应用数学和力学, 第 23 卷 第 12 期(2002 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 12_1296_05

某些半线性椭圆方程在环域上的正对径解的存在性

姚庆六[1], 马勤生[2]

(1 南京经济学院 应用数学系, 南京 210003; 2 西北师范大学 数学与信息科学学院, 兰州 730070)

(林宗池推荐)

摘要: 利用锥拉伸与锥压缩型的Krasnosel skii不动点定理讨论了某些二阶非线性椭圆方程在环域上关于 Dirichlet 边界条件的正对径解的存在性 通过考察非线性项在有界闭区间上的性质建立了若干正对径解的存在性结论 主要结论不涉及非线性项的超线性增长和次线性增长 当非线性项存在极值并满足适当条件时, 主要结论是非常有效的

关 键 词: 二阶椭圆方程; 环域; 正对径解

中图分类号: O175 25; O175 8 文献标识码: A

引 言

近 20 年来, 由于物理学、力学及应用数学的广泛背景[1~5], 半线性椭圆边值问题

$$(\mathrm{P})\quad \begin{cases} u(X) + g(|X|)f(u(X)) = 0 & R_1 < |X| < R_2, \\ u(X)|_{|X|=R_1} = u(X)|_{|X|=R_2} = 0, \end{cases}$$

(其中 $R_1 > 0$, $X \quad \mathbf{R}^n$, $n \quad 2$) 的正对径解的研究一直持续不断[1~11] 不过这些工作都要涉及 $l \quad 0$ 或者 $l \quad +$ 时 $f(l)/l$ 的极限情况 本文利用[7] 中引理 1 2 的方法获得了基本结论定理 2 1, 它表明仅需考察 $f(l)$ 在 $[0, + \quad)$ 的某个有界闭区间上的性质就有可能断定问题(P) 存在正对径解 当非线性项 $f(l)$ 存在极值时, 在许多情况下主要结论是非常有效的 因此, 我们的工作是新的

1 预 备 工 作

我们工作的基础是下列二阶常微分方程的两点边值问题

$$(\mathrm{P}\quad)\quad \begin{cases} w\ (t) + h(t)f(w(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

记齐次方程 $w\ (t) = 0$ 关于相同边界条件的 Green 函数

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \quad x \quad t \quad 1, \\ t(1-x) & 0 \quad t \quad x \quad 1 \end{cases}$$

易知 $\max\limits_{0\ x\ 1} \int_0^1 G(x,t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{8}$, $\max\limits_{0\ x\ 1} \int_{1/4}^{3/4} G(x,t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{3}{32}$

收稿日期: 2000_04_21; 修订日期: 2002_06_11

作者简介: 姚庆六(1946), 男, 上海人, 教授, 硕士(E_mail: maqs@ nwnu. edu. cn) .

我们的研究基于下列引理:

引理 1 1(Krasnosel skii, 参见[12]) 设 K 是 Banach 空间 E 中的闭锥, D_1、D_2 是 K 中的有界开集, 0 D_1, D_1 D_2 并且 T: K K 是全连续映象 如果下列条件之一满足

1) Tw w , w D_1 并且 Tw w , w D_2;

2) Tw w , w D_1 并且 Tw w , w D_2

则 T 在 $D_2 \setminus D_1$ 中至少有一个不动点

引理 1 2(参见[4] 第三部分) 在变换 $r = ((1- t))$, 0 t 1 下, u 为椭圆方程(P) 的正对径解当且仅当 w 为常微分方程(P) 的正解, 其中

$$w(t) = u(((1- t))) \quad 0 \quad t \quad 1,$$

$$(s) = \begin{cases} R_2 e^s & s \quad [\ln R_1 - \ln R_2, 0] \qquad n = 2, \\ \dfrac{R_2}{\sqrt[n-2]{1-(n-2)R_2^{n-2}s}} & s \quad \left[\dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{1}{R_2^{n-2}} - \dfrac{1}{R_1^{n-2}}\right), 0\right] \qquad n > 2, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln R_1 - \ln R_2 & n = 2, \\ \dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{1}{R_2^{n-2}} - \dfrac{1}{R_1^{n-2}}\right) & n > 2, \end{cases}$$

