文章编号: 1000_0887(2002)12_1269_07

中立型泛函微分方程周期解问题*

鲁世平[1,2],　葛渭高[1]

(1. 北京理工大学 应用数学系, 北京 100081; 2. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241000)

(林宗池推荐)

摘要: 利用 Fourier 级数理论研究了一类 k_阶线性中立型泛函微分方程周期解问题, 给出了周期解存在唯一性的充要条件• 利用此结果并结合 Schauder 不动点原理, 进一步研究了一类 k_阶非线性中立型泛函微分方程, 得到了存在周期解的新的结果• 这些结果改进和推广了近期文献中的已有结论•

关 键 词: 中立型泛函微分方程; 不动点原理; 周期解
中图分类号: O175.1　　文献标识码: A

引　言

令 $C_{2\pi}^{(k-1)} = \left\{h(t) \mid h: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ 为 } k-1 \text{ 阶连续可微且 } h(t+2\pi) \equiv h(t)\right\}$,

$$\| h(t) \| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} | h(t) |,$$

$$\| h(t) \|_{P_{k-1}} = \max\left\{ \| h(t) \|, \| h'(t) \|, \dots, \| h^{(k-1)}(t) \|\right\},$$

$$C_{2\pi} = \left\{ h(t) \mid h: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ 为连续且 } h(t+2\pi) \equiv h(t)\right\},$$

$$x^{(m)}(t+\cdot)(\theta) = x^{(m)}(t+\theta) \qquad \theta \in \mathbf{R}\ (m = 0, 1, 2, \dots, k-1),$$

显然, 对 $\forall x \in C_{2\pi}^{(k-1)}$, $x^{(m)}(t+\cdot) \in C_{2\pi} (m = 0, 1, 2, \dots, k-1)$•

本文研究 k 阶 NFDE:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(x(t) + b_0 x(t-h_0)) + \sum_{j=1}^{k} a_j x^{(k-j)}(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x^{(k-j)}(t-h_j) = f(t, x(t+\cdot), x'(t+\cdot), \dots, x^{(k-1)}(t+\cdot)) \tag{1}$$

的周期解问题, 其中 $a_j, b_j, h_j (j = 1, 2, \dots, k)$ 为实数, $f(t, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1})$ 是集合 $\Omega = \mathbf{R} \times (C_{2\pi})^k = \mathbf{R} \times C_{2\pi} \times C_{2\pi} \times \dots \times C_{2\pi}$ 上的连续函数, 且对 $\forall \varphi_j \in C_{2\pi}$, $f(t+2\pi, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) \equiv f(t, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1})$•

关于泛函微分方程(特别是中立型泛函微分方程)周期解问题已有很多研究, 参见文[1~8]• 文[1~5]均研究了 n_维泛函微分方程周期解问题, 文[7]研究了一类常系数高阶中立型线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(x(t) + b_0 x(t-h_0)) + \sum_{j=1}^{k} a_j x^{(k-j)}(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x^{(k-j)}(t-h_j) = f(t) \tag{2}$$

* 收稿日期: 2000_09_25; 修订日期: 2002_06_11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871005); 高校博士点专项基金项目(1999000722)
作者简介: 鲁世平(1962—), 男, 安徽无为人, 副教授, 博士(E_mail: lushiping 26@Sohu.com).

的周期解问题,在条件 $|b_0| < 1/2$ 下给出了方程(2)的 2π_周期解的存在唯一的充要条件,文[8]在条件 $|b_0| < 1$ 下研究了方程(2) 2π_周期解的存在唯一的问题•本文首先利用Fourier级数理论研究了方程(2)的 2π_周期解问题,在更弱的条件下得到了方程(2)的 2π_周期解的存在唯一的充要条件,并给出了其各阶导数的界的估计式•然后利用不动点原理进一步地给出了方程(1) 2π_周期解的存在性的新的结果•我们的结果改进和推广了文[7~8]中相应的工作•在本文中,我们给出如下记号:

$$H(\lambda) := \lambda^k + \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} b_j \lambda^{k-j} e^{-\lambda h_j} = 0 \tag{3}$$

