文章编号: 1000_0887(2002) 12_1220_07

具有周期输入 Hopfield 型神经网络的全局渐近性质*

向 兰[1], 周 进[1,2], 刘曾荣[2], 孙 姝[3]

(1, 河北工业大学 物理系, 天津 300130; 2, 上海大学 数学系, 上海 200436;
3, 海军潜艇学院 数学研究室, 青岛 266071)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 在不假定非线性激励函数有界和可微的条件下, 应用 Mawhin 的重合度理论及 Liapunov 函数法给出一类具有周期输入的 Hopfield 型神经网络存在周期解及其全局指数稳定的充分条件•

关 键 词: Hopfield 网络; 周期解; 全局指数稳定; 重合度; Liapunov 函数
中图分类号: O175; TN911 文献标识码: A

引 言

由于人工神经网络技术在组合优化、联想记忆、模式识别、信号处理、自动控制等工程技术领域方面的独特优越性, 近 30 年来, 围绕人工神经网络的结构和特性的研究越来越受到重视, 其中连续的 Hopfield 网络是非常重要的网络, 它的动力学性质已被广泛研究并获得一些重要的结果[1~8]• 连续的 Hopfield 神经网络可用如下的非线性微分方程描述[1,2]:

$$c_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i}{\boldsymbol{R}_i} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{T}_{ij} g_j(u_j) + \boldsymbol{I}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

这里 $c_i > 0$、$\boldsymbol{R}_i > 0$ 和 $\boldsymbol{I}_i$ 分别称为第 i 个神经元的电容常数、电阻常数及网络的外部输入, g_i 为连续的非线性激励函数$(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}_{ij})_{n\times n}$ 为模拟神经元间互连的突触特性的关联矩阵• 众所周知, 由于这个网络是一个复杂的大型非线性动力系统, 这种模型的吸引子的个数、位置及吸引域的大小一般很难确定, 因而许多作者在研究其动力学性质时都对上述网络作一些简化, 尤其对非线性激励函数及关联矩阵分别施加一些特殊条件[3~8], 如要求 g_i 有界或可微, 要求 $\boldsymbol{T}$ 对称、对角稳定、行列占优等性质, 而且一般都假设外加偏置电流 $\boldsymbol{I}_i$ 与 t 无关• 然而, 在一些实际应用中, 这些假定一般并不符合生物学的事实, 同时又增大在网络设计中的因难[5~6]• 一般说来, 从实际情况看, 自然应该考虑到生态系统的演化过程和外部影响的干扰, 尤其象周期变化的环境, 有规则的外部输入控制等• 因此, 本文研究具有周期输入的Hopfield 神经网络[6]:

* 收稿日期: 2001_07_24; 修订日期: 2002_04_30
作者简介: 向兰(1964—) , 女, 重庆人, 副教授, 硕士, 从事凝聚态物理及非线性力学研究
(E_mail: xianglan. htu@www. eyou. com).

$$c_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i}{\boldsymbol{R}_i} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{T}_{ij} g_j(u_j) + \boldsymbol{I}_i(t) \qquad (i = 1, 2 \cdots, n), \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{I}_i$ 是关于 t 的 ω 周期函数即 $\boldsymbol{I}_i(t+\omega) = \boldsymbol{I}_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$•

本文的目的是在不假定非线性激励函数有界可微的情况下, 利用 Mawhin 的重合度理论及 Liapunov 函数方法[9~10], 给出方程(2)存在周期解及其指数稳定的充分条件• 我们发现由非线性激励函数及关联矩阵所确定的M_矩阵对于方程(2)的动力学性质, 如同研究Hopfield 神经网络平衡点的稳定性一样, 仍然具有相当重要的作用[5]• 这些结果是文献[5~8]所获结果的自然扩展及推广• 虽然[7~8]考虑较(1)、(2)更一般的时滞方程, 但当[7~8]中所考虑的时滞方程相应化为(1)、(2)时, 所获结果是本文结果的特例•

1 主要结果

本文假设每一个关联函数 $g_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 具有如下性质:

(i) g_i 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$•

(ii) 存在 $\boldsymbol{M}_i > 0$ 及 $d_i \geqslant 0$ 使对一切 $u_i \in \mathbf{R}$ 有

$$| g_i(u_i) - \boldsymbol{M}_i u_i | \leqslant d_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)•$$

现定义矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\boldsymbol{R}_j \boldsymbol{M}_j} - \boldsymbol{T}_{ij} & i = j, \\ -|\boldsymbol{T}_{ij}| & i \neq j• \end{cases}$$