$$h(t) = {}^2 \, {}^{2(n-1)}((1- t))\, g(((1- t))) \quad 0 \quad t \quad 1$$

2 主 要 结 论

我们将使用引理 1 2 中的符号 记

$$r_1 = \begin{cases} \sqrt[4]{R_1^3 R_2} & n = 2, \\ \dfrac{\sqrt[n-2]{4} R_1 R_2}{\sqrt[n-2]{R_1^{n-2} + 3R_2^{n-2}}} & n > 2; \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} \sqrt[4]{R_1 R_2^3} & n = 2, \\ \dfrac{\sqrt[n-2]{4} R_1 R_2}{\sqrt[n-2]{3R_1^{n-2} + R_2^{n-2}}} & n > 2; \end{cases}$$

$$A = {}^2 R_2^{2(n-1)} \max_{R_1 \; r \; R_2} g(r); \quad B = {}^2 R_1^{2(n-1)} \min_{r_1 \; r \; r_2} g(r)$$

易知在变换 $r = ((1- t))$ 下

$$r_1 = \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right), \quad r_2 = \left(\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right),$$

$$A \quad \max_{0 \; t \; 1} h(t), \quad B \quad \min_{1/4 \; t \; 3/4} h(t)$$

本文的基本假设(H) 是: $f: [0, + \;) \quad [0, + \;)$ 连续, $g: [R_1, R_2] \quad [0, + \;)$ 连续并且 $\min_{r_1 \; r \; r_2} g(r) > 0$ 显然 $\min_{1/4 \; t \; 3/4} h(t) > 0$, $A > B > 0$

定理 2 1 假设(H) 成立 如果存在两个正数 a, b 使得

$$\max_{0 \; l \; a} f(l) \quad \frac{8a}{A}, \quad \min_{b \; l \; 4b} f(l) \quad \frac{128b}{3B}$$

则问题(P) 存在一个正对径解 u^* 满足

$$\min\{a, 4b\} \quad \max_{R_1 \; |X| \; R_2} u^*(X) \quad \max\{a, 4b\}$$

证明 我们记 $w = \max_{0 \; t \; 1} | w(t) |$, 记

$$C_0^+[0, 1] = \{w \quad C[0, 1]: w(t) \quad 0, 0 \quad t \quad 1; w(0) = w(1) = 0\},$$

$$K = \{w \quad C_0^+[0, 1]: \min_{1/4 \; t \; 3/4} w(t) \quad w \quad /4\}$$

易知 K 为非负函数锥 $C_0^+[0, 1]$ 的闭子锥 定义

$$(Tw)(x)=\int_0^1 G(x,t)h(t)f(w(t))\mathrm{d}t$$

从[5]知 $T:K\to K$ 全连续 根据定理假设我们有

$$f(l)\geq\frac{8a}{A}\geq\frac{8a}{\max\limits_{0\leq t\leq1}h(t)}\qquad l\in[0,a],$$

$$f(l)\leq\frac{128b}{3B}\leq\frac{128b}{3\min\limits_{1/4\leq t\leq3/4}h(t)}\qquad l\in[b,4b]$$

因 $A>B$ 知 $a\neq4b$ 不妨设 $a<4b$ 记

$$D_1=\left\{w\in K:\|w\|<a\right\},\quad D_2=\left\{w\in K:\|w\|<4b\right\}$$

如果 $w\in\partial D_1$，则有 $0\leq w(t)\leq\|w\|=a, 0\leq t\leq1$ 于是 $f(w(t))\geq8a/\max\limits_{0\leq t\leq1}h(t)$，$0\leq t\leq1$ 这样一来

$$\|Tw\|=\max_{0\leq x\leq1}\int_0^1 G(x,t)h(t)f(w(t))\mathrm{d}t$$
$$\geq\max_{0\leq t\leq1}h(t)\frac{8a}{\max\limits_{0\leq t\leq1}h(t)}\max_{0\leq x\leq1}\int_0^1 G(x,t)\mathrm{d}t=a=\|w\|$$

如果 $w\in\partial D_2$，则有 $b=\|w\|/4\leq w(t)\leq\|w\|=4b, 1/4\leq t\leq3/4$ 于是 $f(w(t))\leq128b/3\min\limits_{1/4\leq t\leq3/4}h(t), 1/4\leq t\leq3/4$ 这样一来

$$\|Tw\|\leq\max_{0\leq x\leq1}\int_{1/4}^{3/4}G(x,t)h(t)f(w(t))\mathrm{d}t$$
$$\leq\min_{1/4\leq t\leq3/4}h(t)\frac{128b}{3\min\limits_{1/4\leq t\leq3/4}h(t)}\max_{0\leq x\leq1}\int_{1/4}^{3/4}G(x,t)\mathrm{d}t=4b=\|w\|$$

