应用数学和力学, 第 23 卷 第 12 期(2002 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 12_1314_05

关于 Ishikawa 迭代程序稳定性的注释*

薛志群[1], 田 虹[2]

(1. 石家庄铁道学院 基础部, 石家庄 050043; 2. 石家庄市商业外事职业学校, 石家庄 050002)

(张石生推荐)

摘要: 在实一致光滑 Banach 空间中, 研究了一类具有值域有界、连续强伪压缩算子和连续强增生算子的 Ishikawa 迭代程序的稳定性; 给出了迭代程序中参数所满足的条件, 并证明了迭代过程的收敛性• 所得结果改进和扩展近期相关结果, 为进一步讨论带误差迭代程序的收敛性提供理论依据•

关 键 词: Ishikawa 迭代; 强伪压缩算子; 一致光滑 Banach 空间; 几乎 T_稳定
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

设 E 是实一致光滑 Banach 空间, $T: E \to E$• 假设 $x_0 \in E$, 定义 $x_{n+1} = f(T, x_n)$ 为一个迭代程序 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$• 进一步, 设 $F(T) = \{x \in E: Tx = x\} \neq \emptyset$, 且 $\{x_n\}$ 收敛于 $x^* \in F(T)$• 现在, 令 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 E 中的任意序列, $\varepsilon_n = \| y_{n+1} - f(T, y_n) \| \in \mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$• 如果 $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ 包含着 $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$, 则称迭代程序 $x_{n+1} = f(T, x_n)$ 为是 T_稳定的; 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ 包含着 $\lim_{n\to\infty} y_n = x^*$, 则称迭代程序 $x_{n+1} = f(T, x_n)$ 为几乎 T_稳定的•

最近, Zhou[1] 给出了有关稳定性结果•

定理 A 设 E 是实一致光滑 Banach 空间• $T: E \to E$ 是连续的强伪压缩算子, 且值域有界• 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $(0, 1)$ 中的实数列并满足:

(i) $0 < \alpha < \alpha_n, \quad n \geqslant 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} b(\alpha_n) = 0$•

其中 $b(\cdot)$ 为 Reich 不等式中函数•

任取 $x_0 \in E$, Ishikawa 迭代程序 $\{x_n\}_{n=\infty}^{\infty}$ 为:

$$
(\mathrm{Is}) \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T x_n \qquad n \geqslant 0• \end{cases}
$$

* 收稿日期: 1999_10_08; 修订日期: 2002_06_07
作者简介: 薛志群(1965—) , 男, 河北获鹿人, 副教授, 硕士(E_mail: jchb@sjzri.edu.cn) .

令$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$为E中序列,定义$\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathbf{R}^+$并有

$$\tau_n=(1-\beta_n)y_n+\beta_n Ty_n\qquad n\geqslant 0,$$
$$\varepsilon_n=\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)y_n-\alpha_n T\tau_n\|\qquad n\geqslant 0,$$

则 Ishikawa 迭代程序是 T_稳定的•

上述定理A 中条件“(iv) $b(\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$ 与(ⅰ) $0<\alpha<\alpha_n;\ n\geqslant 0$” 矛盾• 因为在 Reich 不等式

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x)\rangle+\max\{\|x\|,1\}\|y\|\cdot b\|y\|$$

中,令$x=0$,则有$\|y\|^2\leqslant\|y\|\cdot b(\|y\|)$,假设$\|y\|\neq 0$,有$\|y\|\leqslant b(\|y\|)$• 再设$\|y\|=\alpha_n$,则$\alpha_n\leqslant b(\alpha_n)$• 因此当$b(\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$,必有$\alpha_n\to 0(n\to\infty)$•

本文我们要给出定理A 及其它相关结论的正确形式• 为此引入以下引理

引理 1.1[2] 设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$,$\{b\}_{n=0}^{\infty}$和$\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$是3个非负实数列并满足不等式

$$a_{n+1}\leqslant\sqrt{(1-w_n)a_n^2+b_n}+c_n\qquad n\geqslant 0,$$

其中 $w_n\in[0,1)$, $w_n\to 0(n\to\infty)$, $b_n=O(w_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty}w_n=+\infty$及$\sum_{n=0}^{\infty}c_n<+\infty$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$•

引理 1.2[2] 设E是实一致光滑 Banach 空间• 则存在一个非减连续函数$b:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$满足

(ⅰ) $b(ct)\leqslant cb(t),\quad c\geqslant 1;$

(ⅱ) $\lim\limits_{t\to 0^+}b(t)=0;$

(ⅲ) $\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x)\rangle+\max\{\|x\|,1\}\|y\|b(\|y\|)\qquad\forall x,y\in E$•

上述不等式称为 Reich 不等式•

2 主 要 结 果

定理 2.1 设E是实一致光滑 Banach 空间,$T:E\to E$是连续、强伪压缩算子,且值域$R(T)$有界• 设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是$(0,1)$中的实数列并满足:

(ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0;$

(ⅱ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=+\infty$•

$\forall x_0\in E$, Ishikawa 迭代程序$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$定义为:

$$(\mathrm{Is})\quad\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Tz_n,\\ z_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n\qquad n\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

假设$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$为E中任意序列,$\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathbf{R}^+$且

$$\begin{cases}\tau_n=(1-\beta_n)y_n+\beta_n Ty_n\qquad n\geqslant 0\\ \varepsilon_n=\|y_{n+1}-(1-\alpha_n)y_n-\alpha T\tau_n\|\qquad n\geqslant 0\end{cases}\tag{2}$$

则 Ishikawa 迭代程序(Is)是几乎 T_稳定的•

证明　由[3]知,T 有唯一不动点,记为q• 因T 为强伪压缩的,对$\forall x,y\in E$,$\exists J(x-y)$使得

$$\langle Tx - Ty, J(x-y)\rangle \leqslant s\|x-y\|^2, \tag{3}$$

其中 $s = (1/t) \in (0, 1), t > 1$.

令 $D = \sup\{\|Tx - Tq\| + 1: x \in E\} + \|y_0 - q\|, M = D + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$. 利用数学归纳法得 $\|y_n - q\| \leqslant M, n \geqslant 0$.

令 $v_n = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T\tau_n, u_n = y_{n+1} - v_n$, 则有

$$y_{n+1} = v_n + u_n, \quad \|y_{n+1} - q\| \leqslant \|v_n - q\| + \varepsilon_n, \tag{4}$$

同时 $\|v_n - q\| \leqslant M$.

令 $d_n = \|J(y_n - q) - J(\tau_n - q)\|$, 则 $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

事实上, E 是一致光滑 Banach 空间, J 在有界集上是一致连续的. 而 $\|y_n - q\| \leqslant M$, $\|\tau_n - q\| \leqslant M$, 同时 $\|(\tau_n - q) - (y_n - q)\| = \|\tau_n - y_n\| \leqslant 2M\beta_n \to 0(n\to\infty)$, 因此 $d_n \to 0(n\to\infty)$.

应用引理 1.2, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\|v_n - q\|^2}{(1+\|y_n - q\|)^2} &= \left\|(1-\alpha_n)\frac{y_n - q}{1+\|y_n-q\|} + \alpha_n \frac{T\tau_n - Tq}{1+\|y_n - q\|}\right\|^2 \leqslant \\
&(1-\alpha_n)^2\frac{\|y_n - q\|^2}{(1+\|y_n - q\|)^2} + \\
&2\alpha_n(1-\alpha_n)\langle \frac{T\tau_n - Tq}{1+\|y_n-q\|}, J\frac{y_n - q}{1+\|y_n - q\|}\rangle + \\
&\max\left\{(1-\alpha_n)\frac{\|q_n - q\|}{1+\|y_n - q\|}, 1\right\}\times \\
&\alpha_n\frac{\|T\tau_n - Tq\|}{1+\|y_n-q\|} b\left(\alpha_n\frac{\|T\tau_n - Tq\|}{1+\|y_n - q\|}\right) \leqslant \\
&\frac{(1-\alpha_n)^2\|y_n - q\|^2}{(1+\|y_n-q\|)^2} + \\
&\frac{2\alpha_n(1-\alpha_n)}{(1+\|y_n - q\|)^2}\langle T\tau_n - Tq, J(y_n - q) - J(\tau_n - q)\rangle + \\
&\frac{2\alpha_n(1-\alpha_n)s}{(1+\|y_n-q\|)^2}\|\tau_n - q\|^2 + \frac{(M+1)^2\alpha_n b(\alpha_n)}{(1+\|y_n - q\|)^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

整理上式得:

$$\begin{aligned}
\|v_n - q\|^2 \leqslant &(1-\alpha_n)^2\|y_n - q\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)Md_n + \\
&2s\alpha_n(1-\alpha_n)\|\tau_n - q\|^2 + (M+1)^2\alpha_n b(\alpha_n).
\end{aligned} \tag{6}$$

从 τ_n 的定义中及引理 1.2 可得:

$$\begin{aligned}
\|\tau_n - q\|^2 \leqslant &\|y_n - q\|^2 + (M+1)^2\beta_n b(\beta_n) + \\
&2\beta_n(1-\beta_n)s\|y_n - q\|^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

