应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 12_1301_06

带变号系数的经典 Gelfand 模型的正解*

姚庆六

(南京经济学院 应用数学系, 南京 210003)

(许政范推荐)

摘要: 考察了经典 Gelfand 模型的正解的存在与迭代, 其中非线性项的系数允许在[0, 1] 中改变符号• 利用单调迭代方法得到了一个正解存在定理, 给出了相应的迭代程序和收敛速度• 由于这个迭代程序是从零函数开始的, 因此它是简单、可行并且有效的•

关 键 词: Gelfand 模型; 变号系数; 正解; 存在性; 单调迭代方法
中图分类号: O175. 8 文献标识码: A

引 言

非线性两点边值问题(BVP)

$$
(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} w''(t) + \lambda h(t)\mathrm{e}^{w(t)} = 0 & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}
$$

$(\lambda > 0)$ 在 $h(t) \equiv 1$ 时是由 Gelfand[1] 提出的• 这就是我们为什么把问题(P) 称为 Gelfand 模型的理由• 这一类半线性问题出现在许多有意义的应用中• 它们即可出现在容器内化学性质活泼的混合气体的热自燃理论中[2, 3]• 也表现为通过多孔媒介的气体扩散模型的平衡解[4]• Choi[5] 曾利用打靶法建立了问题(P) 的一个正解存在定理, 文献[6~ 8] 在更为一般的形式下处理了问题(P)• 为了保证解的非负性, 上述研究都假定了 $h(t)$ 的非负性(特别地 $h(t) \equiv 1$)•

本文的目的是研究问题(P) 的正解, 我们将考察允许系数 $h(t)$ 在[0, 1] 上变号的情况• 此处(P) 的正解 w^* 是指(P) 满足 $w^*(t) > 0, 0 < t < 1$ 的解• 借助于单调迭代方法我们得到了一个新的正解存在定理• 众所周知我们的结论适用于考察如下二阶半线性椭圆 BVP 的正解[7]

$$
\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda k(|x|)\mathrm{e}^{u(x)} = 0 & R_1 < |x| < R_2, \\ u(x)\,|_{|x| = R_1} = u(x)\,|_{|x| = R_2} = 0, \end{cases}
$$

其中 $x \in \mathbf{R}^N$, $R_1 > 0$• 我们注意到新近的文献[9~ 12] 讨论了带变号系数的二阶半线性椭圆 BVP 的正解• 值得指出的是我们不仅得到了正解的存在性, 而且给出了求解问题(P) 的迭代方法和收敛速度•

---

* 收稿日期: 2000_11_20; 修订日期: 2002_06_14
作者简介: 姚庆六(1946—) , 男, 上海人, 教授, 硕士, 从事非线性泛函分析与非线性微分方程的研究(E_mail: maqs@nwnu. edu. cn)•

1 预备知识

设 $G(t,s)$ 是 $h(t)\equiv 0$ 时问题(P)的 Green 函数, 即

$$G(t,s)=\begin{cases} t(1-s) & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t) & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

又设 $h^+(t)=\max\{h(t),0\}$, $h^-(t)=-\min\{h(t),0\}$, $t\in[0,1]$.

本文中我们将采用下列假设:

(H_1) $h:[0,1]\to(-\infty,+\infty)$ 是连续的, 并且存在 $0<\eta<1$ 使得

$$h(t)\geqslant 0,\quad t\in[0,\eta];\quad h(t)\leqslant 0,\quad t\in[\eta,1].$$

此外 $h(t)$ 在 $[\eta,1]$ 的任何子区间上不恒为零.

(H_2) 对于 $(t,\sigma)\in[0,1]\times[0,1-\eta]$ 有

$$\mu G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma),$$

其中 $\mu=\eta/(1-\eta)$.

我们将在第 3 节中给出两个命题, 它们表明假设(H_2)是合理的.

