这里导出的公式(7)、(14)、(17)等只用到强度可能性分布的左分枝和/或应力可能性分布的右分枝• 虽然模糊性强度或应力本身可采用 L_R 型可能性分布函数形式, 但考虑到 R、S 的关系, 广义强度和广义应力的允许范围用分段函数描述[4,7]更恰当• 因此, 这里的结果是合理的•

1.4 失效准则具有模糊性

很多情况下, 结构的功能状态或失效准则也具有模糊性• 如机构的磨损、结构的疲劳、腐蚀等失效形式, 其可靠与失效之间没有明确界限, 结构从完好到失效有一渐变的模糊过程阶段• 文[4]曾定义了模糊安全状态的三种不同形式• 当以广义应力的模糊允许区间或广义模糊强度表示模糊安全状态时, 实际上可归为前述类型• 当用状态变量 M 表示时, 模糊安全状态的隶属函数一般可表示为如下形式

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0 & (m < c_1), \\ f(m) & (c_1 \leqslant m \leqslant c_2), \\ 1 & (m > c_2) \cdot \end{cases} \tag{19}$$

其中, c_1, c_2 为常数, $f(m)$ 为 m 的单调递增函数• 为便于应用前述方法, 现引入一辅助模糊变量 Z• 其可能性分布函数为 $\pi_Z(z) = \mu_A(z) = f(z)\ (c_1 \leqslant z \leqslant c_2)$• 将功能函数(1)改写为

$$M_d = R - S - Z \cdot \tag{20}$$

则当 $M_d > 0$ 时结构可靠, $M_d < 0$ 时结构失效• 经过此模糊修正, 可把模糊状态可靠性问题完全转化为前述类型可靠性问题来求解• 如: 当 R、S 均为随机变量时, 类似于(17)式, 结构的失效概率为

$$P_f(\alpha) = P\left\{R - S \leqslant z(\alpha)\right\}, \tag{21}$$

其中 $z(\alpha) = \pi_z^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\alpha) \quad (c_1 \leqslant z \leqslant c_2,\ \alpha \in [0, 1])$•

2　算 例 分 析

为便于比较, 这里采用有关文献上的两个算例•

例 1　某水轮机转轮叶片的疲劳强度为模糊变量, 应力服从威布尔分布, 其隶属函数及概率密度函数分别为[5]

$$\mu_R(r) = \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{(R-185)^2}{489}\right\} & (r < 185), \\ 1 & (r \geqslant 185), \end{cases}$$

$$f_S(s) = \frac{a}{b}\left(\frac{(s-c)}{b}\right)^{(a-1)} \exp\left\{-\left(\frac{(s-c)}{b}\right)^a\right\},$$

其中, $a = 2.612\,7$, $b = 106.166\,2$, $c = -1.395$•

用本文方法求得的结构可靠度的可能性分布情况如下

$\alpha = 1$, $P_r = 0.987\,116$; $\alpha = 0.8$, $P_r = 0.976\,319$;

$\alpha = 0.6$, $P_r = 0.968\,333$; $\alpha = 0.2$, $P_r = 0.941\,676$•

而根据模糊事件的概率计算公式求得的可靠度为[5] $P_r = 0.961\,2$• 由失效概率的可能性分布情况及(18)式可得结构实际失效概率大于此值的可能度为 $\mathrm{Poss}(P_f \geqslant 0.961\,2) = 0.453\,97$•

例 2　已知某结构的强度及作用载荷的最大应力均服从正态分布, $R \sim N(623, 23^2)\,\mathrm{MPa}$, $S \sim N(364.6, 52.4^2)\,\mathrm{MPa}$• 结构模糊安全状态的隶属函数取为[4]

$$\mu_A(m) = \begin{cases} 0 & (m < -40), \\ (m+40)/80 & (-40 \leqslant m \leqslant 40), \\ 1 & (m > 40)• \end{cases}$$

根据(21)式, 用文中方法可求得结构可靠度的可能性分布情况如下

$P_r = 0.9_4 3322$, $(\alpha = 1)$; $P_r = 0.9_4 7915$, $(\alpha = 0.8)$; $P_r = 0.9_5 3997$, $(\alpha = 0.6)$;

