应用数学和力学, 第 23 卷 第 11 期(2002 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1101_12

G _凸空间内新的聚合不动点定理及应用

丁协平[1], 朴忠烈[2]

(1 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066; 2 韩国釜山国立大学 数学系, 釜山 609_735)

(我刊编委丁协平来稿)

摘要: 由应用连续单位分解技巧和 Tychonoff 不动点定理对定义在非紧 G_凸空间的乘积空间上的一族集值映象证明了一些新的不动点定理 作为应用, 对 G_凸空间的乘积空间的一簇子集证明了Ky Fan 型非空交定理; 在 G_凸空间内给出了非线性不等式组解的一个存在定理和得到了一些抽象经济的平衡存在定理 这些定理改进和推广了很多最近文献中重要的已知结果

关 键 词: 聚合不动点; 非空交定理; 不等式组; 抽象经济; 广义凸空间
中图分类号: O177 92 文献标识码: A

引 言

1991 年 Tarafdar[1] 首先在拓扑矢量空间的非空紧凸子集的乘积空间上建立了下面的聚合不动点定理并给出对抽象经济平衡点存在性的应用

定理 1 设 $\{X_i\}_{i\ \ I}$ 是一簇非空紧凸子集, 每一 X_i 在拓扑矢量空间 E_i 中, 其中 I 是一(有限或无限) 指标集 设 $X = \ _{i\ \ I} X_i$ 对每一 $i \ \ I$, 令 $T: X \ \ 2^{X_i}$ 是一集值映象使得

( ) 对每一 $x \ \ X$, $T_i(x)$ 是 X_i 的非空凸子集,

( ) 对每一 $y_i \ \ X_i$, $T_i^{-1}(y_i) = \{x \ \ X: y_i \ \ T_i(x)\}$ 包含 X 的一相对开子集 O_{y_i} 使得
$$\ _{y_i\ \ X_i} O_{y_i} = X \quad (\text{对某些 } y_i,\ O_{y_i} \text{ 可以是空集})$$

则存在 $x \ \ T(x) = \ _{i\ \ I} T_i(x)$, 即对每一 $i \ \ I$, $x_i \ \ T_i(x)$, 其中 $x_i = P_i(x)$ 和 P_i 是X 到X_i 上的投影

1998 年, 1999 和 2000 年, Lan 和 Webb[2], Ansari 和 Yao[3], Singh, Tarafdar 和 Watson[4] 分别在拓扑矢量空间内不同假定下得到了定理 1 的一些非紧推广并给出了对乘积空间子集簇的非空交定理; 不等式组和抽象经济平衡存在性的某些应用

另一方面, 1992 年 Tarafdar[5] 推广了他的定理(定理 1) 到没有线性结构的 H_空间并给出了对H_截口定理和抽象经济平衡存在性定理的应用 1996 和 1998 年, Chang 等[6], Lin 和

收稿日期: 2001_06_12; 修订日期: 2002_07_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059); 韩国工程科学基金和四川省教育厅重点科研基金资助项目([2000]25); 韩国研究基金资助项目(1998_15_D00021)
作者简介: 丁协平(1938), 男, 四川自贡人, 教授; (E_mail: dingxip@sicnu.edu.cn)
朴忠烈(1945), 男, 韩国釜山人, 教授

Park[7], 由使用 Fan_Browder 型不动点定理, 在 H_空间的非紧设置下得到了某些聚合不动点定理 但是 Fan_Browder 不动点技巧不能应用于处理指标集 I 是无限的情形, 其主要困难在于无限多个开集的交可以不是开的 因此在[6, 7] 中的结果不是 Tarafdar[1,5] 的结果到 H_空间和 G_凸空间的真推广 1999 年 Park[8] 在紧 G_凸空间内证明了一个聚合不动点定理推广了在[1, 5] 中的Tarafdar 的不动点定理到紧 G_凸空间 因此正确推广Tarafdar 在[1, 5] 中的聚合不动点定理到非紧 G_凸空间仍然是待解决的问题

在本文中, 使用连续单位分解技巧和 Tychonoff 不动点定理, 我们首先对定义在非紧 G_凸空间的乘积空间上的一簇集值映象证明了某些新的聚合不动点定理 这些定理改进、统一和推广前面提及的聚合不动点定理 作为应用, 对 G_凸空间的乘积空间的子集簇证明了某些 Ky Fan 型非空交定理; 给出了不等式组的解的存在定理和建立了抽象经济的某些平衡存在性定理 我们的结果推广了最近文献中的很多重要已知结果

1 预 备 知 识

令 X 和 Y 是非空集 用 $\mathscr{F}(X)$ 和 2^Y 分别表 X 的一切非空有限子集的簇和 Y 的一切子集的簇 对每一 A $\mathscr{F}(X)$, $|A|$ 表 A 的基数 令 $_n$ 是 n_维标准单型其顶点为 $e_0, e_1,$ $, e_n$ 如果 J 是 $\{0, 1,$ $, n\}$ 的非空子集, 用 $_J$ 表顶点 $\{e_j : j$ $J\}$ 的凸包 称拓扑空间 X 的子集 A 在 X 内是紧开的(紧闭的), 如果对 X 的每一非空紧子集 K, A K 在 K 内是开的(闭的) 下面概念由 Ding[9, 10] 引入 对任意给定的 X 的子集 A, 定义 A 的紧内部 $\mathrm{cint}(A)$ 和紧闭包 $\mathrm{ccl}(A)$ 如下:

$$\mathrm{cint}(A) = \quad \{B \quad X : B \quad A \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内紧开}\},$$

$$\mathrm{ccl}(A) = \quad \{B \quad X : A \quad B \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内紧闭}\}$$

易知 $\mathrm{cint}(A)$ ($\mathrm{ccl}(A)$) 在 X 内是紧开(紧闭) 的且对 X 的任何非空紧子集 K, A K , 有 $\mathrm{cint}(A)$ $K =$ $\mathrm{int}_K(A$ $K)$ 和 $\mathrm{ccl}(A)$ $K =$ $\mathrm{cl}_K(A$ $K)$ 其中 $\mathrm{int}_K(A$ $K)$ 和 $\mathrm{cl}_K(A$ $K)$ 分别表 A K 在 K 中的内部和闭包 显然, X 的一子集 A 在 X 内是紧开(紧闭) 的当且仅当 $\mathrm{cint}(A) = A$ ($\mathrm{ccl}(A) = A$)

