

文章编号: 1000-0887(2002 11-1124-09)

# 杂交应力元的应力子空间和柔度 矩阵 $H$ 对角化方法\*

张灿辉, 冯伟, 黄黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: 证明了: 1 杂交元假设应力模式线性无关是柔度矩阵非奇异的充分必要条件; 以及 2 等价假设应力模式形成相同的杂交元. 在此基础上建立了假设应力模式的希尔伯特应力子空间, 从而可以利用斯密特方法简单地得到等价的正交归一化应力模式, 实现了柔度矩阵对角化, 使得杂交元形成过程中完全避免了繁杂的矩阵求逆运算, 极大地提高了杂交元分析的计算效率, 数值算例表明该方法是确实有效的.

关键词: 杂交应力有限元; 希尔伯特应力子空间; 柔度矩阵对角化方法

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

## 引 言

在有限元分析中, 位移有限元由于构造简单而得到广泛应用, 但是在板壳单元分析中存在连续位移场的构造困难和剪切闭锁现象. 1964 年卞学<sup>[1]</sup>利用独立假设应力场方法提出了杂交应力有限元, 但是, 不合适的假设应力场将使单元包含机动模式即零能变形模式. 为了避免零能变形模式可以在假设应力场中增加适当的高阶应力模式, 但是过多的应力模式使假设应力场包含大量的应力参数(或应力模式), 从而需要花费很大工作量进行单元柔度矩阵求逆, 降低了杂交元分析的计算效率. 为了提高计算效率, 应该尽可能减少假设应力场中的应力分量或应力模式个数以减少应力参数, 前者如复合材料分析中的部分杂交元方法, 在假设应力场中只包含层间连续的三个应力分量<sup>[2]</sup>, 后者要求在假设应力场中包含尽可能少的应力模式, 其理想情况是只包含  $m(=n-r)$  个低阶应力模式并且单元避免零能变形模式, 如本征函数方法<sup>[3]</sup>、分类方法<sup>[2],[4]</sup>和优化方法<sup>[5]</sup>等. 柔度矩阵准对角化<sup>[6]</sup>通过解除常应力模式和高阶应力模式之间的耦合关系简化了柔度矩阵求逆运算, 重因式分解方法<sup>[7]</sup>则利用矩阵三角分解代替柔度矩阵求逆运算, 都在不同程度上改善了杂交元分析的计算效率. 正交假设应力模式可以使柔度矩阵成为对角矩阵, 从而使杂交元分析完全避免矩阵求逆运算, 本征函数方法<sup>[3]</sup>通过迭代得到正交假设应力模式, Saether<sup>[8]</sup>则利用斯密特方法直接得到正交假设应力模式, 但是, 由

\* 收稿日期: 2001\_10\_09; 修订日期: 2002\_08\_03

基金项目: 教育部留学回国人员资助基金资助项目; 教育部高等学校骨干教师计划基金资助项目; 上海市教育基金会“曙光计划”的资助项目(99SG38)

作者简介: 张灿辉(1967—), 男, 福建惠安人, 博士(E-mail: oudzeezhang@shu.com).

于所定义的应力内积空间不包含材料特性, 因此, 最后得到的正交应力模式十分复杂。

本文建立了包含材料特性的假设应力模式希尔伯特应力子空间, 从而可以简单地通过斯密特方法得到等价的正交归一化应力模式, 突出了柔度矩阵对角化, 使得杂交元形成过程中完全避免了矩阵求逆运算, 极大地提高了杂交元分析的计算效率。

## 1 杂交应力元分析方法和单元柔度矩阵非奇异定理以及等价假设应力模式定理

在杂交元分析中, 独立假设单元应力场为

$$\sigma = \sum_{i=1}^M \sigma_i \beta_i = \mathbf{P}\beta, \quad (1)$$

其中,  $\sigma_i$  为假设应力模式,  $\beta_i$  为对应的应力参数,  $\mathbf{P}$  为假设应力模式组成的应力矩阵

$$\mathbf{P} = (\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_M), \quad (2)$$