$P_r = 0.9_5 8398$, $(\alpha = 0.4)$; $P_r = 0.9_6 6032$, $(\alpha = 0.2)$; $P_r = 0.9_7 1607$, $(\alpha = 0.0)$•

而根据常用的模糊事件的概率计算公式求得的可靠度为[4] $P_r = 0.9_3 28$• 远低于文中方法的有关结果• 事实上, 根据所给模糊状态的隶属函数, 虽然其安全隶属情况具有模糊性, 但只要功能函数 $M = R - S$ 不小于 40MPa, 则结构是可靠的• 根据 R、S 的随机分布, 不难得出 $M > 40$ 的概率为 $P_r = 0.9_4 3322$• 即该结构的可靠度应不低于 $0.9_4 3322$• 因此, 按模糊事件的概率计算公式求得的结果没有真实地反映结构的安全状况•

3　结 束 语

模糊性和随机性是不同的两类不确定性• 其产生机理和物理意义均有一定差异• 模糊性的根源在于客观事物之间的界限或差异是不明确的• 存在着中介过渡或亦此亦彼的现象• 因而人们不可能给这些事物以明确的定义和评定标准• 文中系统地建立了含模糊变量时结构的可靠性计算模型• 研究表明: 当结构中同时含模糊变量和随机变量时, 直接利用模糊事件的概

率计算公式求得的结果可能出现较大偏差。往往不能真实地反映结构的安全状态• 因此,对同时含模糊变量和随机变量的混合可靠性问题,宜将失效概率作为模糊量,以客观地反映结构的安全状况•

[参 考 文 献]

[1] 王光远, 陈树勋. 工程结构系统软设计理论及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.

[2] 吕震宙, 岳珠峰, 冯元生. 磨损的随机模糊失效概率计算方法[J]. 机械科学和技术, 1997, **16**(6): 1018—1023.

[3] 郭书祥, 吕震宙. 基于可能性理论的结构模糊可靠性方法[J]. 计算力学学报, 2002, **19**(1): 1018—1025.

[4] 黄洪钟. 基于模糊失效准则的机械结构广义静强度的模糊可靠性计算理论[J]. 机械强度, 2000, **22**(1): 36—40.

[5] 韩恩厚, 崔广椿. 疲劳强度的模糊可靠性设计方法[J]. 航空学报, 1994, **15**(1): 89—93.

[6] Furuta H. Fuzzy logic and its contribution to reliability analysis[A]. In: Rackwitz R, Augusti G, et al Eds. Reliability Optimization of Structural Systems[C]. Chapman & Hall, 1995: 61—76.

[7] Sawyer J P, Rao S S. Strength- based reliability and failure assessment of fuzzy mechanical and structural systems[J]. AIAA Journal, 1999, **37**(1): 84—92.

[8] Cremona C, Gao Y. The possibilistic reliability theory: theoretical aspects and applications[J]. Structural Safety, 1997, **19**(2): 173—201.

Procedure for Computing the Possibility and Fuzzy Probability of Failure of Structures

GUO Shu_xiang[1], LÜ Zhen_zhou[2]

(1. Faculty of Mechanics, Engineering Institute, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038, P.R. China;

2. Department of Aircraft Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)

Abstract: Traditionally, the calculation of reliability of fuzzy random structures is based on the well_known formulation of probability of fuzzy events. But sometimes the results of this formulation will not indicating the real state of safety of fuzzy_random structures. Based on the possibility theory, a computational procedure for the reliability analysis of fuzzy failure problems and random_fuzzy failure problems of mechanical structures that contain fuzzy variables were presented. A procedure for the analysis of structural reliability of problems of fuzzy failure criterion was also proposed. The failure possibility of fuzzy structures and possibility distribution of the probability of failure of fuzzy_random structures can be given by the proposed methods. It is shown that for the hybrid probabilistic and fuzzy reliability problems, the probability of failure should be suitably taken as a fuzzy variable in order to indicate the real safety of system objectively. Two examples illustrate the validity and rationality of the proposed methods.

Key words: structural reliability; possibility; fuzzy variable; fuzzy probability