熟知拓扑空间 X 的一子集被称为 k_test 集如果它与 X 的每一非空紧子集 K 的交在 K 中是闭的 称拓扑空间 X 为 k_空间如果每一 k_test 集在 X 内是闭的(或者等价地, X 的一子集 B 在 X 内是开的当且仅当 B 是紧开的), 见 Wilansky[11, p142] 或 Dugunji[12, p248] 或 Husain[13, pp171~172] 然而存在不是 k_空间的拓扑空间 R^R 是拓扑空间, 但不是 k_空间, 见 Kelley[14, p240] 或 Wilansky[11, p143] 两个 k_空间的乘积不必是一 k_空间, 见 Husain[13, p174] 因此紧开(紧闭) 集概念和集的紧内部(紧闭包) 概念是一般拓扑空间内开(闭) 集和集的内部(闭包) 概念的真推广

广义凸(或 G_凸) 空间概念首先 Park 和 Kim[15, 16] 在一个多余的保序条件下引入 最近 Lin 和 Park[7] 和 Park[8] 去掉了此多余的条件, 给出了 G_凸空间的下面定义

一个 G_凸空间(X,) 由一个拓扑空间和一个集值映象 : $\mathscr{F}(X)$ $2^X \setminus \{ \}$ 组成满足对每一 A $\mathscr{F}(X)$, $|A| = n + 1$, 存在连续映象 $_A$: $_n$ (A) 使得 B $\mathscr{F}(A)$, $|B| = |J| + 1$ 蕴含 $_A($ $_J)$ (B), 其中 $_J$ 表 $_n$ 的对应于 B 的面 称 G_凸空间(X,) 的子集 D 是 G_凸的如果对每一 A $\mathscr{F}(D)$, (A) D 定义 D 的 G_凸包为

$$G\_\mathrm{co}(D) = \quad \{B \quad X : D \quad B \text{ 和 } B \text{ 是 } G\text{\_凸的}\}$$

我们注意到修改过的 G_凸空间恰好和 Ben_El_Mechkieakh[17] 定义的 L_凸空间一致

2 聚合不动点定理

在本节中，我们将在更弱的强制条件下推广前面提到的聚合不动点定理到非紧 G_凸空间

下面令 I 是一有限或无限指标集和令 $\{(X_i, \Gamma_i)\}_{i\in I}$ 是一簇 G_凸空间 令 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 和 $X^i = \prod_{j\in I, j\neq i} X_j$ 对每一固定的 $i\in I$ 和 $x\in X$，记 $x = (x_i, x^i) = (x_i)_{i\in I}$ 其中 x_i 和 x^i 分别表 x 到 X_i 和 X^i 上的投影

定理 2.1 令 $\{(X_i, \Gamma_i)\}_{i\in I}$ 是一簇 G_凸空间其中 I 是一(有限或无限)指标集 对每一 $i\in I$，令 $F_i, G_i: X^i \to 2^{X_i}$ 是集值映象使得下列条件成立:

(i) 对每一 $x^i\in X^i$ 和 $N_i\in \mathscr{F}(F_i(x^i))$，$\Gamma(N_i)\subset G_i(x^i)$，

(ii) 对 X^i 的每一非空紧子集 K^i，$K^i = \bigcup_{y_i\in X_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cap K^i)$，

(iii) 存在 X_i 的非空子集 $X_{i,0}$ 使得对每一 $N_i\in\mathscr{F}(X_i)$，存在 X_i 的紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 $(X_{i,0}\cup N_i)$ 且集 $D^i = \bigcap_{y_i\in X_{i,0}}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^c$ 在 X^i 内是空的或紧的，其中 $(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^c$ 表 $\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)$ 的补集

则存在一点 $\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i)\in X$ 使得对每一个 $i\in I$，$\hat{x}_i\in G_i(\hat{x}^i)$

证明 对每一固定的 $i\in I$，如果 $D^i = \bigcap_{y_i\in X_{i,0}}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^c$ 是空的，则我们有

$$X^i = X^i\setminus D^i = \bigcup_{y_i\in X_{i,0}}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i) \tag{1}$$

如果 D^i 是非空和紧的，由条件(ii)，有

$$D^i = \bigcup_{y_i\in X_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cap D^i)\subset\bigcup_{y_i\in X_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)$$

因为 D^i 是紧的，存在一有限集 $N_i = \{y_{i0}, y_{i1}, \cdots, y_{in_i}\}\in\mathscr{F}(X_i)$ 使得

$$D^i = \bigcap_{y_i\in X_{i,0}}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^c\subset\bigcup_{k=0}^{n_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_{ik})$$

由此推得

$$X^i = \bigcup_{y_i\in X_{i,0}}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cup\Big(\bigcup_{k=0}^{n_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_{ik})\Big) \tag{2}$$

因此在 D^i 是空的或非空紧的两种情形下，我们总有(2)式成立 由条件(iii)存在 X_i 的紧 G_凸子集 L_{N_i} 使得 $X_{i,0}\cup N_i\subset L_{N_i}$ 且因此由(2)，得到

$$X^i = \bigcup_{y_i\in L_{N_i}}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i) \tag{3}$$

令

$$L_N = \prod_{i\in I}L_{N_i} \text{ 和 } L_N^i = \prod_{j\in I, j\neq i}L_{N_j},$$

则 L_N^i 是 X^i 的紧子集 由(3)，我们有对每一 $i\in I$，

$$L_N^i\subset\bigcup_{y_i\in L_{N_i}}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)$$

因此存在

$$M_i = \left\{ z_{i0}, z_{i1}, \quad , z_{im_i} \right\} \quad \mathscr{A}(L_{N_i})$$

使得

$$L_N^i = \sum_{k=0}^{m_i} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i) \quad L_N^i) \tag{4}$$