同时, 假设单元位移场为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}_e, \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{N}$  为形函数矩阵,  $\mathbf{q}_e$  为单元节点位移向量, 则单元应变场为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}_e, \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{B}$  为几何矩阵。记:

$$\mathbf{H} = \int_{V^e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV, \quad \mathbf{G} = \int_{V^e} \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV, \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{H}$  为单元柔度矩阵,  $\mathbf{G}$  为杠杆矩阵,  $\mathbf{S}$  为材料柔度矩阵,  $V^e$  为单元区域, 利用广义变分原理如赖斯纳-赫林格变分原理等, 可以得到与一般位移有限元在形式上完全类似的矩阵控制方程

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e, \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{f}_e$  为节点等效载荷向量,  $\mathbf{K}_e$  为如下单元刚度矩阵

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad (7)$$

同时, 可以得到应力参数和节点位移之间关系

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q}_e, \quad (8)$$

由(6), 利用一般有限元分析方法可以求得未知节点位移, 从而进一步由(3)、(4)求得单元位移场和应变场, 并且由(1)、(8)求得单元的应力场

$$\sigma = \mathbf{P}\beta = \mathbf{P}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{q}_e. \quad (9)$$

**定理 1 (单元柔度矩阵非奇异定理)** 当且仅当假设应力模式  $\sigma_i (i = 1, \dots, M)$  线性无关时, 杂交元柔度矩阵  $\mathbf{H}$  非奇异。

**证明** 1 必要性 设柔度矩阵非奇异。如果存在  $k_j \in \mathbf{R} (j = 1, \dots, M)$  使

$$k_1 \sigma_1 + \dots + k_M \sigma_M = \sum_{j=1}^M k_j \sigma_j = \mathbf{0}, \quad (10)$$

则有

$$\int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S} \left( \sum_{j=1}^M k_j \sigma_j \right) dV = \sum_{j=1}^M k_j \left[ \int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S} \sigma_j dV \right] = \sum_{j=1}^M H_{ij} k_j = 0 \quad (i = 1, \dots, M). \quad (11)$$

因为柔度矩阵非奇异, 于是

$$k_1 = \dots = k_M = 0 \quad (12)$$

因此, 假设应力模式线性无关

2 充分性 设假设应力模式线性无关. 利用反证法, 假设柔度矩阵奇异, 则方程

$$\sum_{j=1}^M H_{ij} k_j = \sum_{j=1}^M \left[ \int_{V^e} \sigma_i^T S \sigma_j dV \right] k_j = 0 \quad (i = 1, \dots, M) \quad (13)$$

存在非零解, 即存在  $k_j \neq 0$  使(13) 成立. 由(13) 有

$$\sum_{i=1}^M k_i \left[ \sum_{j=1}^M \left[ \int_{V^e} \sigma_i^T S \sigma_j dV \right] k_j \right] = \int_{V^e} \left[ \sum_{i=1}^M k_i \sigma_i \right]^T S \left[ \sum_{j=1}^M k_j \sigma_j \right] dV = 0 \quad (14)$$

因为材料矩阵  $S$  为正定矩阵, 所以

$$\sum_{i=1}^M k_i \sigma_i = \sum_{j=1}^M k_j \sigma_j = 0 \quad (15)$$

这与假设应力模式线性无关矛盾, 因此柔度矩阵非奇异. 证毕

定理 2 (等价假设应力模式定理) 等价假设应力模式形成相同的杂交元.