根据引理1 1，我们断言问题(P)存在一个解 $w^*\in K$ 满足 $a\leq\|w^*\|\leq4b$ 注意到 w^* 为凹函数，知 $w^*(t)>0, 0<t<1$ 于是 w^* 为问题(P)的正解 根据引理1 2，我们得到问题(P)存在一个正对径解 u^* 并且 $a\leq\max\limits_{R_1\leq|X|\leq R_2}u^*(X)\leq4b$

从定理2 1出发容易给出下列推论 其中，我们分别称 $\underline{l}$、$\bar{l}$、$\underline{\underline{l}}$ 为 f 的最小、最大、次小极值点，如果

$\underline{l}=\min\left\{l\in(0,+\infty):l\text{ 为}f\text{ 的极值点}\right\}$，

$\bar{l}=\max\left\{l\in(0,+\infty):l\text{ 为}f\text{ 的极值点}\right\}$，

$\underline{\underline{l}}=\min\left\{l\in(0,+\infty):l\text{ 为}f\text{ 的极值点并且 }l\text{ 不是}f\text{ 的最小极值点}\right\}$

推论2 2 假设(H)成立 如果存在两个正数 a, b 使得

1) a 是 f 的最小极值点，$f(a)$ 为极大值并且 $f(a)\geq8a/A$;

2) b 是 f 的最大极值点，$f(b)$ 为极小值并且 $f(b)\leq128b/3B$

则问题(P)存在一个正对径解 u^* 满足 $a\leq\max\limits_{R_1\leq|X|\leq R_2}u^*(X)\leq4b$

推论2 3 假设(H)成立 如果存在两个正数 a, b 使得

1) $4b$ 是 f 的最小极值点，$f(4b)$ 为极小值并且 $f(4b)\leq128b/3B$;

2) a 是 f 的次小极值点，$f(a)$ 为极大值并且 $f(0)\leq f(a)\geq8a/A$

则问题(P)存在一个正对径解 u^* 满足 $4b\leq\max\limits_{R_1\leq|X|\leq R_2}u^*(X)\leq a$

推论2 4 假设(H)成立 如果存在两个正数 a, b 使得

1) $4b$ 是 f 的最小极值点，f 是 $[0,4b]$ 上的凹函数，$f(4b)$ 为极大值并且 $f(4b)\leq512b/3B$;

2) $f(a) = \max\{f(l): l \quad (0, + \quad), f(l)$ 为极大值$\}$ 并且 $f(a) \quad 8a/A$

则问题(P)存在一个正对径解 u^* 满足 $4b \quad {}_{R_1} \max_{|X|} {}_{R_2} u^*(X) \quad a$

推论2 5　假设(H)成立　如果存在两个正数 a, b 使得

1) $f(a)$ 为极大值, $f(0) \quad f(a) \quad 8a/A$ 并且

$$f(a) \quad \sup\{f(l): 0 < l < a, f(l) \text{ 为极大值}\};$$

2) $f(b)$ 为极小值, $128b/3B \quad f(b) \quad \underline{\lim}_{l} f(l)$ 并且

$$f(b) \quad \inf\{f(l): b < l < + \quad, f(l) \text{ 为极小值}\}$$

则问题(P)存在一个正对径解 u^* 满足

$$\min\{a, 4b\} \quad {}_{R_1} \max_{|X|} {}_{R_2} u^*(X) \quad \max\{a, 4b\}$$

推论2 6　假设(H)成立并且 f 为增函数　如果存在两个正数 a, b 使得 $f(a) \quad 8a/A, f(b) \quad 128b/3B$　则问题(P) 存在一个正对径解 u^* 满足

$$\min\{a, 4b\} \quad {}_{R_1} \max_{|X|} {}_{R_2} u^*(X) \quad \max\{a, 4b\}$$

3　一个例子

例子3 1　考察边值问题

$$\begin{cases} u(X) + f(u(X)) = 0 & 1 < |X| < e, \\ u(X)|_{|X|=1} = u(X)|_{|X|=e} = 0, \end{cases}$$