为方程(2)的特征方程•对 $\forall g(t) \in C_{2\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$,设

$$F_n(g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-nis} g(s)\,ds•$$

本文须作如下假设:

[C]: $\sigma = \inf\limits_{n \in \mathbf{Z} - I_s} |1 + b_0 e^{-nih_0}| > 0$,其中 I_s 为 $\mathbf{Z}$ 中含有 s 个整数的有限子集•

1 线性NFDE周期解问题

引理 设条件[C]满足且 $H(ni) \neq 0$, $\forall n \in \mathbf{Z}$,则当 $|n| \to \infty$ 时,

$$|H^{-1}(ni)| = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)•$$

定理1 如果条件[C]满足,则对 $\forall f(t) \in C_{2\pi}$ 方程(2)存在唯一 2π_周期解的充要条件是

$$H(ni) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}•$$

证明 首先设方程(2)存在唯一 2π_周期解 $x(t) \in C_{2\pi}$,方程(2)两边同乘以 e^{-nit} 并在区间 $[0, 2\pi]$ 上积分得:

$$\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d^k}{dt^k}(x(t) + b_0 x(t - h_0)) + \sum_{j=1}^{k} a_j x^{(k-j)}(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x^{(k-j)}(t - h_j)\Big] e^{-nit}\,dt = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-nit}\,dt• \tag{4}$$

利用分部积分法易得:

$$H(ni) F_n(x) = F_n(f),$$

即线性方程 $H(ni)y = F_n(f)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$,可被唯一解出 $y \in \mathbf{R}$•因此

$$H(ni) \neq 0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}•$$

下面证明充分性,如果 $H(ni) \neq 0$, $\forall n \in \mathbf{Z}$,令 $C_n = F_n(f)/H(ni)$,我们将要证明级数 $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} C_n e^{int}$, $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} C_n(ni) e^{int}$, …, $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} C_n(ni)^{k-1} e^{int}$ 均为绝对一致收敛,且级数 $\sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} C_n e^{int}$ 的和是方程(2)的 2π_周期解•事实上,由引理得

$$|H^{-1}(ni)| = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \qquad (|n| \to \infty),$$

因而 $$\sum_{n \in \mathbf{Z}} C_n(ni)^j e^{int} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(ni)^j}{H(ni)} F_n(f) e^{int} \qquad (j = 0, 1, 2, …, k-2)$$

为 $\mathbf{R}$ 上绝对一致收敛•

令 $\sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} \left|\dfrac{(ni)^j}{H(ni)}\right| = M_j$, $(j = 0, 1, 2, …, k-2)$,则得

$$\left\|\sum_{n\in\mathbf{Z}}C_n(n\mathrm{i})^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right\|\leqslant M_j\|f\|\qquad(j=0,1,2,\cdots,k-2)\cdot \tag{5}$$

当 $j=k-1$ 时，$\forall n\in\mathbf{Z}-I_s$ 有

$$\begin{aligned}&\left\|(1+b_0\mathrm{e}^{-nih_0})C_n(n\mathrm{i})^{k-1}\mathrm{e}^{nit}-\frac{F_n(f)}{n\mathrm{i}}\mathrm{e}^{nit}\right\|\leqslant\\&\left|\frac{(n\mathrm{i})^k+b_0(n\mathrm{i})^k\mathrm{e}^{-nih_0}-H(n\mathrm{i})}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\left|F_n(f)\right|\leqslant\\&\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\left|F_n(f)\right|\cdot\end{aligned} \tag{6}$$

由于

$$\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad(|n|\to\infty), \tag{7}$$

且

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\leqslant\\&\sum_{n\in\mathbf{Z}-I_s-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|+\\&\sum_{n\in I_s-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\cdot\end{aligned} \tag{8}$$