证明 如果假设应力模式  $\sigma_i$  与  $\sigma_i (i = 1, \dots, M)$  等价, 则存在非奇异矩阵  $T$ , 使

$$P = PT \quad (16)$$

其中,  $P$  与  $P$  分别为假设应力模式  $\sigma_i$  与  $\sigma_i (i = 1, \dots, M)$  组成的应力矩阵. 假设应力模式  $\sigma_i (i = 1, \dots, M)$  形成的杂交元刚度矩阵为

$$K_e = G^T H^{-1} G, \quad (17)$$

其中

$$H = \int_{V^e} P^T S P dV, \quad G = \int_{V^e} P^T B dV. \quad (18)$$

把(16) 代入(5) 有

$$H = T^T \int_{V^e} P^T S P dV T = T^T H T, \quad (19)$$

$$G = T^T \int_{V^e} P^T B dV T = T^T G. \quad (20)$$

把(19)、(20) 代入(7), 注意到  $T$  为非奇异矩阵, 有

$$K_e = (T^T G)^T (T^T H T)^{-1} (T^T G) = G^T H^{-1} G = K_e. \quad (21)$$

证毕

## 2 柔度矩阵 $H$ 对角化方法

考虑单元区域  $V^e$  上的平方可积空间  $L^2(V^e)$ , 引进内积

$$\langle \sigma_i, S \sigma_j \rangle = \int_{V^e} \sigma_i^T S \sigma_j dV, \quad \sigma_i, \sigma_j \in L^2(V^e). \quad (22)$$

它显然满足内积公理, 因此是一个内积空间, 而且是个完备的内积空间, 即希尔伯特空间. 由假设应力模式  $\sigma_i \in L^2(V^e) (i = 1, \dots, M)$  可构成应力子空间

$$H(P) = \left\{ \sum_{i=1}^M \alpha_i \beta_i, \beta_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, M \right\} \subset L^2(V^e). \quad (23)$$

如果  $\sigma_i \in H(P)$  线性无关, 则可以通过斯密特方法简单得到等价的正交应力模式

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_1 \in H(P), \\ \sigma_i = \sigma_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \sigma_i, S \sigma_j \rangle}{\langle \sigma_j, S \sigma_j \rangle} \sigma_j \in H(P) \quad (\text{对于 } i = 2, \dots, M) \end{cases} \quad (24)$$

即正交化前后的应力模式满足

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{T}', \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{P}$  为  $\sigma_i (i = 1, \dots, M)$  组成的应力矩阵, 而

$$\begin{cases} T'_{i\bar{i}} = 1 & (\text{对于 } i = 1, \dots, M), \\ T'_{j\bar{i}} = \frac{\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle}{\langle \sigma_j, \mathbf{S}\sigma_j \rangle} & (\text{对于 } i = 2, \dots, M \text{ 和 } j = 1, \dots, i-1), \\ T'_{j\bar{i}} = 0 & (\text{对于其它的}). \end{cases} \quad (26)$$

对正交应力模式(24)进一步归一化, 假设应力模式为

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\|\sigma_i\|} \quad (i = 1, \dots, M), \quad (27)$$

其中

$$\|\sigma_i\| = \sqrt{\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_i \rangle} = \sqrt{\int_V \sigma_i^T \mathbf{S} \sigma_i dV}. \quad (28)$$

(27) 可以写成以下矩阵形式

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^* \mathbf{T}'', \quad (29)$$

其中,  $\mathbf{P}^*$  为  $\sigma_i^* (i = 1, \dots, M)$  组成的应力矩阵, 而

$$\begin{cases} T''_{i\bar{i}} = \|\sigma_i\| & (\text{对于 } i = 1, \dots, M), \\ T''_{j\bar{i}} = 0 & (\text{对于其他的}). \end{cases} \quad (30)$$

由(25)、(29)有

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{T}' = \mathbf{P}^* \mathbf{T}'' \mathbf{T}' = \mathbf{P}^* \mathbf{T}, \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}'' \mathbf{T}'. \quad (32)$$

因此, 根据定理 2, 可以利用等价的正交归一化应力模式(27)形成相同的杂交元,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^* = (\mathbf{G}^*)^T (\mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{G}^*, \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{H}^* = \int_V (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{S} \mathbf{P}^* dV, \quad \mathbf{G}^* = \int_V (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{B} dV. \quad (34)$$

利用正交归一化应力模式性质

$$\langle \sigma_i^*, \mathbf{S}\sigma_j^* \rangle = \begin{cases} \|\sigma_i^*\|^2 = 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, M). \quad (35)$$