我们回想到函数 φ 称为 $[a,b]$ 上的凹(凸)函数, 如果对于任何 $t_1,t_2\in[a,b]$, $\tau\in[0,1]$,

$$\varphi(\tau t_2+(1-\tau)t_1)\geqslant\tau\varphi(t_2)+(1-\tau)\varphi(t_1),$$
$$(\varphi(\tau t_2+(1-\tau)t_1)\leqslant\tau\varphi(t_2)+(1-\tau)\varphi(t_1)).$$

设范数 $\|w\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|w(t)|$ 并且

$$C_0^+[0,1]=\left\{w\in C[0,1]:\min_{0\leqslant t\leqslant 1}w(t)\geqslant 0,\text{并且 } w(0)=w(1)=0\right\},$$

$$K=\left\{w\in C_0^+[0,1]:w\text{ 在}[0,\eta]\text{ 上为凹的并且在}[\eta,1]\text{ 为凸的}\right\},$$

$$A=\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^\eta G(t,s)h^+(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}.$$

显然 K 是 $C[0,1]$ 中的一个非负函数锥. 我们在 $C[0,1]$ 中引入如下半序:

$$w_1\geqslant w_2\text{ 当且仅当 } w_1-w_2\in K.$$

2 主要结论

定理 2.1 在假设(H_1)和(H_2)下, 如果 $0<\lambda\leqslant A/e$, 则问题(P)存在一个正解 $w^*\in K$ 满足 $0<\|w^*\|\leqslant 1$ 并且 $w^*=\lim\limits_{n\to\infty}T^n 0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|(T^n 0)(t)-w^*(t)|=0,$$

其中 $(Tw)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)e^{w(s)}\mathrm{d}s$, $t\in[0,1]$. 此外, 如果 $\lambda<A/e$, $\alpha=\lambda e/A$, 则 $\|T^{n+1}0-w^*\|\leqslant[\alpha^n/(1-\alpha)]\|T0\|$.

证明 根据[7]知 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 是全连续的. 易验证算子 T 的不动点就是问题(P)的解. 我们记

$$q(t)=\min\left\{t/\eta,(1-t)/(1-\eta)\right\}\qquad t\in[0,1].$$

设 $w\in K$, 则 w 在 $[0,\eta]$ 上凹, 在 $[\eta,1]$ 上凸, 并且 $w(0)=w(1)=0$. 这样一来 $\|w\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\eta}w(t)$, 并且

$$w(t)\geqslant w(\eta)q(t),\quad t\in[0,\eta];\quad w(t)\leqslant w(\eta)q(t),\quad t\in[\eta,1].$$

因为 e^l 是关于 l 的增函数，我们看出

$$e^{w(t)} \geqslant e^{w(\eta)q(t)} \quad t \in [0, \eta]; \quad e^{w(t)} \leqslant e^{w(\eta)q(t)} \quad t \in [\eta, 1].$$

设 $s = \eta - \mu\sigma$, $\sigma \in [0, 1-\eta]$，则

$$\int_0^\eta G(t, s) h^+(s) e^{w(\eta)q(s)} ds =$$
$$\mu \int_0^{1-\eta} G(t, \eta - \mu\sigma) h^+(\eta - \mu\sigma) e^{w(\eta)q(\eta-\mu\sigma)} d\sigma.$$

设 $s = \eta + \sigma$, $\sigma \in [0, 1-\eta]$，则

$$\int_\eta^1 G(t, s) h^-(s) e^{w(\eta)q(s)} ds =$$
$$\int_0^{1-\eta} G(t, \eta+\sigma) h^-(\eta+\sigma) e^{w(\eta)q(\eta+\sigma)} d\sigma.$$

根据事实 $q(\eta - \mu\sigma) = q(\eta + \sigma)$, $\sigma \in [0, 1-\eta]$，我们得到

$$e^{w(\eta)q(\eta-\mu\sigma)} = e^{w(\eta)q(\eta+\sigma)} \qquad \sigma \in [0, 1-\eta].$$

根据假设 (H_2)，对于任何 $\sigma \in [0, 1-\eta]$，

$$\mu G(t, \eta-\mu\sigma) h^+(\eta-\mu\sigma) e^{w(\eta)q(\eta-\mu\sigma)} \geqslant$$
$$G(t, \eta+\sigma) h^-(\eta+\sigma) e^{w(\eta)q(\eta+\sigma)}.$$

这就推出，对于任何 $t \in [0, 1]$ 有

$$(Tw)(t) = \lambda\left[\int_0^\eta G(t, s) h^+(s) e^{w(s)} ds - \int_\eta^1 G(t, s) h^-(s) e^{w(s)} ds\right] \geqslant$$
$$\lambda\left[\int_0^\eta G(t, s) h^+(s) e^{w(\eta)q(s)} ds - \int_\eta^1 G(t, s) h^-(s) e^{w(\eta)q(s)} ds\right] \geqslant 0.$$