因 L_{N_i} 也是一 G_凸空间, 存在连续映象

$$_{M_i}: \quad _{m_i} \qquad _i(M_i)$$

使得

$$_{M_i}(\quad _J) \qquad _i(B_i), \quad B_i \quad \mathscr{F}(M_i), \mid B_i \mid = \mid J \mid + 1 \tag{5}$$

由(4), 我们能假设$\left\{ \quad _{ik} \right\}_{k=0}^{m_i}$是从属于开覆盖$\left\{ \mathrm{cint} F_i^{-1}(z_{ik}) \quad L_N^i \right\}_{k=0}^{m_i}$的连续单位分解使得

( ) 对每一 $k = 0, 1, \quad , m_i, \quad _{ik}: L_N^i \quad [0, 1]$ 是连续的,

( ) 对每一 $k = 0, 1, \quad , m_i$ 和 $x^i \quad L_N^i, \quad _{ik}(x^i) \quad 0 \quad x^i \quad \mathrm{cint} F_i^{-1}(z_{ik}) \quad z_{ik} \quad F_i(x^i)$,

( ) 对每一 $x^i \quad L_N^i, \sum_{k=0}^{m_i} \ _{ik}(x^i) = 1$

对每一 $i \quad I$, 定义映象 $_i: L_N^i \qquad _{m_i}$ 如下

$$_i(x^i) = \sum_{k=0}^{m_i} \ _{ik}(x^i) e_{ik}, \quad x^i \quad L_N^i$$

其中$\left\{ e_{ik}: k = 0, 1, \quad , m_i \right\}$是 m_i_维标准单型 $_{m_i}$ 的顶点 则 $_i$ 是连续的且对每一 $x^i \quad L_N^i, \quad _i(x^i) = \sum_{k \quad J(x^i)} \ _{ik}(x^i) e_{ik} \qquad _{J(x^i)}$ 其中 $J(x^i) = \left\{ k \quad \left\{ 0, 1, \quad , m_i \right\} : \ _{ik}(x^i) \quad 0 \right\}$ 由性质( ), 有

$$\left\{ z_{ik}: k \quad J(x^i) \right\} \quad \mathscr{A}(F_i(x^i))$$

定义映象 $f_i: L_N^i \quad L_{N_i}$ 如下: $f_i = \ _{M_i} \quad _i$, 则由(5)和条件( ), 得到

$$f_i(x^i) = \ _{M_i} \quad _i(x^i) \qquad _{M_i}(\quad _{J(x^i)}) \qquad (\left\{ z_{ik}: k \quad J(x^i) \right\}) \quad G_i(x^i) \tag{6}$$

现在定义 $D = \ _{i \quad I} \ _{m_i}$ 对每一 $i \quad I$, 令 E_i 是$\left\{ e_{ik}: k = 0, 1, \quad , m_i \right\}$的线性包, 则 E_i 是一局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间, 因为它是有限维的且 $_{m_i}$ 是 E_i 的紧凸子集 令 $E = \ _{i \quad I} E_i$, 则 E 也是局部凸 Hausdorff 拓扑矢量空间和 D 是 E 的紧凸子集 定义连续映象 $: D \quad L_N$ 和 $: L_N \quad D$ 如下:

$$(t) = \ _{i \quad I} \ _{M_i}(P_i(t)), \quad t \quad D \text{ 和 } \quad (x) = \ _{i \quad I} \ _i(x^i), \quad x = (x_i, x^i) \quad L_N,$$

其中 $P_i: D \qquad _{m_i}$ 是 D 到 $_{m_i}$ 上的投影 由 Tychonoff 不动点定理[18], 连续映象 $: D \quad D$ 有一不动点 $t \quad D$, 即 $t = \qquad (t)$ 令 $\hat{x} = \quad (t)$, 则有

$$\hat{x} = \qquad (\hat{x}) = \quad (\ _{i \quad I} \ _i(\hat{x}^i)) =$$

$$_{i \quad I} \ _{M_i}(p_i(\ _{i \quad I} \ _i(x^i))) = \ _{i \quad I} \ _{M_i} \quad _i(\hat{x}^i)$$

从(6) 式推得对每一 $i \quad I$,

$$\hat{x}_i = \ _{M_i} \quad _i(\hat{x}^i) \quad G(\hat{x}^i)$$

证毕

注 2 1 1) 显然下面任何一个条件蕴含条件( ) 成立:

$(\ )_1$对每一 $x^i \quad X^i$, G_co$(F_i(x^i)) \quad G_i(x^i)$,

$(\ )_2$对每一 $x^i \quad X^i$, $F_i(x^i) \quad G_i(x^i)$和 $G_i(x^i)$ 是 G_凸的

2) 根据 Ding[19] 的引理 2 1, 定理 3 1 的假设( ) 能用下列条件中任何一个条件替代:

$(\ )_1$对每一 $i \quad I$, F_i 有紧局部交性质,

$(\ )_2$对每一 $i \quad I$, F_i^{-1} 是转移紧开值的,

$(\ )_3$对每一 $i \quad I$, 每一 $y_i \quad X_i$ 和每一X^i 的紧子集K^i, 存在 X^i 的开子集 O_{y_i}(对某些 y_i, 它可以是空的) 使得 $O_{y_i} \quad K^i \quad F_i^{-1}(y_i)$且 $K^i = \ _{y_i \quad X_i}(O_{y_i} \quad K^i)$,

$(\ )_4$对每一 $i \quad I$, 和 $y_i \quad X_i$, $F_i^{-1}(y_i)$在 X^i 内是紧开的

系2 1　令$\left\{(X_i, \quad _i)\right\}_{i \quad I}$是一簇$G$_凸空间和对每一$i \quad I$, 令 $F_i: X^i \quad 2^{X_i}$是集值映象使得

( ) 对 X^i 的每一非空紧子集K^i, $K^i = \ _{y_i \quad X_i}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i) \quad K^i)$,

( ) 存在 X_i 的非空子集$X_{i,0}$使得对每一 $N_i \quad \mathscr{F}(X_i)$存在 X_i 的紧G_凸子集L_{N_i}包含$(X_{i,0} \quad N_i)$, 且 $D^i = \ _{y_i \quad X_{i,0}}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 是空的或紧的

则存在$\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i) \quad X$ 使得对每一$i \quad I$, $\hat{x}_i \quad G_\mathrm{co}(F_i(\hat{x}^i))$如果进一步假设