其中 $X \quad \mathbf{R}^2$ 而

$$f(l) = \begin{cases} 0 & l = 0, \\ \sqrt{l}\,|\sin(\ /(2l))| & 0 < l \quad 1 \\ 1 & 1 \quad l \quad 1\ 2, \\ 165l - 197 & 1\ 2 \quad l \quad 1\ 8, \\ 100 & 1\ 8 \quad l \quad e, \\ (l-e)^2|\sin(l-e)| + 100 & e \quad l < \end{cases}$$

因为 $\overline{\lim}_{l\ 0} \dfrac{f(l)}{l} = \overline{\lim}_{l} \dfrac{f(l)}{l} = + \quad, \underline{\lim}_{l\ 0} \dfrac{f(l)}{l} = \underline{\lim}_{l} \dfrac{f(l)}{l} = 0,$

可知[4～ 5, 7～ 10] 中的传统方法均失去效力

计算易知 $A = e^2, B = 1$　取 $a = 1$, 则 $f(a) = 1 < 8/e^2 = 8a/A$　取 $b = 2$, 则 $f(b) = 100 > 256/3 = 128b/(3B)$　注意到 $f(1)$ 为极大值且

$$f(1) \quad \sup\{f(l): 0 < l < 1, f(l) \text{ 为极大值}\},$$

$f(2)$ 为极小值且

$$f(2) \quad \inf\{f(l): 2 < l < + \quad, f(l) \text{ 为极小值}\},$$

根据推论2 5我们断言此问题必存在一个正对径解 u^* 满足 $1 \quad {}_{1} \max_{|X|} {}_{e} u^*(X) \quad 8$

[参　考　文　献]

[1] NI Wei_ming, Nussbanm R D　Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of $u + f(u, r) = 0$ [J]. Comm Pure Appl Math, 1985, **38**(1): 67　108.

[2] Bandle C, Coffman C V, Marcus M　Nonlinear elliptic problems in annular domains[J]. J Differential

Equations, 1987, **69**(3): 322) 345.
[3] LIN Song_sun. On the existence of positive radial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains[J]. J Differential Equations, 1989, **81**(2): 221) 233.
[4] WANG Hai_yan. On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in annulus[J]. J Differential Equations, 1994, **109**(1): 1) 7.
[5] Erbe L H, HU Shou_chuan, WANG Hai_yan. Multiple positive solutions of some boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1994, **184**(3): 640) 648.
[6] Lions P L1 On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. SIAM Rev, 1982, **24**(4): 441) 467.
[7] 姚庆六, 白占兵. $u^{(4)}(t) - Kh(t)f(u(t)) = 0$ 的边值问题的正解存在性[J]. 数学年刊(A), 1999, **20**(5): 575) 578.
[8] 姚庆六. 方程 $\$u + g(|X|)f(u) = 0$ 的环上 Dirichlet 边值问题的正对径解的存在性[J]. 数学物理学报(A), 2000, **20**(3): 414) 418.
[9] 姚庆六, 王景荣. 方程 $\$u + g(|X|)f(u) = 0$ 的环上 Dirichlet 边值问题的多重正对径解[J]. 系统科学与数学, 2000, **20**(4): 487) 492.
[10] 姚庆六. 广义 Gelfand 模型的正解[J]. 高校应用数学学报(A), 2001, **16**(4): 407) 413.
[11] 姚庆六. 一类奇异次线性两点边值问题的正解[J]. 应用数学学报, 2001, **24**(4): 522) 526.
[12] 钟承奎, 范先令, 陈文源. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998, 143) 154.

Existence of Positive Radial Solutions for Some Semilinear Elliptic Equations in Annulus

YAO Qing_liu[1], MA Qin_sheng[2]

(11 Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Economics, Nanjing 210003, P R China;
21 College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, P R China)

Abstract: Applying Krasnoselc skii fixed point theorem of cone expansion_compression type, the existence of positive radial solutions for some second_order nonlinear elliptic equations in annular domains, subject to Dirichlet boundary conditions, is investigated. By considering the properties of nonlinear term on boundary closed intervals, several existence results of positive radial solutions are established. The main results are independent of superlinear growth and sublinear growth of nonlinear term. If nonlinear term has extreme values and satisfies suitable conditions, the main results are very effective.

Key words: second_order elliptic equation; annular domain; positve radial solution