下面的定理是本文的第一个主要结果•

定理 1 如果 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异的M_矩阵且(i)、(ii)成立, 则方程(2)至少存在一个 ω 周期解•

进一步, 假设 $g_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 具有如下性质:

(iii) $g_i(\cdot)$ 是全局Lipschitz 连续的, 其 Lipschitz 常数为 $\boldsymbol{M}_i > 0$, 即对一切 $u_i, v_i \in \mathbf{R}$, 有

$$| g_i(u_i) - g_i(v_i) | \leqslant \boldsymbol{M}_i | u_i - v_i | \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)•$$

(vi) $[g_i(u_i) - g_i(v_i)]\operatorname{sgn}(u_i - v_i) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$•

现给出第二个结果如下:

定理 2 如果 $\boldsymbol{A}$ 为一个非奇异的M_矩阵且(ii)、(iii)及(vi)成立, 则方程(2)存在唯一的 ω 周期解且是全局指数稳定的• 特别地, 如果 $\boldsymbol{I}_i(t) = \mathrm{const}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则(2)存在唯一全局指数稳定的平衡点•

注 1 容易看出一个全局 Lipschitz 连续函数可以是不可微的和无界的•

注 2 从非奇异的M_矩阵的性质[5], 易知本文的定理1、定理2是文[5, 6]相应结果的自然扩展与推广• 这里并未假定关联函数的有界性或可微性, 而且进一步得到了方程(1)平衡点的全局指数稳定性(见文[5]中的定理2及推论3, 文[6]中的定理)•

注 3 当文[7, 8]中所考虑的模型退化为方程(1)或(2)时, 文[8]的主要结果定理1和定理2是本文定理2的特例, 并且这里去掉了假设激励函数为有界的限制条件• 而且, 本文定理1、定理2的条件比文献[7]中的定理1、定理2所给出的条件更一般, 尤其对某些 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 允许 $1/\boldsymbol{R}_j \boldsymbol{M}_j < |\boldsymbol{T}_{jj}|$ 的情形出现•

2　主要结果的证明

为了方便起见，令

$$\boldsymbol{u} = \left(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{I}(t) = \left(I_1(t), I_2(t), \cdots, I_n(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right),$$

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\boldsymbol{R}_1}, \frac{1}{\boldsymbol{R}_2}, \cdots, \frac{1}{\boldsymbol{R}_n}\right),$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \left(g_1(u_1(t)), g_2(u_2(t)), \cdots, g_n(u_n(t))\right)^{\mathrm{T}},$$

则(2)可改写为

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{I}(t). \tag{3}$$

为证明定理1，作如下准备：

考虑 Banach 空间 X 中的算子方程

$$\mathrm{L}x = \lambda \mathrm{N}x \qquad \lambda \in (0, 1), \tag{4}$$

这里 $\mathrm{L}: \mathrm{Dom\,L} \cap X \to X$ 是线性算子，$\lambda \in [0, 1]$ 为参数，令 P、Q 为两个投影算子

$$\mathrm{P}: \mathrm{Dom\,L} \cap X \to \mathrm{Ker\,L}, \mathrm{Q}: X \to X / \mathrm{Im\,L},$$

则有如下引理[9]：

引理　假设 X 为 Banach 空间，L 是指标为零的 Fredholm 算子，$\mathrm{N}: \Omega \to X$ 在 Ω 上 L 紧，其中 Ω 为 X 中的有界开集，进一步假设：

(a) $\mathrm{L}\boldsymbol{u} \neq \lambda \mathrm{N}\boldsymbol{u}$，$\forall \lambda \in (0, 1)$，$\forall \partial\Omega \cap \mathrm{Dom\,L}$，

(b) $\mathrm{QN}\boldsymbol{u} \neq 0$，$\forall \boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker\,L}$，

(c) $\deg\{\mathrm{QN}\boldsymbol{u}, \Omega \cap \mathrm{Ker\,L}, 0\} \neq 0$，

则 $\mathrm{L}x = \mathrm{N}x$ 在 Ω 中至少有一解．

设　$X = \left\{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), \boldsymbol{u}(t + \omega) = \boldsymbol{u}(t)\right\}$，

定义　$\|\boldsymbol{u}\| = \max\limits_{t \in [0, \omega]} |\boldsymbol{u}(t)|$，

则 X 在这个模及通常内积下为 Banach 空间，令

$$\mathrm{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}, \ \mathrm{N}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{I}(t),$$