则单元刚度矩阵不仅为对角矩阵而且为单位矩阵

$$\mathbf{H}^* = \int_V (\mathbf{P}^*)^T \mathbf{S} \mathbf{P}^* dV = \begin{bmatrix} \|\sigma_1^*\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|\sigma_M^*\|^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_M, \quad (36)$$

其中  $\mathbf{I}_M$  为  $M$  阶单位矩阵, 从而实现了刚度矩阵  $\mathbf{H}$  对角化, 使杂交元在形成过程中完全避免了矩阵求逆运算

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^* = (\mathbf{G}^*)^T (\mathbf{H}^*)^{-1} \mathbf{G}^* = (\mathbf{G}^*)^T \mathbf{G}^*. \quad (37)$$

在有限元分析中, 经常对单元坐标变换和单元位移场采用相同的插值函数, 假设等参数坐标(自然坐标)变换为

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x}_e. \quad (38)$$

其中,  $x_e$  为单元节点坐标,  $N$  为与(3)中相同的形函数矩阵, 利用等参数坐标变化(38)可以把任意单元区域映射到自然坐标系下的矩形单元区域

$$V^0 = \{-1 < \xi, \eta, \zeta < 1\}. \quad (39)$$

从而内积(22)可写成

$$\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle = \int_{V^0} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_j |J| dV, \quad (40)$$

其中,  $J$  为坐标变换的雅可比矩阵. 在杂交元分析中, 为了通过小片试验必须采用单元形心处雅可比矩阵代替整个单元的雅可比矩阵, 即单元雅可比矩阵的行列式为常数<sup>[7]</sup>

$$|J| = |J(\xi, \eta, \zeta)| \approx |J(0, 0, 0)| \equiv J_0, \quad (41)$$

此时, 内积(40)可写成

$$\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle = \int_{V^0} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_j |J| dV = J_0 \langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle_{V^0}, \quad (42)$$

其中

$$\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle_{V^0} = \int_{V^0} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_j dV, \quad (43)$$

仅与  $V^0$  有关而与  $V^e$  无关, 利用(42), 正交应力模式(24)可写成

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_1, \\ \sigma_i = \sigma_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle_{V^0}}{\langle \sigma_j, \mathbf{S}\sigma_j \rangle_{V^0}} \sigma_j \quad (\text{对于 } i = 2, \dots, M). \end{cases} \quad (44)$$

可见, 假设应力模式正交化只需在等参数坐标系矩形单元区域进行, 记

$$\|\sigma_i\|_{V^0} = \sqrt{\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_i \rangle_{V^0}} = \sqrt{\int_{V^0} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_i dV}, \quad (45)$$

则(28)可写成

$$\|\sigma_i\| = \sqrt{\int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_i dV} = \sqrt{J_0} \sqrt{\int_{V^0} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_i dV} = \sqrt{J_0} \|\sigma_i\|_{V^0}, \quad (46)$$

从而正交归一化应力模式(27)可写成

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\|\sigma_i\|} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{J_0} \|\sigma_i\|_{V^0}} = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \sigma_i^* \quad (i = 1, \dots, M), \quad (47)$$

其中

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\|\sigma_i\|_{V^0}} \quad (i = 1, \dots, M), \quad (48)$$

为等参坐标系下的正交归一化应力模式. 因为只需要在等参坐标系下进行正交归一化, 所以可以在杂交元分析之前统一给出正交归一化应力模式的显式形式, 从而极大地提高了杂交元分析效率.