( ) 对每一 $x^i \quad X^i$, $F_i(x_i)$是 G_凸的,

则对每一 $i \quad I$, $\hat{x}_i \quad F_i(\hat{x}^i)$

证明　对每一 $i \quad I$, 定义集值映象 $G_i: X^i \quad 2^{X_i}$为$G_i(x^i) = G_\mathrm{co}(F_i(x^i))$, $\quad x^i \quad X^i$　则有 $F_i(x^i) \quad G_i(x^i)$和 $G_i(x^i)$是 G_凸的且因此定理2. 1 的条件( )被满足　条件( )和( )分别蕴含定理2 1的条件( )和( )成立　由定理2 1, 存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i) \quad X$ 使得对每一$i \quad I$, $\hat{x}_i \quad G_i(\hat{x}^i) = G\_\mathrm{co}(F_i(\hat{x}^i))$　如果条件( )被满足, 则最后结论显然成立

注2 2　定理2 1和系 2 1, 在更弱的假设下推广了Lan 和 Webb[2] 的定理 211 和定理21 2 从拓扑矢量空间到 G_凸空间#

在定理 211 和系 211 中, 如果对每一 $i\ I\ X$, 映象 F_i 和 G_i 的定义域X^i 被X 替代, 则由使用相同的论证方法, 我们能证明下面结果#

定理 212　设$\left\{(X_i, \#_i)\right\}_{i I\ I}$是一簇 G_凸空间其中I 是一(有限或无限)指标集#　对每一 $i\ I\ I$, 令 F_i, $G_i: X\ y\ 2^{X_i}$是两个集值映象使得

( ) 对每一 $x\ I\ X$ 和$N_{i\ I}\ \mathscr{A}(F_i(x))$, $\#_i(N_i) < G_i(x)$,

( ) 对 X 的每一非空紧子集K, $K = \mathrm{G}_{y_i I X_i}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)\ HK)$,

( ) 存在 X_i 的非空子集$X_{i,0}$使得对每一$N_{i\ I}\ \mathscr{F}(X_i)$, 存在 X_i 的紧 G_凸子集L_{N_i}包含$(X_{i,0}\ \mathrm{G}\ N_i)$和集 $D = \mathrm{H}_{y_i I X_{i,0}}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 在X 内是空的或紧的其中$(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 表 $\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$在 X 中的补集#

则存在$\hat{x}\ I\ X$ 使得对每一$i\ I\ I$, $\hat{x}_{i\ I}\ G_i(\hat{x})\#$

系 212　令$\left\{(X_i, \#_i)\right\}_{i I\ I}$是一簇 G_凸空间#　对每一 $i\ I\ I$, 令 $F_i: X\ y\ 2^{X_i}$是集值映象使得

( ) 对 X 的每一非空紧子集K, $K = \mathrm{G}_{y_i I X_i}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)\ HK)$,

( ) 存在 X_i 的非空子集$X_{i,0}$使得对每一 $N_{i\ I}\ \mathscr{F}(X_i)$, 存在 X_i 的紧 G_凸子集L_{N_i}包含$(X_{i,0}\ \mathrm{G}\ N_i)$, 且集 $D = \mathrm{H}_{y_i I X_{i,0}}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))$是空的或紧的#

则存在$\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i I\ I\ I}\ X$ 使得对每一$i\ I\ I$, $\hat{x}_{i\ I}\ G\_\mathrm{co}(F_i(\hat{x}))$,

注 213　定理 212 和系 212 在更弱的假设下改进和推广了Ansari 和 Yao[3] 的定理 1 从拓扑矢量空间到无

线性结构的 G_凸空间#

系 213　设 $\{(X_i, \#_i)\}_{i I I}$ 是一簇紧 G_凸空间其中 I 是一(有限或无限) 指标集# 令 $X = \underset{i I I}{7} X_i$ 和对每一 $i I I$, 令 F_i, G_i: X y 2^{X_i} 是两个集值映象使得定理 212 的条件( ) 和( ) 成立# 则存在 $\hat{x} = (x_i)_{i I I} I$ X 使得对每一 $i I I$, $\hat{x}_i I$ $G_i(\hat{x})$#

证明　因为对每一 $i I I$, X_i 是紧 G_凸空间, 对每一 $i I I$ 和 $N_i I$ $\mathscr{F}(X_i)$, 令 $X_{i,0} = L_{N_i} = X_i$, 则从条件( ) 推得 $X = \underset{y_i I X_i}{G} \mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$ 且因此对每一 $i I I$,

$$D = \underset{y_i I X_{i,0}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c = \underset{y_i I X_i}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c = X \setminus \underset{y_i I X_i}{G} \mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i) = \quad \#$$

结论从定理 212 推得

注 214　系 213 是 Park[8] 的定理 3, 顺次推广了 Tarafdar[5] 的定理 311 和 Tarafdar 在[1] 中的不动点定理(定理 1)# 容易看出定理 211 和 212, 系 211 和 212 改进、统一和推广了[1～ 8] 中相应的聚合不动点定理到没有线性结构的 G_ 凸空间且我们的假设更弱#

定理 213　$\{X_i\}_{i I I}$ 是一簇非空凸集, 每一 X_i 在一拓扑矢量空间 E_i 中, 其中 I 是一(有限或无限) 指标集, 对每一 i I I, 令 F_i, G_i: X^i y 2^{X_i} 是集值映象使得

( ) 对每一 x^i I X^i 和 N_i I $\mathscr{A}(F_i(x^i))$, $\mathrm{co}(N_i) < G_i(x^i)$,

( ) 对 X^i 的每一非空紧子集 K^i, $K^i = \underset{y_i I X_i}{G} \mathrm{cint}(F_i^{-1}(y_i)\ H\ K^i)$,

( ) 存在非空子集 $X_{i,0}$ 被包含在 X_i 的一紧凸子集 $X_{i,1}$ 内使得 $D^i = \underset{y_i I X_{i,0}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 在 X^i 内是空的或紧的#

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i)$ I X 使得对每一 i I I, $\hat{x}_i$ I $G_i(\hat{x}^i)$#