另一方面，我们有

$$(Tw)''(t) = -\lambda h^+(t) e^{w(t)} \leqslant 0 \qquad t \in [0, \eta],$$
$$(Tw)''(t) = \lambda h^-(t) e^{w(t)} \geqslant 0 \qquad t \in [\eta, 1].$$

这表明 Tw 在 $[0, \eta]$ 上凹，在 $[\eta, 1]$ 上凸。于是 $T: K \to K$ 是全连续的。

设 $(Jw)(t) = \lambda\int_0^1 G(t, s) h(s) w(s) ds$, $t \in [0, 1]$。通过类似的论证我们断言线性算子 $J: K \to K$。

现在假设 $w_1, w_2 \in K$ 并且 $w_2 \geqslant w_1$，则 $w_2 - w_1 \in K$。设 $w_3 = w_2 - w_1$，则 $Jw_3 \in K$。根据中值定理，存在 $\zeta(t) \in [w_1(t), w_2(t)]$ 使得

$$e^{w_2(t)} - e^{w_1(t)} = e^{\zeta(t)}[w_2(t) - w_1(t)] \qquad t \in [0, 1].$$

因为 $\zeta(t) \geqslant 0$, $e^{\zeta(t)} \geqslant 1$，我们有

$$(Tw_2)(t) - (Tw_1)(t) = \lambda\int_0^1 G(t, s) h(s)[e^{w_2(s)} - e^{w_1(s)}] ds =$$
$$\lambda\int_0^1 G(t, s) h(s) e^{\zeta(s)}[w_2(s) - w_1(s)] ds \geqslant$$
$$\lambda\int_0^1 G(t, s) h(s) w_3(s) ds = (Jw_3)(t) \geqslant 0.$$

此外，

$$[(Tw_2) - (Tw_1)]''(t) = -\lambda h^+(t)[e^{w_2(t)} - e^{w_1(t)}] \leqslant 0 \qquad t \in [0, \eta],$$
$$[(Tw_2) - (Tw_1)]''(t) = \lambda h^-(t)[e^{w_2(t)} - e^{w_1(t)}] \geqslant 0 \qquad t \in [\eta, 1].$$

这就推出 $Tw_2 - Tw_1 \in K$，即 $Tw_2 \geqslant Tw_1$。于是 $T: K \to K$ 是一个增算子。

设 $\|w\| \leqslant 1$，则 $-1 \leqslant w(t) \leqslant 1$，$t \in [0,1]$。于是 $e^{w(t)} \leqslant e \leqslant A/\lambda$，$t \in [0,1]$。因此

$$\|Tw\| = \lambda \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\left[\int_0^\eta G(t,s)h^+(s)e^{w(s)}ds - \int_\eta^1 G(t,s)h^-(s)e^{w(s)}ds\right] \leqslant$$
$$\lambda \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^\eta G(t,s)h^+(s)e^{w(s)}ds \leqslant$$
$$\lambda(A/\lambda)\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^\eta G(t,s)h^+(s)ds = 1.$$

我们记 $K_1 = \{w \in K: \|w\| \leqslant 1\}$，由上述讨论知 $T: K_1 \to K_1$。

设 $w_1 = T0$，即 $w_1(t) = (T0)(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)h(s)ds$，$t \in [0,1]$。则 $w_1 \in K_1$ 并且 $w_1 \neq 0$。于是 $\|w_1\| > 0$。定义

$$w_{n+1} = Tw_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因为 $T(K_1) \subset K_1$，我们有 $w_n \in K_1$，$n = 1, 2, \cdots$。注意到 $T: K_1 \to K_1$ 是全连续的，我们断言 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛子序列 $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 并且存在 $w^* \in K_1$ 使得 $w_{n_k} \to w^*$。注意到 $w_1 \geqslant 0$ 并且 $T: K \to K$ 是一个增算子，则

$$w_{n+1} \geqslant w_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

特别的，

$$w_{n+1}(t) \geqslant w_n(t) \quad t \in [0,1] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此，我们断言 $w_n \to w^*$，即 $T^n 0 \to w^*$。显然 $Tw^* = w^*$。因为 $w^* \geqslant w_1$，我们知道必有 $\|w^*\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \eta} w^*(t) > 0$。