### 3 数值算例

在以下四节点平面杂交应力有限元的算例中, 分别采用四种不同形式的假设应力模式

$$P_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(I)}, \quad (49)$$

$$P_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$\mathbf{P}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$\mathbf{P}_{\text{IV}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}^{[9]}. \quad (52)$$

利用(48)可以分别给出等参坐标系中等价的归一化应力模式

$$\mathbf{P}_{\text{I}}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & \sqrt{2}b\nu & 0 & \sqrt{6}a\eta & 0 \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 & 0 & \sqrt{6}a\xi \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$\mathbf{P}_{\text{II}}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & \sqrt{2}b\nu & 0 & \sqrt{6}a\eta & 0 & \sqrt{6}b\eta \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 & 0 & \sqrt{6}a\xi & \sqrt{6}b\xi \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$\mathbf{P}_{\text{III}}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & \sqrt{2}b\nu & 0 & \sqrt{6}a\eta & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 & 0 & \sqrt{6}a\xi & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & c\eta \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathbf{P}_{\text{IV}}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & \sqrt{2}b\nu & 0 & \sqrt{6}a\xi & \sqrt{6}b\xi & 0 & \sqrt{6}a\eta & \sqrt{6}b\eta & 0 \\ 0 & \sqrt{2}b & 0 & 0 & \sqrt{6}b\xi & 0 & 0 & \sqrt{6}b\eta & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & \sqrt{3}c\xi & 0 & 0 & \sqrt{3}c\eta \end{pmatrix}, \quad (56)$$

其中,  $a$ 、 $b$  和  $c$  分别为与材料参数弹性模量  $E$  和泊松比  $\nu$  有关的常数

$$a = \frac{\sqrt{2E}}{4}, \quad b = \frac{a}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad c = \frac{a}{\sqrt{1+\nu}}. \quad (57)$$

从而, 利用(47), 任意单元的正交归一化应力模式为

$$\mathbf{P}_{\text{I}}^* = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \mathbf{P}_{\text{I}}^*, \quad \mathbf{P}_{\text{II}}^* = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \mathbf{P}_{\text{II}}^*, \quad \mathbf{P}_{\text{III}}^* = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \mathbf{P}_{\text{III}}^*, \quad \mathbf{P}_{\text{IV}}^* = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \mathbf{P}_{\text{IV}}^*. \quad (58)$$

由四种应力模式形成的杂交应力元分别记为  $Q(\mathbf{P}_{\text{I}})$ 、 $Q(\mathbf{P}_{\text{II}})$ 、 $Q(\mathbf{P}_{\text{III}})$  和  $Q(\mathbf{P}_{\text{IV}})$ , 可以证明, 等函数方法所得假设应力模式形成的杂交元  $Q(\mathbf{P}_{\text{IV}})$  与其对应位移元  $Q_4$  完全等价<sup>[2]</sup>, 因此不能克服剪切自锁。

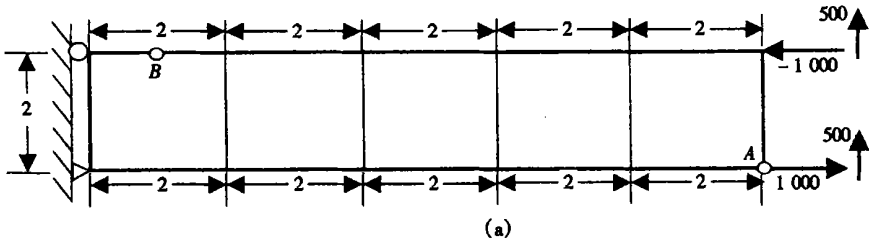
### 算例 1 简支悬臂梁

图 1 为纯弯曲和横向剪切载荷下的  $10 \times 2 \times 1$  简支梁, 采用了两种不同的离散网格即 (a)  $1 \times 5$  规则网格和 (b)  $1 \times 5$  不规则网格, 表中给出了  $A$  点垂直挠度  $v_A$  和  $B$  点弯曲应力  $\alpha_B$  以及剪切应力  $\tau_{xyB}$  的数值结果。从数值结果可见,  $Q(\mathbf{P}_{\text{I}})$ 、 $Q(\mathbf{P}_{\text{II}})$  和  $Q(\mathbf{P}_{\text{III}})$  都很好地克服了剪切自锁, 而  $Q(\mathbf{P}_{\text{IV}})$  却不能。