由(7)和(8)知级数

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|$$

在 $\mathbf{R}$ 上收敛· 令

$$G=\sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\cdot \tag{9}$$

由(6)和(8)及假设[C]知，当 $n\in I_s-\{0\}$ 时我们有：

$$\begin{aligned}&\left|(n\mathrm{i})^{k-1}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant\\&\frac{1}{\sigma}\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\left|F_n(f)\right|+\frac{|F_n(f)|}{|n\mathrm{i}|}\right)\cdot\end{aligned}$$

故由 Bessell 不等式及(9)得：

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbf{Z}-I_s-\{0\}}\left|(n\mathrm{i})^{k-1}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right|\leqslant\\&\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}-I_s-\{0\}}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-nih_j}}{n\mathrm{i}H(n\mathrm{i})}\right|\left|F_n(f)\right|+\right.\\&\left.\sum_{n\neq0}\frac{1}{|n|}\left|F_n(f)\right|\right)\leqslant\frac{1}{\sigma}\left[\sum_{n\neq0}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(s)\mathrm{d}s\right)^{1/2}+G\|f\|\right]\leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}+G\right)\|f\|,$$

因而有

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|(ni)^{k-1}C_n e^{int}| = \sum_{n\in\mathbf{Z}-\{0\}}|(ni)^{k-1}C_n e^{int}| \leqslant$$
$$\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}+G\right)\|f\|+\sum_{n\in I_s}|(ni)^{k-1}C_n e^{int}| \leqslant$$
$$\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{\sigma}G+sL\right)\|f\|, \tag{10}$$

其中 $L=\max\limits_{n\in I_s}\left\{|(ni)^{k-1}/H(ni)|\right\}$，故得级数 $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}C_n(ni)^{k-1}e^{nit}$ 为 $\mathbf{R}$ 上绝对且一致收敛·

余下证明由级数 $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}C_n(ni)^{k-1}e^{nit}$ 所确定的函数满足方程(2)· 事实上，方程(2) 等价于下列方程:

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(x(t)+b_0x(t-h_0))-x^{(k-1)}(0)-b_0x^{(k-1)}(-h_0)+$$
$$\int_0^t\left[\sum_{j=1}^k a_jx^{(k-j)}(s)+\sum_{j=1}^k b_jx^{(k-j)}(s-h_j)\right]ds=\int_0^t f(s)ds· \tag{11}$$

令 $C_{2\pi}^0=\left\{\varphi\mid \varphi\in C_{2\pi},\ F_0(\varphi)=0\right\}$，$y(t)=x(t)-F_0(x)$，则 $y(t)\in C_{2\pi}^0$

由于 $H(0)F_0(x)=(a_k+b_k)F_0(x)=F_0(f)$，并由(11) 我们得到

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(y(t)+b_0y(t-h_0))-y^{(k-1)}(0)-b_0y^{(k-1)}(-h_0)+$$
$$\int_0^t\left[\sum_{j=1}^k a_jy^{(k-j)}(s)+\sum_{j=1}^k b_jy^{(k-j)}(s-h_j)\right]ds=\int_0^t[f(s)-F_0(f)]dt, \tag{12}$$

又

$$F_0[(y(t)+b_0y(t-h_0))^{(k-1)}]=0,$$
$$F_0[y^{(k-1)}(0)+b_0y^{(k-1)}(-h_0)]=y^{(k-1)}(0)+b_0y^{(k-1)}(-h_0),$$

故由(12)，我们得到

$$F_0\left[\int_0^t\left[\sum_{j=1}^k(a_jy^{(k-j)}(s)+b_jy^{(k-j)}(s-h_j))\right]ds\right]=$$
$$F_0\left[\int_0^t(f(s)-F_0(f))ds\right]·$$

因此

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(y(t)+b_0y(t-h_0))+$$
$$E\left[\sum_{j=1}^k[(a_jy^{(k-j)}(t)+b_jy^{(k-j)}(t-h_j))]\right](t)=$$
$$E[f-F_0(f)](t), \tag{13}$$