我们需要证明 $w^*(t) > 0$，$t \in (0,1)$。因为 w^* 在 $[0,\eta]$ 上凹并且 $w^*(0) = 0$，我们仅需要证明 $w^*(t) > 0$，$t \in [\eta, 1)$。假设存在 $\eta \leqslant \xi < 1$ 使得 $w^*(\xi) = 0$。因为 $w^*(1) = 0$ 并且 w^* 是 $[\xi, 1]$ 上的非负凸函数，知 $w^*(t) = 0$，$t \in [\xi, 1]$。于是

$$(w^*)''(t) \equiv 0 \quad t \in [\xi, 1].$$

另一方面，因为 $Tw^* = w^*$，我们又有

$$(w^*)''(t) = -\lambda h(t)e^{w^*(t)} \quad t \in [\xi, 1].$$

但是从假设 (H_1) 知 $h(t) \neq 0$，$t \in [\xi, 1]$。于是

$$(w^*)''(t) \neq 0 \quad t \in [\xi, 1].$$

这是一个矛盾。

因此 w^* 是问题(P)的一个正解。

最后，如果 $\lambda < A/e$，则 $\alpha = \lambda e/A < 1$。此时容易看出 $T: K_1 \to K_1$ 是一个压缩映象。根据 Banach 压缩映象原理，我们得到

$$\|T^{n+1}0 - w^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|T0 - 0\| = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|T0\|.$$

3 关 于 假 设(H_2)

在本节中我们设假设(H_1)成立。下列命题表明假设(H_2)是合理的。

命题 3.1 如果存在 $0 < \beta < \eta$ 及 $\gamma > 0$ 使得

1) $\mu\beta h^+(\eta - \mu\sigma) \geqslant h^-(\eta + \sigma)$，$\sigma \in [0, (\eta - \beta)/\mu]$；

2) $h^-(\eta+\sigma)\leqslant\mu\gamma(\eta-\mu\sigma)$, $h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant\gamma(\eta+\sigma)$, $\sigma\in[(\eta-\beta)/\mu,1-\eta]$;

则假设(H$_2$)成立•

证明　首先我们有

$$G(t,\eta-\mu\sigma)\geqslant\beta G(t,\eta+\sigma)\qquad\sigma\in[0,(\eta-\beta)/\mu]•$$

事实上,如果 $t\in(0,\eta]$,则

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)}=\frac{t(1-\eta+\mu\sigma)}{t(1-\eta-\sigma)}\geqslant\frac{1-\eta}{1-\eta}=1>\beta\qquad t\in(0,\eta-\mu\sigma],$$

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)}=\frac{(1-t)(\eta-\mu\sigma)}{t(1-\eta-\sigma)}\geqslant\frac{\eta-\mu\sigma}{t}\geqslant\frac{\beta}{\eta}>\beta\qquad t\in[\eta-\mu\sigma,\eta];$$

如果 $t\in[\eta,1)$,则

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)}=\frac{(1-t)(\eta-\mu\sigma)}{t(1-\eta-\sigma)}\geqslant\frac{\eta-\mu\sigma}{t}\geqslant\beta\qquad t\in[\eta,\eta+\sigma],$$

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)}=\frac{(1-t)(\eta-\mu\sigma)}{(1-t)(\eta+\sigma)}\geqslant\frac{\eta-\mu\sigma}{\eta+\sigma}\geqslant\beta\qquad t\in[\eta+\sigma,1]•$$

根据条件 1),对于所有的 $(t,\sigma)\in[0,1]\times[0,(\eta-\beta)/\mu]$ 有

$$\mu G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant\mu\beta G(\eta+\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma)•$$

另一方面,根据条件 2),我们有

(i) 如果 $0<t\leqslant\eta-\mu\sigma$, $(\eta-\beta)/\mu\leqslant\sigma<1-\eta$,则

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma)}\geqslant\frac{t(1-\eta+\mu\sigma)•\gamma(\eta+\sigma)}{t(1-\eta-\sigma)•\mu\gamma(\eta-\mu\sigma)}\geqslant\frac{1-\eta+\mu\sigma}{\mu(1-\eta-\sigma)}\geqslant\frac{1}{\mu};$$