### 算例 2 MacNeal 细长梁

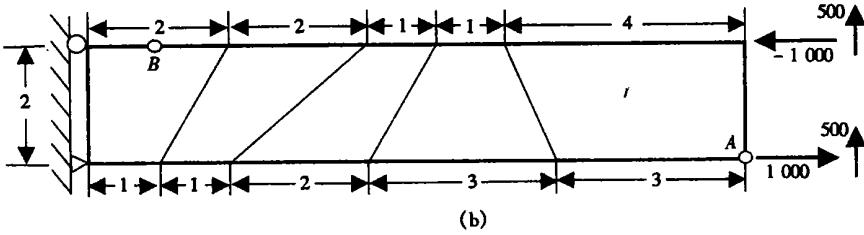
图 2 为 MacNeal 和 Harder 建议的  $6 \times 0.2 \times 0.1$  细长梁<sup>[10]</sup>, 采用三种不同的离散网格即 (a)  $1 \times 6$  规则网格和 (b)  $1 \times 6$  梯形网格和 (c)  $1 \times 6$  平行四边形网格, MacNeal 已经证明利用梯形网格进行分析经常导致梯形自锁<sup>[11]</sup>, 表中给出了  $A$  点垂直挠度的数值结果。从数值结果可见,  $Q(\mathbf{P}_{\text{I}})$  和  $Q(\mathbf{P}_{\text{II}})$  能够很好地克服梯形自锁, 而  $Q(\mathbf{P}_{\text{III}})$ 、 $Q(\mathbf{P}_{\text{IV}})$  却不能, 但是, 对于规则网格,  $Q(\mathbf{P}_{\text{III}})$  仍然可以给出比  $Q(\mathbf{P}_{\text{IV}})$  好的分析结果。

通过数值算例可见, 柔度矩阵对角化方法在提高杂交元计算效率同时并不影响单元的特性, 对性能好的单元仍然保持良好的性能。



单元	纯弯曲			纯剪切		
	$V_A$	$\sigma_{xB}$	$\tau_{xyB}$	$V_A$	$\sigma_{xB}$	$\tau_{xyB}$
$Q(P_I)$	100.013	- 3 000.40	0.00	101.513	- 4 050.54	150.00
$Q(P_{II})$	93.762 5	- 3 000.40	0.00	95.324 9	- 4 050.54	150.00
$Q(P_{III})$	100.013	- 3 000.40	0.00	101.513	- 4 050.54	150.00
$Q(P_{IV})$	69.190 9	- 2 182.11	0.00	70.000 9	- 2 945.85	150.00
理论解	100	- 3 000	0	102.6	- 4 050	150

(a)  $1 \times 5$  规则网格 ( $E = 1 500, \nu = 0.25, t = 1$ )



单元	纯弯曲			纯剪切		
	$V_A$	$\sigma_{xB}$	$\tau_{xyB}$	$V_A$	$\sigma_{xB}$	$\tau_{xyB}$
$Q(P_I)$	100.013	- 3 000.40	0.00	101.312	- 4 163.05	150.00
$Q(P_{II})$	93.762 5	- 3 000.40	0.00	95.156 5	- 4 163.05	150.00
$Q(P_{III})$	100.013	- 3 000.40	0.00	101.308	- 4 163.05	166.78
$Q(P_{IV})$	60.353 7	- 2 360.52	- 17.83	64.723 8	- 3 273.75	131.24
理论解	100	- 3 000	0	102.6	- 4 050	150