证明　对每一 i I I, 定义 $\#_i$: $\mathscr{F}(X_i)$ y 2^{X_i} 如下: $\#_i(N_i) = \mathrm{co}(N_i)$, $P N_i$ I $\mathscr{F}(X_i)$, 则每一 $(X_i, \#_i)$ 变成一 G_凸空间# 条件( ) 和( ) 蕴含定理 211 的条件( ) 和( ) 成立# 对每一 i I I 和 N_i I $\mathscr{F}(X_i)$, 令 $L_{N_i} = \mathrm{co}(X_{i,1}\ G\ N_i)$# 因 $X_{i,1}$ 是紧凸集, 所以每一 L_{N_i} 也是 X_i 的紧凸子集且包含 $X_{i,0}\ G\ N_i$# 由( ), 定理 211 的条件( ) 也被满足# 由定理 211, 存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i)$ I X 使得对每一 i I I, $\hat{x}_i$ I $G_i(\hat{x}^i)$#

由使用定理 212 和与定理 213 的证明相类似的论证, 我们能容易地证明下面结果#

定理 214　令 $\{X_i\}_{i I I}$ 是一簇非空凸子集, 每一 X_i 在一拓扑矢量空间 E_i 中, 对每一 i I I, 令 F_i, G_i: X y 2^{X_i} 使得

( ) 对每一 x I X 和 N_i I $\mathscr{F}(F_i(x))$, $\mathrm{co}(N_i) < G_i(x)$,

( ) 对 X 的每一紧子集 K, $K = \underset{y_i I X_i}{G} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)\ H\ K)$,

( ) 存在 X_i 的非空子集 $X_{i,0}$ 被包含在 X_i 的一紧凸子集 $X_{i,1}$ 中使得集 $D^i = \underset{y_i I X_{i,0}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 在 X 内是空的或紧的#

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i I I}$ I X 使得对每一 i I I, $\hat{x}_i$ I $G_i(\hat{x})$#

注 215　1) 如果 $I = \{1\}$, 则易知定理 214 化归 Tarafdar[20] 的不动点定理(也见[4] 中定理 111)#

2) 易知定理 214 进一步改进了 Singh, Tarafdar 和 Waston[4] 的定理 21 1#

3) 定理 213(或定理 214) 的条件( ) 等价于下列条件#

( )c 存在 X_i 的非空紧凸子集$X_{i,1}$ 使得集 $D_i^C = \underset{y_i I X_{i,1}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 在X^i (或X) 内是空的或紧的#

仅需对定理2.3 的情形给出证明# 由条件( )c] 条件( )是明显的(由令$X_{i,0} = X_{i,1}$, P i I I)# 现在设条件( ) 成立# 对每一 i I I, 任取 $X_{i,1}$ 的一非空子集 $X_{i,0}$, 我们有

$$D_i^C = \underset{y_i I X_{i,1}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c < \underset{y_i I X_{i,0}}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c = D_i \#$$

则 D_i^C 或空或非空, 如果 D_i^C X , 则 D_i^C 是紧子集D_i 的非空闭子集且因此它也是紧的# 故条件( )c 被满足#

定理2.5 令$\{X_i\}_{iII}$ 是一簇非空凸子集, 每一X_i 在一拓扑矢量空间E_i 中# 对每一i I I, 令 $F_i: X^i$ y 2^{X_i} 是一集值映象使得

( ) 对每一x^i I X^i, 或 G_co$(F_i(x^i)) < G_i(x^i)$, 或 $F_i(x^i) < G_i(x^i)$ 和 $G_i(x^i)$ 是 G_凸的,

( ) 对 X^i 的每一非空紧子集K^i, $K^i = \underset{y I X_i}{G} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)\ H\ K^i)$,

( ) 存在 X_i 的非空紧凸子集C_i 和X^i 的一非空紧子集$D(i)$ 使得对每一x^i I $X^i \setminus D(i)$, 存在 y_i I C_i 满足x^i I $\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$#

则存在$\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i)$ I X 使得对每一i I I, $\hat{x}_i$ I $G_i(\hat{x}^i)$#

证明 显然条件( )和( )蕴含定理2.3 的条件( )和( )成立、由条件( ), 对每一 x^i I $X^i \setminus D(i)$, 存在 y_i I C_i 满足x^i I $\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$ 且因此 x^i I $(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$# 这蕴含 $D_i^C = \underset{y_i I C_i}{H} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c < D(i)$# 如果 D_i^C 是非空的, 则它是紧子集 $D(i)$ 的一闭子集且因此它也是紧的# 因此在注2.5, 3) 中的条件( )c 被满足# 定理2.5 的结论从定理2.3 推得#

注2.6 容易看出 Lan 和 webb[2] 的定理2.1 是定理2.5 的一个很特殊的情形# 类似地我们能容易的得到 Ansari 和 Yao[3] 的定理1 的改进# 我们省略#

3 应 用

在本节中, 我们给出我们的聚合不动点定理对 Ky Fan 型非空交定理, 不等式组和抽象经济平衡问题的某些应用#

定理3.1 令$\{(X_i, \#_i)\}_{iII}$ 是一簇G_凸空间# 令$\{A_i\}_{iII}$ 和$\{B_i\}_{iII}$ 是$X = \underset{iII}{7} X_i$ 的两子集簇使得对每一 i I I,

( ) 对每一x^i I X^i, N_i I $\mathscr{F}(\{y_i$ I $X_i: (y_i, x^i)$ I $A_i\})$ 蕴含

$$\#_i(N_i) < \{y_i\ I\ X_i: (y_i, x^i)\ I\ B_i\},$$

( ) 对 X^i 的每一非空紧子集K^i,

$$K^i = \underset{y_i I X_i}{G} (\mathrm{cint}\{x^i\ I\ X^i: (y_i, x^i)\ I\ A_i\}\ H\ K^i),$$

( ) 存在X_i 的非空子集$X_{i,0}$ 使得对每一N_i I $\mathscr{F}(X_i)$, 存在X_i 的紧G_凸子集L_{N_i} 包含$(X_{i,0}$ G $N_i)$, 且集 $\underset{y_i I X_{i,0}}{H} \mathrm{ccl}\{x^i\ I\ X^i: (y_i, x^i)\ I\ A_i\}$ 是空的或紧的# 则 $\underset{iII}{H} B_i$ X #