投影算子 P、Q 分别取为

$$\mathrm{P}\boldsymbol{u} = \mathrm{Q}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{u}(t) \in X,$$

易证，L 是指标为零的 Fredholm 算子，N 在 Ω 上 L_紧，其中 Ω 为 X 中的有界开集，对应于算子方程(4)，有

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} = \lambda(-\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{I}(t)) \qquad \lambda \in [0, 1]. \tag{5}$$

当 $\lambda = 1$ 时，上式即为要研究的方程(2)．

定理1的证明　设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是(5)的任一 ω 周期解，相应于(5)有

$$c_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \lambda\left(-\frac{u_i}{\boldsymbol{R}_i} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{T}_{ij} g_j(u_j) + \boldsymbol{I}_i(t)\right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

对上式两边同乘 u_i 再从 0 到 ω 对变量 t 积分得

$$0=c_i\int_0^\omega u_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\int_0^\omega u_ig_j(u_j)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{R_i}\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t+\int_0^\omega u_iI_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)\text{.}$$

于是由(ii)及Hölder不等式有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_i}-T_{ii}M_i\right)\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t={}&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}T_{ij}\int_0^\omega u_ig_j(u_j)\,\mathrm{d}t+\\ &T_{ii}\int_0^\omega u_i(g_i(u_i)-M_iu_i)\,\mathrm{d}t+\int_0^\omega u_iI_i(t)\,dt\leqslant\\ &\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|T_{ij}|\int_0^\omega|u_i|(M_j|u_j|+d_j)\,\mathrm{d}t+\\ &|T_{ii}|d_i\int_0^\omega|u_i|\,\mathrm{d}t+\int_0^\omega|u_iI_i(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\\ &\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|T_{ij}|M_j\left(\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\left(\int_0^\omega u_j^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}+\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|d_j\sqrt{\omega}\times\\ &\left(\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}+\left(\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\left(\int_0^\omega I_i^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\quad(i=1,2,\cdots,n)\text{.}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{R_i}-T_{ii}M_i\right)\left(\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|T_{ij}|M_j\left(\int_0^\omega u_j^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\leqslant\\ &\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|d_j\sqrt{\omega}+\left(\int_0^\omega I_i^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}=h_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)\text{.}\end{aligned}\tag{6}$$

记 $H=\left(h_1,h_2,\cdots,h_n\right)^{\mathrm{T}}$, $M=\mathrm{ding}\left(M_1,M_2,\cdots,M_n\right)$, 由非奇异M_矩阵的定义[5]知, 当 A 为一非奇异M_矩阵可知 AM 也为非奇异M_矩阵, 这样矩阵 $(AM)^{-1}$ 的任一元素非负, 即 $(AM)^{-1}\geqslant 0$, 于是

$$\left(\left(\int_0^\omega u_1^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12},\left(\int_0^\omega u_2^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12},\cdots,\left(\int_0^\omega u_n^2\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\right)^{\mathrm{T}}\leqslant(AM)^{-1}H\text{.}$$

这表明

$$\int_0^\omega|u(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\omega u_i^2\mathrm{d}t\leqslant|(AM)^{-1}H|^2=K_1,\tag{7}$$

从而存在 $t_0\in[0,\omega]$, 使得 $|u(t_0)|\leqslant\sqrt{K_1/\omega}$. 由(5)和(7)得到

$$\begin{aligned}\int_0^\omega|u'|\,\mathrm{d}t\leqslant{}&\frac{1}{\|C\|}\left[\int_0^\omega\|R\|\,|u|\,\mathrm{d}t+\right.\\ &\left.\int_0^\omega\|T\|\,|g(u)|\,\mathrm{d}t+\int_0^\omega|I(t)|\,\mathrm{d}t\right]\leqslant\\ &\frac{1}{\|C\|}\left[\|R\|\int_0^\omega|u|\,\mathrm{d}t+\|T\|(\max_{1\leqslant i\leqslant n}M_i)\int_0^\omega|u|\,\mathrm{d}t+\right.\\ &\left.\|T\|(\max_{1\leqslant i\leqslant n}d_i)\,\omega+\int_0^\omega|I(t)\mathrm{d}t|\right]\leqslant\\ &\frac{1}{\|C\|}\left[(\|R\|+\|T\|(\max_{1\leqslant i\leqslant n}M_i))\sqrt{\omega K_1}+\right.\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{T}\|\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i\right)\omega+\int_0^{\omega}|\boldsymbol{I}(t)|\,\mathrm{d}t\Big]=K_2,$$