其中 $E[\varphi](t)=\int_0^t\varphi(s)ds-F_0\left[\int_0^t\varphi(s)ds\right] \qquad \forall\varphi\in C_{2\pi}·$

如果 $x(t)$ 是方程(2) 的解，则 $y(t)=x(t)-F_0(x)$ 必满足方程(13)· 反之如果 $y(t)$ 是方程(13) 的解，则 $x(t)=y(t)+H^{-1}(0)F_0(f)$ 一定是方程(2) 的解· 因而只须验证函数 $w(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}-I_m^--\{0\}}C_ke^{\mu_kt}$ 满足(13) 即可· $\forall\varphi\in C_{2\pi}$，利用 Bessel 不等式可以证明 $E[\varphi](t)$ 的 Fourier 级

数为 $E[\varphi](t)=\sum_{n\neq0}\frac{1}{n\mathrm{i}}F_n[\varphi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 为绝对一致收敛. 故得

$$E\Big[\sum_{j=1}^{k}(a_jw^{(k-j)}(t)+b_jw^{(k-j)}(t-h_j))\Big](t)=$$
$$\sum_{n\neq0}\Big[\frac{C_n}{n\mathrm{i}}\sum_{j=1}^{k}(a_j(n\mathrm{i})^{k-j}+b_j(n\mathrm{i})^{k-j}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}h_j})\mathrm{e}^{n\mathrm{i}t}\Big], \tag{14}$$

$$E[f-F_0(f)](t)=\sum_{n\neq0}\frac{F_n(f)}{n\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{15}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}(w(t)+b_0w(t-h_0))=\sum_{n\neq0}(n\mathrm{i})^{k-1}(1+b_0\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}h_0})\mathrm{e}^{n\mathrm{i}t}. \tag{16}$$

由(14)、(15) 和 (16) 并考虑到 $H(n\mathrm{i})C_n=F_n(f)$, $\forall n\in\mathbf{Z}$, 我们可得:

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}(w(t)+b_0w(t-h_0))=$$
$$E\Big[\sum_{j=1}^{k}(a_jw^{(k-j)}(t)+b_jw^{(k-j)}(t-h_j))\Big](t)+$$
$$E[f-F_0(f)](t),$$

因而级数 $\sum_{n\in\mathbf{Z}}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ 是方程(2) 的解. 从(5) 和 (10) 立得

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbf{Z}}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Big\|\leqslant M\|f\|,$$

其中 $$M=\max\left\{\max_{0\leqslant j\leqslant k-2}\{M_j\},\ \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{\sigma}G+sL\right\}.$$

注[1] 如果 $|b_0|\neq1$, 取 $I_s=\varnothing$, 则得

$$\sigma=\inf_{n\in\mathbf{Z}-I_s}|1+b_0\mathrm{e}^{nih_0}|=\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sqrt{1+2b_0\cos nh_0+b_0^2}\geqslant$$
$$\sqrt{1-2|b_0|+b_0^2}=\big|1-|b_0|\big|>0.$$

故条件[C] 满足.

注[2] 考虑下列二阶 NFDE:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t)+x\left(t-\frac{2}{3}\pi\right)\right)+ax(t)+bx'(t)+cx(t-\tau)+dx'(t-\tau)=f(t), \tag{17}$$

其中 a、b、c、d、τ 均是实常数, $f(t)=C_{2\pi}$. 此时若取 $I_s=\varnothing$, 则得

$$\sigma=\inf_{n\in\mathbf{Z}-I_s}|1+b_0\mathrm{e}^{nih_0}|=\inf_{n\in\mathbf{Z}}\sqrt{2+2\cos(2n\pi/3)}\geqslant1.$$

故由定理 1 知: 方程 (17) 存在唯一 2π_周期解的充要条件是

$$H(n\mathrm{i})=(n\mathrm{i})^2\left(1+\mathrm{e}^{-2n\pi\mathrm{i}/3}\right)+a+bn\mathrm{i}+c\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\tau}+dn\mathrm{i}\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\tau}\neq0\qquad\forall n\in\mathbf{Z}.$$

但是由文[8]是得不到上述结论的, 其原因是此时 $b_0=1$. 因而本文推广和改进了文[8] 相应的工作.