证明 对每一 i I I, 定义集值映象 F_i, $G_i: X^i$ y 2^{X_i} 如下,

$$F_i(x^i) = \{y_i\ I\ X_i: (y_i, x^i)\ I\ A_i\},$$

$$G_i(x^i) = \left\{ y_i \in X_i : (y_i, x^i) \in B_i \right\}。$$

由条件( )和( ),易检验定理211的条件( )和( )成立,由条件( )和F_i的定义,我们有

$$\bigcap_{y_i \in X_{i,0}} (\operatorname{cint} F_i^{-1}(y_i))^c = \bigcap_{y_i \in X_{i,0}} \left(X^i \setminus \operatorname{cint}\left\{ x^i \in X^i : (y_i, x^i) \in A_i \right\}\right) =$$

$$\bigcap_{y_i \in X_{i,0}} \operatorname{ccl}\left\{ x^i \in X^i : (y_i, x^i) \in A_i \right\}$$

是空的或紧的且因此定理211的条件( )也被满足,由定理211,存在$\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i) \in X$使得对每一$i \in I$,$\hat{x}_i \in G_i(\hat{x}^i) = \left\{ y_i \in X_i : (y_i, \hat{x}^i) \in B_i \right\}$,由此推得对每一$i \in I$,$\hat{x} \in B_i$和$\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$。

系311 令$\left\{ (X_i, \#_i) \right\}_{i \in I}$是一簇$G$-凸空间和$\left\{ A_i \right\}_{i \in I}$是$X = \prod_{i \in I} X_i$的子集簇使得对每一$i \in I$,

( ) 对每一$x^i \in X^i$,$\left\{ y_i \in X_i : (y_i, x^i) \in A_i \right\}$是$G$-凸集,

( ) 定理311的条件( )和( )成立

则$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$。

证明 对每一$i \in I$,令$B_i = A_i$,则由条件( ),定理311的条件( )成立,系311的结论从具有$A_i = B_i$,$i \in I$,的定理311推得。

注311 定理311在更弱的假设下推广了Shih和Tan[21]的定理2,Ky Fan[22]的定理16,Ma[23]的定理2从拓扑矢量空间到G-凸空间。

定理312 令$\left\{ (X_i, \#_i) \right\}_{i \in I}$是一簇$G$-凸空间和$\left\{ A_i \right\}_{i \in I}$是$X = \prod_{i \in I} X_i$的一簇子集使得对每一$i \in I$,

( ) 对X^i的每一非空紧子集K^i,

$$K^i = \bigcup_{y_i \in X_i} \left(\operatorname{cint}\left\{ x^i \in X^i : (y_i, x^i) \in A_i \right\} \cap K^i\right),$$

( ) 存在X_i的非空子集$X_{i,0}$使得对每一$N_i \in \mathscr{F}(X_i)$,存在X_i的紧G-凸子集L_{N_i}包含$(X_{i,0} \cup N_i)$和集$\bigcap_{y_i \in X_{i,0}} \operatorname{ccl}(G_\mathrm{co}\left\{ x^i \in X^i : (y_i, x^i) \notin A_i \right\})$是空的或紧的。则存在$\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i) \in X$使得对每一$i \in I$,$\hat{x}_i \in G\_\mathrm{co}(\left\{ y_i \in X_i : (y_i, x^i) \in A_i \right\})$。

如果进一步假设$\left\{ B_i \right\}_{i \in I}$是$X$的一簇子集使得

( ) 对每一$x \in X$,存在$I(x) \subset I$使得对每一$i \in I(x)$,

$$G\_\mathrm{co}\left\{ y_i \in X_i : (y_i, x^i) \in A_i \right\} \subset \left\{ y_i \in X : (y_i, x^i) \in B_i \right\}。$$

则存在$\hat{x} \in X$使得$\bigcap_{i \in I(\hat{x})} B_i \neq \emptyset$。

证明 对每一$i \in I$,定义集值映象$F_i : X^i \to 2^{X_i}$如下,

$$F_i(x^i) = \left\{ y_i \in X_i : (y_i, x^i) \in A_i \right\}, \quad \forall x^i \in X^i。$$

由条件( )和( ),易知系211的条件( )和( )被满足。由系211,存在$\hat{x} = (\hat{x}_i, \hat{x}^i) \in X$使得

$$\hat{x}_i \in G\_\mathrm{co}(F_i(\hat{x}^i)) = G\_\mathrm{co}(\left\{ y_i \in X_i : (y_i, \hat{x}^i) \in A_i \right\}), \quad \forall i \in I。$$

如果进一步假设条件( )成立,则对$\hat{x} \in X$,我们有$\hat{x}_i \in \left\{ y_i \in X_i : (y_i, \hat{x}^i) \in B \right\}$,$\forall i \in I(\hat{x})$且因此$\bigcap_{i \in I(\hat{x})} B_i \neq \emptyset$。

注312 定理312从下列两方面推广了Lan和Webb[2]的定理213和定理214: 1) 条件( )比[2]中定理213

的条件(S_1)和(S_2)更弱; 2) 强制条件( ) 也弱于[2]中定理213的条件(S_3)# 因此定理312顺次从几个方面推广了Ky Fan[22]的定理15和Shih和Tan[21]的定理5#

定理313 令$\{(X_i, \#_i)\}_{i I I}$是一簇G_凸空间# 令$\{f_i\}_{i I I}: X\ y\ R$是实函数簇和$\{t_i\}_{i I I}$是实数簇使得对每一$i\ I\ I$,

( ) 对每一$x^i\ I\ X^i$, 集$\{y_i\ I\ X_i: f_i(y_i, x^i) > t_i\}$是$G$_凸的,

( ) 对每一非的非空紧子集K^i,

$$K^i = G_{y_i I X_i}(\mathrm{cint}\{x^i\ I\ X^i: f_i(y_i, x^i) > t_i\}\ H\ K^i),$$