将(7)代入(6)得:

$$\begin{aligned}
\|v_n - q\|^2 \leqslant &[1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + 2s\alpha_n(1-\alpha_n) + \\
&4s^2\alpha_n\beta_n(1-\alpha_n)(1-\beta_n)]\|y_n - q\|^2 + 2\alpha_n Md_n + \\
&2s\alpha_n\beta_n b(\beta_n)b(\beta_n)(M+1)^2 + (M+1)^2\alpha_n b(\alpha_n).
\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0(n\to\infty)$, 所以存在 N, 使得当 $n > N$ 时有,

$$\alpha_n + 4s^2\beta_n(1-\alpha_n)(1-\beta_n) < \frac{3}{2}(1-s),$$

这样(8)式在 $n > N$ 时,则有

$$\|v_n - q\|^2 \leqslant \left(1-\frac{1-s}{2}\alpha_n\right)\|y_n - q\|^2 + 2\alpha_n d_n M +$$
$$2\alpha_n\beta_n b(\beta_n)s(M+1)^2 + \alpha_n b(\alpha_n)(M+1)^2 \cdot \qquad (9)$$

将(9)式代入(4)式得:

$$\|y_{n+1} - q\| \leqslant \sqrt{(1-\alpha_n(1-s)/2)\|y_n - q\|^2 + b_n} + \varepsilon_n \qquad (n > N), \qquad (10)$$

其中 $b_n = 2\alpha_n d_n M + 2\alpha_n\beta_n b(\beta_n)s(M+1)^2 + \alpha_n b(\alpha_n)(M+1)^2$・ 这样(10)式符合引理1.1,因此 $\|y_n - q\| \to 0(n\to\infty)$・ 即 $y_n \to q(n\to\infty)$・ 故迭代程序是几乎T_稳定的・

定理2.2　设 E 是实一致光滑Banach空间,T: $E\to E$ 为连续、强增生算子,且(I−T)的值域有界・ 定义S: $E\to E$ 为 $\mathrm{S}x = f + x - \mathrm{T}x$・ 设 $\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$ 为(0,1)中两个实数列且满足:

(i) $\alpha_n \to 0,\ \beta_n \to 0,\ n\to\infty$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = +\infty$・

任取 $x_0 \in E$,Ishikawa迭代程序 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 定义为:

$$(\mathrm{Is})\quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n \mathrm{S}z_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n \mathrm{S}x_n \qquad n \geqslant 0 \cdot \end{cases}$$

设 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 E 中任意序列且定义 $\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbf{R}^+$ 为:

$$\tau_n = (1-\beta_n)y_n + \beta_n \mathrm{S}y_n \qquad n \geqslant 0,$$
$$\varepsilon_n = \|y_{n+1} - (1-\alpha_n)y_n - \alpha_n \mathrm{S}\tau_n\| \qquad n \geqslant 0 \cdot$$

则Ishikawa迭代程序 $\{x_n\}$ 是几乎S_稳定的・

证　由Deimling[4],任意给定 $f \in E$,方程 $\mathrm{T}x = f$ 有唯一解・ 记为 q,则 q 为S的唯一不动点・ 因为T为强增生,所以S为强伪压缩,定理的其它部分证明与定理2.1相同,省略・

注1　我们的定理2.1、2.2纠正了Zhou[1]的条件,同时给出了其结果是几乎T(或S)_稳定的,而不能得出T(或S)_稳定的结果・

注2　本文定理的条件"$\alpha_n \to 0(n\to\infty)$ 与 $b(\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$"是等价的・ 从而彻底澄清了二者的关系・ 这对目前有些文章所述: $b(\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$ 弱于 $\alpha_n \to 0(n\to\infty)$ 或 $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$ 弱于 $b(\alpha_n)\to 0(n\to\infty)$ 给出了肯定的回答・

[参　考　文　献]

[1] ZHOU Hai_yun. Stable iteration procedures for strong pseudocontractions and nonlinear equations involving accretive operators without Lipschitz assumption[J]. J Math Anal Appl, 1999, **230**(4): 1—10.

[2] Reich S. An iteration procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1978, **2**(1): 18—21.

[3] Deimling K. Zeros of accretive operators[J]. Manu Scripta Math, 1974, **13**(3): 365—374.

[4] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. New York/Berlin: Springer_Verlag 1985, 143—145.

[5] Osilike M O. Stability results for the Ishikawa fixed point procedures[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(5): 937—945.

[6] Osilike M O. Stable iteration procedures for strong pseudocontractions and nonlinear equations of the

accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(5): 677—682.

Remark on Stability of Ishikawa Iterative Procedures

XUE Zhi_qun[1], TIAN Hong[2]

(1. Department of Basic Science, Shijiazhuang Railway College, Shijiazhuang 050043, P R China;
2. Shijiazhuang Foreign Occupation Technology College, Shijiazhuang 050002, P R China)

Abstract: The stability of the Ishikawa iteration procedures was studied for one class of continuity strong pseudocontraction and continuity strongly accretive operators with bounded range in real uniformly smooth Banach space. Under parameters satisfying certain conditions, the convergence of iterative sequences was proved. The results improve and extend the recent corresponding results, and supply the basis of theory for further discussing convergence of iteration procedures with errors.

Key words: Ishikawa iteration; strongly pseudo_contractive operator; uniformly smooth Banach space; almost T_stable