2 非线性 NFDE 周期解问题

定理 2 如果下列条件满足:

(I) 假设[C] 满足且 $H(n\mathrm{i})\neq0$, $\forall n\in\mathbf{Z}$.

(II) $M\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sup_{\max\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1}\{\|\varphi_j\|\}\leqslant k}\|f(t,\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1})\|<1$,

则方程(1) 至少存在一个 2π_周期解.

证明 $\forall \varphi(t) \in C_{2\pi}^{k-1}$, 考虑方程:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(x(t)+b_0x(t-h_0))+\sum_{j=1}^{k}a_j x^{(k-j)}(t)+\sum_{j=1}^{k}b_j x^{(k-j)}(t-h_j)=$$
$$f(t,\varphi(t+\cdot),\varphi'(t+\cdot),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t+\cdot)),\tag{18}$$

由定理 1 得, 方程(18) 存在唯一 2π_周期解 $x(t,\varphi)$ 满足:

$$\|x(t,\varphi)\|_{P_{k-1}}\leqslant M\|f(t,\varphi(t+\cdot),\varphi'(t+\cdot),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t+\cdot))\|\cdot\tag{19}$$

定义映射 F: $C_{2\pi}^{(k-1)}\to C_{2\pi}^{(k-1)}$, $F(\varphi)(t)=x(t,\varphi)$, $\forall\varphi\in C_{2\pi}^{(k-1)}$•

下面我们将证明存在一个实数 $\omega>0$ 使得 $\mathrm{F}\Omega\subset\Omega$, 其中

$\Omega=\left\{\varphi\mid\varphi\in C_{2\pi}^{(k-1)},\ \|\varphi\|_{P_{k-1}}\leqslant\omega\right\}$• 若结论不成立, 则 $\forall r\in(0,\infty)$, 均有一个 $\varphi_r\in C_{2\pi}^{(k-1)}$ 使得 $\|\varphi_r\|_{P_{k-1}}\leqslant r$ 且 $\|\mathrm{F}\varphi_r\|_{P_{k-1}}>r$• 由(19) 知,

$$\|\mathrm{F}\varphi_r\|_{P_{k-1}}\leqslant M\|f(t,\varphi_r(t+\cdot),\varphi_r'(t+\cdot),\ldots,\varphi_r^{(k-1)}(t+\cdot))\|\cdot\tag{20}$$

将(20) 两端同乘以 $1/r$ 得:

$$1\leqslant\lim_{r\to+\infty}\frac{\|\mathrm{F}\varphi_r\|_{P_{k-1}}}{r}\leqslant$$
$$M\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\|f(t,\varphi_r(t+\cdot),\varphi_r'(t+\cdot),\ldots,\varphi_r^{(k-1)}(t+\cdot))\|\leqslant$$
$$M\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sup_{\max\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1}\{\|\varphi_j\|\}\leqslant k}\|f(t,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})\|<1,$$

这是矛盾的• 故得 $\mathrm{F}\Omega\subset\Omega$• 令

$$\Omega_1=\left\{\varphi\mid\varphi\in\Omega,\forall t_1,t_2\in\mathbf{R},\ |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant m|t_1-t_2|\right\},$$

其中 $$m=\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{\sigma}G+sL\right)\left\{\sum_{j=1}^{k}(|a_j|+|b_j|)\omega+N\right\},$$

N 为 $|f(t,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})|$ 在集合$[0,2\pi]\times\Omega^k$ 上的上界• 易证 Ω_1 为 Ω中的有界凸紧集• 从上面的证明不难看出, 对 $\forall\varphi\in\Omega_1$, $\mathrm{F}\varphi\in\Omega$和