(ii) 如果 $\eta-\mu\sigma\leqslant t\leqslant\eta+\sigma$, $(\eta-\beta)/\mu\leqslant\sigma<1-\eta$,则

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma)}\geqslant\frac{(1-t)(\eta-\mu\sigma)•\gamma(\eta+\sigma)}{t(1-\eta-\sigma)•\mu\gamma(\eta-\mu\sigma)}\geqslant\frac{1-t}{\mu(1-\eta-\sigma)}\geqslant\frac{1}{\mu};$$

(iii) 如果 $\eta+\sigma\leqslant t<1$, $(\eta-\beta)/\mu\leqslant\sigma<1-\eta$,则

$$\frac{G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)}{G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma)}\geqslant\frac{(1-t)(\eta-\mu\sigma)•\gamma(\eta+\sigma)}{(1-t)(\eta+\sigma)•\mu\gamma(\eta-\mu\sigma)}=\frac{1}{\mu}•$$

这就推出对于所有的 $(t,\sigma)\in[0,1]\times[(\eta-\beta)/\mu,1-\eta]$ 有

$$\mu G(t,\eta-\mu\sigma)h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant G(t,\eta+\sigma)h^-(\eta+\sigma)•$$

命题 3.2　如果

$$\mu h^+(\eta-\mu\sigma)\geqslant\phi(\sigma)h^-(\eta+\sigma)\qquad\sigma\in[0,1-\eta),$$

其中 $\phi(\sigma)=(\eta+\sigma)/(\eta-\mu\sigma)$,则假设(H$_2$)成立•

证明　事实上容易核验

$$\phi(\sigma)=\max_{0\leqslant t\leqslant1}G(t,\eta+\sigma)/G(t,\eta-\mu\sigma)\qquad\sigma\in[0,1-\eta)•$$

[参　考　文　献]

[1] Gelfand I M. Some problems in the theory of quasilinear equations[J]. Uspehi Mat Nauk, 1959, **14**(1): 87—158.

[2] Parter S. Solutions of differential equations arising in chemical reactor processes[J]. SIAM J Appl

Math, 1974, **26**(3): 687—716.

[3] Bebernes J W, Kassoy D R. A mathematical analysis of blowup for thermal reactions_the inhomogeneous case[J]. SIAM J Appl Math, 1981, **40**(2): 476—484.

[4] Aronson D, Crandall M G, Peletier L A. Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem[J]. Nonlinear Anal, 1982, **6**(10): 1001—1022.

[5] Chio Y S. A singular boundary value problem arising from near_ignition analysis of flame structure [J]. Differential Integral Equations, 1991, **4**(5): 891—895.

[6] Fink A M, Gatica J A, Hernandez G E. Eigenvalue of generalized Gelfand models[J]. Nonlinear Anal, 1993, **20**(12): 1453—1468.

[7] WANG Hai_yan. On the existence of positive solution for semilinear elliptic equations in annulus[J]. J Differential Equations, 1994, **109**(1): 1—7.

[8] Henderson J, WANG Hai_yan. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems[J]. J Math Anal Appl, 1997, **208**(1): 252—259.

[9] Hai D D. Positive solutions to a class of elliptic boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **227**(1): 195—199.

[10] Cac N P, Gatica J A, LI Yi. Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(4): 501—520.

[11] JIANG Xiu_fen, YAO Qing_liu. An existence theorem of positive solution for a semilinear two_point BVP with change sign[J]. Mathematica Applicata, 2001, **14**(3): 68—71.

[12] YAO Qing_liu. Positive solution of two_point boundary value problem for classical Emden equation with coefficient that changes sign[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2001, **3**(2): 107—111.

The Positive Solution of Classical Gelfand Model With Coefficient That Changes Sign

YAO Qing_liu

(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Economics, Nanjing 210003, P R China)

Abstract: The existence and iteration of positive solution for classical Gelfand models are considered, where the coefficient of nonlinear term is allowed to change sign in [0, 1]. By using the monotone iterative technique, an existence theorem of positive solution is obtained, corresponding iterative process and convergence rate are given. This iterative process starts off with zero function, hence the process is simple, feasible and effective.

Key words: Gelfand model; coefficient changed sign; positive solution; existence; monotone iterative technique