这样由

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{\boldsymbol{u}}(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,\omega]$$

知

$$|\boldsymbol{u}(t)|\leqslant|\boldsymbol{u}(t_0)|+\int_0^{\omega}|\dot{\boldsymbol{u}}|\,\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{K_1/\omega}+K_2=K_3. \tag{8}$$

取　　$K_0=\max\left\{K_3,\ |\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}|\right\}$,

这里　　$\boldsymbol{E}=\left(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{E}_i=\max\limits_{[0,\omega]}|\boldsymbol{I}_i(t)|+\sum\limits_{j=1}^{n}|\boldsymbol{T}_{ij}|\,\mathrm{d}_j,\ (i=1,2,\cdots,n)$,

令 $\Omega=\left\{\boldsymbol{u}(t)\in X\,|\,\|\boldsymbol{u}\|<K_0\right\}$, 则当 $\forall\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker\,L}$ 时, 显然有 $\mathrm{L}\boldsymbol{u}\neq\lambda\mathrm{N}\boldsymbol{u}$, $\lambda\in(0,1)$, 引理条件(a) 成立. 又对 $\forall\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker\,L}=\partial\Omega\cap\mathbf{R}^n$, 则 $\boldsymbol{u}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的常向量, 即 $|\boldsymbol{u}|=K_0$, 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\mathrm{QN}\boldsymbol{u})=&\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left(-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}(t)\right)\mathrm{d}t\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\left(\boldsymbol{T}_{ii}\boldsymbol{M}_i-\frac{1}{\boldsymbol{R}_i}\right)|u_i|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|\boldsymbol{T}_{ij}|\boldsymbol{M}_j|u_j|+\\&\sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{T}_{ij}|d_j+\max_{[0,\omega]}|\boldsymbol{I}_i(t)|\Bigg]|u_i|=\\&\sum_{i=1}^{n}\Bigg[-a_{ii}\boldsymbol{M}_i|u_i|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}\boldsymbol{M}_j|u_j|+\boldsymbol{E}_i\Bigg]|u_i|<0,\end{aligned}$$

故当 $\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker\,L}$ 时, $\mathrm{QN}\boldsymbol{u}\neq0$, 引理条件(b) 成立, 又令

$$F(\mu,\boldsymbol{u})=-\mu\boldsymbol{u}+(1-\mu)\mathrm{QN}\boldsymbol{u}\qquad\mu\in[0,1],$$

则当 $\boldsymbol{u}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker\,L}$ 时, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}F(\mu,\boldsymbol{u})<0$, 因此

$$\deg\left\{\mathrm{QN}\boldsymbol{u},\ \Omega\cap\mathrm{Ker\,L},0\right\}=\deg\left\{-\boldsymbol{u},\ \Omega\cap\mathrm{Ker\,L},0\right\}\neq0,$$

引理条件(c) 成立, 由引理知 $\mathrm{L}\boldsymbol{u}=\mathrm{N}\boldsymbol{u}$ 在 X 中至少有一个解, 也就是说方程(2) 至少有一个 ω_周期解, 定理1的结论成立.

定理2的证明　显然方程(2) 周期解的存在性可由定理1立即可得. 假设

$$\boldsymbol{u}(t)=\left(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

是方程(2) 的一个 ω 周期解, 并设

$$\boldsymbol{v}(t)=\left(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

是(2) 的任一解, 由(2) 推知

$$\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t)\right)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{u}(t)\right)+\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})\right). \tag{9}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为一非奇异M_矩阵, 由非奇异M_矩阵的性质[5], 存在数 $p_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 使

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}p_i|\boldsymbol{T}_{ij}|+p_j\left(\boldsymbol{T}_{jj}-\frac{1}{\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{M}_j}\right)<0\qquad(j=1,2,\cdots,n).$$

这样可选取 $\varepsilon>0$, 使

$$c_j\varepsilon-\frac{1}{\boldsymbol{R}_j}<0,\ p_j\left[\boldsymbol{T}_{jj}+\frac{1}{\boldsymbol{M}_j}\left(c_j\varepsilon-\frac{1}{\boldsymbol{R}_j}\right)\right]+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}p_i|\boldsymbol{T}_{ij}|<0$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n) \cdot$$

构造 Liapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i c_i \mid v_i(t) - u_i(t) \mid e^{\varepsilon t},$$