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}([\mathrm{F}\varphi](t)+b_0[\mathrm{F}\varphi](t-h_0))+$$
$$\sum_{j=1}^{k}(a_j[\mathrm{F}\varphi]^{(k-j)}(t)+b_j[\mathrm{F}\varphi]^{(k-j)}(t-h_j))=$$
$$f(t,\varphi(t+\cdot),\varphi'(t+\cdot),\ldots,\varphi^{(k-1)}(t+\cdot)),$$

由(19) 得

$$\|[\mathrm{F}\varphi]^{(k-1)}(t)\|\leqslant\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{\sigma}G+sL\right)\left\{\sum_{j=1}^{k}(|a_j|+|b_j|)\omega+N\right\}=m,$$

因而 $\mathrm{F}\Omega_1\subset\Omega_1$• 又 F 的连续性是显然的• 故由Schauder不动点定理知, F 在 Ω_1 上存在不动点 x^*, 即 $F(x^*)=x^*$• 证毕•

由此定理不难得到下列推论:

推论 若定理 2 中的条件(I) 满足且存在常数 $\rho>0$ 使得当$\max\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1}\left\{\|\varphi_j\|\right\}\leqslant\rho$时,

$$|f(t,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})|\leqslant l+\sum_{j=0}^{k}l_j\|\varphi_j\|^{\alpha_j},$$

其中 $l,l_j(j=0,1,\ldots,k-1)$ 均为非负常数, $\alpha_j(j=0,1,\ldots,k-1)\in[0,1)$• 则方程(1) 存在$2\pi$_周期解•

类似于定理 2 的证明可得:

定理 3　若定理 2 中的条件(I)满足且对 $\forall \varphi_j (j = 0, 1, \cdots, k-1) \in C_{2\pi}$, 有

$$|f(t, \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1})| \leqslant l + \sum_{j=0}^{k} l_j \|\varphi_j\|^{\beta_j},$$

其中 l, $l_j (j = 0, 1, \cdots, k-1)$ 均为非负常数, $\beta_j (j = 0, 1, \cdots, k-1) \in (1, \infty)$; 并存在常数 $\omega > 0$ 使得 $Ml + M\sum_{l=1}^{k} l_j \omega^{\beta_j} \leqslant \omega$. 则方程 (1) 存在 2π_周期解.

[参 考 文 献]

[1] Burton A, Zhong B. Periodic solutions abstract differential equations with infinite delay[J]. J Differential Equations, 1991, **90**(2): 357—396.

[2] Hatvani L, Krisztin T. On the existence of periodic solutions for linear and inhomogeneous and quasilinear functional differential equations[J]. J Differential Equations, 1992, **97**(1): 1—15.

[3] Zhong M R. Periodic solutions of linear and quasilinear neutral functional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1995, **189**(2): 378—392.

[4] 鲁世平. 一类 n 维中立型泛函微分方程周期解[J]. 数学研究, 1998, **31**(3): 283—289.

[5] 鲁世平. 一类中立型泛函微分方程周期解[J]. 数学杂志, 2000, **20**(2): 151—155.

[6] 鲁世平. 一类 n 阶中立型泛函微分方程周期解[J]. 数学研究, 2000, **33**(3): 110—116.

[7] 司建国. 关于高阶常系数线性中立型方程周期解的讨论[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(1): 29—37.

[8] 曹进德. 一类高阶中立型方程周期解[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(6): 605—612.

Problem of Periodic Solutions for Neutral Functional Differential Equation

LU Shi_ping[1,2], GE Wei_gao[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China;

2. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, P R China)

Abstract: The problem of periodic solutions for a kind of k_th order linear neutral functional differential equation is studied. By using the theory of Fourier expansions, a sufficient and necessary condition to guarantee the existence and uniqueness of periodic solution is obtained. Further, by applying this result and Schauder's fixed point principle, a kind of k_th order nonlinear neutral functional differential equation is investigated, and some new results on existence of the periodic solutions are given as well. These results improve and extend some known results in recent literature.

Key words: neutral functional differential equation; fixed point principle; periodic solution