( ) 存在X_i的非空子集$X_{i,0}$使得对每一$N_i\ I\ \mathscr{F}(X_i)$, 存在X_i的一紧G_凸子集$X_{i,1}$包含$(X_{i,0}\ G\ N_i)$且集$H_{y I X_{i,0}}$ $\mathrm{ccl}\{x^i\ I\ X^i: f_i(y_i, x^i)\ [\ t_i\}$是空的或紧的# 则存在$\hat{x}\ I\ X$使得对每一$i\ I\ I, f_i(\hat{x}) > t_i$#

证明 对每一$i\ I\ I$, 令$A_i = \{x\ I\ X: f_i(x) > t_i\}$# 则$\{A_i\}_{i I I}$是$X$的一簇子集# 由条件( ) ~ ( ), 容易看出系311的一切条件被满足# 由系311, $H_{i I I} A_i\ X$ # 任取$\hat{x}\ I\ H_{i I I} A_i$, 则我们有$f_i(\hat{x}) > t_i$对每一$i\ I\ I$成立#

注313 定理313在更弱的假设下推广了Lan和Webb[2]的定理215和Ky Fan[24]的定理3到G_凸空间#

现在我们描述一抽象经济$\mathrm{E} = (X_i, S_i, T_i, P_i)_{i I I}$(见Ding, Kim和Tan[25,26], 和Ding和Tan[27]), 其中I是有限或无限个经济人的集; X_i是第i个经济人的策略集(或商品空间); S_i, T_i: $X = 7_{i I I} X_i\ y\ 2^{X_i}$是约束对应(集值映象)和$P_i: X\ y\ 2^{X_i}$是选择对应# 和$\hat{x}\ I\ X$是抽象经济E的一平衡点如果对每一$i\ I\ I, \hat{x}_i\ I\ T_i(\hat{x})$和$S_i(\hat{x})\ H\ P_i(\hat{x}) =$ # 称簇$\mathrm{E} = (X_i, P_i)_{i I I}$是一定性对策# 点$\hat{x}\ I\ X$被说成是对策$\mathrm{E} = (X_i, P_i)_{i I I}$的一极大元如果对每一$i\ I\ I, P_i(\hat{x}) =$ #

定理314 令$\mathrm{E} = ((X_i, \#_i), S_i, T_i, P_i)_{i I I}$是一抽象经济使得对每一$i\ I\ I$,

( ) $(X_i, \#_i)$是一G_凸空间,

( ) 对每一$x\ I\ X = 7_{i I I} X_i, S_i(x)\ X$ 和$G_\mathrm{co}(S_i(x)) < T_i(x)$,

( ) 对X的每一非空紧子集K,

$$K = G_{y_i I X_i}[\mathrm{cint}((P_i^{-1}(y_i)\ G\ W_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i))\ H\ K],$$

其中$W_i = \{x\ I\ X: S_i(x)\ H\ P_i(x) = \}$,

( ) 对每一$x\ I\ X, x_i\ I\ G_\mathrm{co}(P_i(x))$,

( ) 存在X_i的非空子集$X_{i,0}$使得对每一$N_i\ I\ \mathscr{F}(X_i)$, 存在X_i的紧G_凸子集L_{N_i}包含$(X_{i,0}\ G\ N_i)$和集$H_{y_i I X_{i,0}}(\mathrm{cint}[(P_i^{-1}(y_i)\ G\ W_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i)])^c$是空的或紧的# 则存在一点$\hat{x}\ I\ X$使得对每一$i\ I\ I, \hat{x}_i\ I\ T_i(\hat{x})$和$S_i(\hat{x})\ H\ P_i(\hat{x}) =$, 即$\hat{x}$是抽象经济E的一平衡点#

证明 对每一$i\ I\ I$, 令

$$V_i = \{x\ I\ X: S_i(x)\ H\ P_i(x)\ X\ \}, V_i = X \setminus W_i\#$$

对每一$i\ I\ I$, 定义集值映象$F_i: X\ y\ 2^{X_i}$如下,

$$F_i(x) = \begin{cases} P_i(x)\ H\ S_i(x) & (若\ x\ I\ V_i), \\ S_i(x) & (若\ x\ I\ X \setminus V_i)\# \end{cases}$$

则对每一$y_i\ I\ X_i$, 我们有

$$F_i^{-1}(y_i) = [P_i^{-1}(y_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i)\ H\ V_i]\ G\ [S_i^{-1}(y_i)\ H\ W_i] =$$
$$[P_i^{-1}(y_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i)]\ G\ [S_i^{-1}(y_i)\ H\ W_i] =$$
$$(P_i^{-1}(y_i)\ G\ W_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i)\#$$

从条件( )推得对 X 的每一非空紧子集K,

$$K = \underset{y_i I X_i}{G}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)\ H\ K)\#$$

条件( )蕴含集

$$\underset{y_i I X_{i,0}}{H}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^c = \underset{y I X_{i,0}}{H}(\mathrm{cint}[(P_i^{-1}(y)\ G\ W_i)\ H\ S_i^{-1}(y_i)])^c$$

是空的或紧的# 系 212 的条件( )和( )被满足, 由系 212 存在$\hat{x}\ I\ X$ 使得对每一$i\ I\ I$, 有$\hat{x}_i\ I$ $G\_\mathrm{co}(F_i(\hat{x}))$ 如果对某 $i\ I\ I$, $\hat{x}\ I\ V_i$, 由 F_i 的定义我们有$\hat{x}_i\ I\ G_\mathrm{co}(F_i(\hat{x})) = G_\mathrm{co}(P_i(\hat{x})\ H$ $S_i(\hat{x})) < G\_\mathrm{co}(P_i(\hat{x}))$, 这与条件( )矛盾# 因此必有对一切 $i\ I\ I$, $\hat{x}\ I\ W_i$ 和$\hat{x}_i\ I$ $G\_\mathrm{co}(S_i(\hat{x}))\#$ 由条件( )和 W_i 的定义, 我们得到

$$\hat{x}_i\ I\ T_i(\hat{x})$$

和 $$S_i(\hat{x})\ H\ P_i(\hat{x}) = \qquad (P\ i\ I\ I),$$

即$\hat{x}$ 是E的一平衡点#

注 314 定理 314 在更弱的假设下推广了 Tarafdar[1] 的定理 311, Tarafder[5] 的定理 411, Singh, Tarafdar 和 Wasfon[4] 的定理 311 和 Ansari 和 Yao[3] 的定理 2 到 $G\_$ 空间#