沿(9) 的解计算 V 的右上导数 $D^+ V$, 得到

$$\begin{aligned} D^+ V(t) \mid_{(9)} = & \sum_{i=1}^{n} p_i c_i [\varepsilon e^{\varepsilon t} \mid v_i(t) - u_i(t) \mid + e^{\varepsilon t} D^+ \mid v_i(t) - u_i(t) \mid] \leqslant \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i \Big[\Big(c_i \varepsilon - \frac{1}{\boldsymbol{R}_i} \Big) \mid v_i(t) - u_i(t) \mid e^{\varepsilon t} + \\ & e^{\varepsilon t} \boldsymbol{T}_{ii} \mid g_i(v_i(t)) - g_i(u_i(t)) \mid + \\ & e^{\varepsilon t} \sum_{\substack{j=1 \\ J \neq i}}^{n} \mid \boldsymbol{T}_{ij} \mid \mid g_j(v_i(t)) - g_j(u_i(t)) \mid \Big] \leqslant \\ & e^{\varepsilon t} \sum_{j=1}^{n} \Bigg[p_j \Bigg(\boldsymbol{T}_{jj} + \frac{1}{\boldsymbol{M}_j} \Bigg(c_j \varepsilon - \frac{1}{\boldsymbol{R}_j} \Bigg) \Bigg) + \\ & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \mid \boldsymbol{T}_{ij} \mid \Bigg] \mid g_j(v_i(t)) - g_j(u_i(t)) \mid < 0 \cdot \end{aligned}$$

从而当 $t \geqslant 0$ 时, $V(t) \leqslant V(0)$, 令 $K = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ p_i c_i \} / \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ p_i c_i \}$, 得到

$$\sum_{i=1}^{n} \mid v_i(t) - u_i(t) \mid \leqslant K e^{-\varepsilon t} \sum_{i=1}^{n} \mid v_i(0) - u_i(0) \mid \cdot$$

显然, 对任意 $t \geqslant 0$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ 恰是方程(2) 的一个 ω 周期解, 且当 $t \to \infty$ 时, 方程(2) 其他的解全局指数收敛于它, 所以证明了方程(2) 存在的唯一的 ω 周期解且这个解是全局指数稳定的· 定理 2 证毕·

[参　考　文　献]

[1] Hopfield J J· Neural networks and physical system with emergent collective computational abilities [J]· Proc Nat Academy Sci, 1982, **79**(4): 2554—2558·

[2] Hopfield J J· Neurons with graded response have collective computational properties like those of two_state neurons[J]· Proc Nat Academy Sci, 1984, **81**(5): 3088—3092·

[3] 廖晓昕· Hopfield 型神经网络的稳定性[J]· 中国科学, 1993, **23**(10): 1025—1035·

[4] 梁学斌, 吴立德· Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性[J]· 中国科学, 1995, **25**(5): 523—532·

[5] Guan Z H, Chen G· On the equilibria, stability and instability of Hopfield neural networks[J]· IEEE Trans Neural Networks, 2000, **11**(2): 534—539·

[6] 李铁成, 王铎· 一类带有周期输入的人工神经网络的渐近性质[J]. 高校应用数学学报, A 辑, 1997, **12**(1): 25—28·

[7] 黄先开· 具有时滞的 Hopfield 型神经网络的平稳周期振荡[J]· 应用数学和力学, 1999, **20**(10): 1040—1045·

[8] Gao J· Periodic oscillation and exponential stability of delayed CNN[J]· Physic Letter A, 2000, **270** (3/4): 157—163·

[9] Gain R E, Mawhin J L· Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]· Lecture Note in Math, **567**, Berlin: Springer_Verlag, 1977, 40—41·

[10] Yoshizawa T· Stability Theory by Liapunov's Second Method[M]· Tokyo: The Math Soc of

Japan, 1996, 165—169.

On the Asymptotic Behavior of Hopfield Neural Network With Periodic Inputs

XIANG Lan[1], ZHOU Jin[1,2], LIU Zeng_rong[2], SUN Shu[3]

(1. Department of Physics, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, P R China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shang_hai 200436, P R China;

3. Naval Submarine Academy, Qingdao 266071, P R China)

Abstract: Without assuming the boundedness and differentiability of the nonlinear activation functions, the new sufficient conditions of the existence and the global exponential stability of periodic solutions for Hopfield neural network with periodic inputs are given by using Mawhin's coincidence degree theory and Liapunov's function method.

Key words: Hopfield neural network; periodic solution; global exponential stability; coincidence degree; Liapunov function