定理 315 令$((X_i, \#_i), P_i)_{iI\ I}$ 是一定性对策使得对每一$i\ I\ I$,

( ) $(X_i, \#_i)$ 是一 $G_$凸空间,

( ) 对 X 的每一非空紧子集K, $K = \underset{y I X_i}{G}(\mathrm{cint}(P_i^{-1}(y_i)\ G\ W_i)\ H\ K)$,

( ) 对每一$x\ I\ X$, x_i Y $G\_\mathrm{co}(P_i(x))$,

( ) 存在 X_i 的非空子集$X_{i,0}$ 使得对每一$N_i\ I\ \mathscr{F}(X_i)$, 存在 X_i 的一紧$G_$凸子集L_{N_i} 包含 $(X_{i,0}\ G\ N_i)$ 且集 $\underset{y_i I X_{i,0}}{H}(\mathrm{cint}(P_i^{-1}(y_i)\ G\ W_i))^c$ 是空的或紧的#

则存在$\hat{x}\ I\ X$ 使得对每一$i\ I\ I$, $P_i(\hat{x}) = \quad$, 即$\hat{x}$ 是定性对策E的一极大元#

证明 对每一 $i\ I\ I$, 令 $S_i(x) = T_i(x) = X_i$, 则抽象经济 E= $((X_i, \#_i), S_i, T_i, P_i)_{iI\ I}$ 满足定理314 的一切条件, 定理 315 的结论从定理 314 推得#

注 315 定理 315 在更弱的假设下推广了 Singh, Tarafdar 和 Waston[4] 的定理 312, Tarafdar[1] 的定理 312 和系 312 从拓扑矢量空间到 $G\_$ 凸空间#

[参 考 文 献]

[1] Tarafdar E. A fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy[J]. J Math Econom, 1991, 20(2): 211) 218.

[2] LAN Kun_Quan, Webb J. New fixed point theorems for a family of mappings and applications to problems on sets with convex sections[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126(4): 1127) 1132.

[3] Ansari Q H, Yao J C. A fixed point theorem and its applications to a system of variational inequalities[J]. Bull Austral Math Soc, 1999, 59(2): 433) 442.

[4] Singh S P, Tarafdar E, Watson B. A generalized fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy[J]. J Computat Appl Math, 2000, 113(1/2): 65) 71.

[5] Tarafdar E. Fixed point theorems in H_spaces and equilibrium point of abstract economies[J]. J

Austral Math Soc Ser A, 1992, 53(2): 252) 260.

[6] CHANG Shi_sheng, Lee B S, Cho Y J, et al. On the generalized quasi_variational inequality problems [J]. J Math Anal Appl, 1996, 203(3): 686) 711.

[7] LIN Lai_jiu, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224(1): 167) 181.

[8] Patk S. Continuous selection theorems in generalized convex spaces[J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1999, 20(5/6): 567) 583.

[9] DING Xie_ping. New H_KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, 26(1): 1) 19.

[10] DING Xie_ping. Gerenalized variational inequalities and equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. Computera Math Applic, 1999, 38(7/8): 180) 197.

[11] Wilansky A. Topology for Analysis[M]. Waltham Massachusetts: Ginn, 1972.

[12] Dugundji J. Topology [M]. Boston: Allyn and Bacon Inc, 1966.

[13] Husain T. Topology and Maps[M]. New York: Plenum Press, 1977.

[14] Kelley J L. General Topology [M]. Princeton: D Van Nostrand Co, 1955.

[15] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. J Math Anal Appl, 1997, 197(1): 173) 187.

[16] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 209(2): 551) 571.

[17] Ben_El_Mechaiekh H, Chebbi S, Flornzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, 222(1): 138) 150.

[18] Tychonoff A. Ein fixpunktsatz[J]. Math Ann, 1935, 111: 767) 776.

[19] DING Xie_ping. Coincidence theorems in topological spaces and their applications[J]. Appl Math Lett, 1999, 12(7): 99) 105.

[20] Tarafdar E. A fixed point theorem equivalent to the Fan_Knastre_Kuratowski_Mazurkiewicz theorem [J]. J Math Anal Appl, 1987, 128(3): 475) 479.

[21] Shih M H, Tan K K. Non_compact sets with convex sections[J]. Pacific J Math, 1985, 119(2): 473) 479.

[22] Fan Ky. Some properties of convex sets related fixed point theorems[J]. Math Ann, 1984, 266(3): 519) 527.

[23] Ma T W. On sets with convex sections[J]. J Math Anal Appl, 1964, 27(2): 413) 416.

[24] Fan Ky. Applications of a theorem concerning sets with convex sections[J]. Math Ann, 1966, 163(2): 189) 203.

[25] DING Xie_ping, Kim W K, Tan K K. Equilibria of noncompact generalized games with $\mathscr{L}^*$ majorized preference correspondences[J]. J Math Anal Appl, 1992, 164(3): 508) 517.

[26] DING Xie_ping, Kim W K, Tan K K. A selection theorem and its application[J]. Bull Austral Math Soc, 1992, 46(2): 205) 212.

[27] DING Xie_ping, Tan K K. On equilibria of noncompact generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1993, 177(1): 226) 238.

G_Convex Spaces

DING Xie_ping[1], Park Jong_yeoul[2]
(1. Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China;
2. Department of Mathematics, Pusan National University Kumjung, Pusan 609_735, Korea)

Abstract: By applying the technique of continuous partition of unity and Tychonoff's fixed point theorem, some new collectively fixed point theorems for a family of set_valued mappings defined on the product space of noncompact *G_convex spaces are proved. As applications, some nonempty intersection theorems of Ky Fan type for a family of subsets of the product space of G_convex spaces are proved; An existence theorem of solutions for a system of nonlinear inequlities is given in G_convex spaces and some equilibrium existence theorems of abstract economies are also obtained in G_convex spaces. Our theorems improve, unify and generalizd many important known results in the recent literature.*

Key words: *collectively fixed point; nonempty intersection theorem; system of inequality; abstract economy; gerenalized convex space*