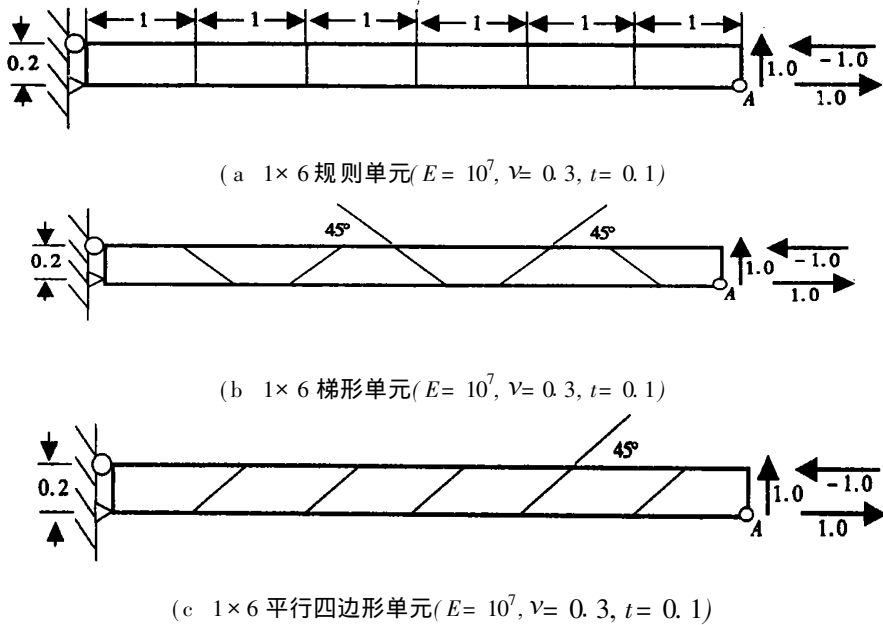
(b)  $1 \times 5$  不规则网格 ( $E = 1 500, \nu = 0.25, t = 1$ )

图1 纯弯和横向剪切载荷下简支悬臂梁

## 4 结 论

1 证明了杂交元假设应力模式线性无关是柔度矩阵非奇异的充分必要条件; 2 证明了等价假设应力模式形成相同的杂交元; 3 构造了杂交元假设应力模式的希尔伯特应力子空

间,从而可以利用斯密特方法得到等价的正交归一化应力模式;4 提出了柔度矩阵对角化方法,数值算例表明,该方法在极大地提高了杂交元计算效率的同时,并不影响单元的性能。



单 元	纯弯曲 $V_A$			纯剪切 $V_A$		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
$Q(P_I)$	0.0054	0.0054	0.0054	0.1073	0.1073	0.1073
$Q(P_{II})$	0.0049	0.0049	0.0049	0.0977	0.0977	0.0977
$Q(P_{III})$	0.0054	0.0004	0.0017	0.1073	0.0066	0.0459
$Q(P_{IV})$	0.0005	0.0002	0.0004	0.0101	0.0016	0.0062
理论解	0.0054	0.0054	0.0054	0.1081	0.1081	0.1081

图 2 横向剪切和弯曲载荷下的 MacNeal 细长梁

### [参 考 文 献]

- [1] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices[J]. AIAA, 1964, 2(3): 576—577.
- [2] Hoa S V, FENG Wei. Hybrid Finite Element Method for Stress Analysis of Laminated Composites [M]. Boston/ Dordrecht/ London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] HUANG Qian. Modal analysis of deformable bodies with finite degree of deformation freedom\_An approach to determination of natural stress modes in hybrid finite elements[A]. In: Chien Wei\_zang, Fu Zi\_zhi, Eds. Advances in Applied Mathematics & Mechanics in China [C]. IAP, 1991, 3: 283—303.
- [4] FENG Wei, Hoa S V, HUANG Qian. Classification of stress modes in assumed stress fields of hybrid finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40 (23): 4313—4339.
- [5] 吴长春, 卞学. 非协调数值分析与杂交元方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [6] 焦兆平. 简化杂交应力元  $H$  阵的一种方法[J]. 计算结构力学及其在应用, 1991, 8(2): 214—216.
- [7] H. 卡得斯赛. 有限元法手册[M]. 诸得超, 傅子智译, 北京: 科学出版社, 1995.



- [8] Saether Erik, Explicit determination of element stiffness matrix in the hybrid stress method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, **38**(15): 2547—2571.
- [9] Han J, Hoa S V. A three-dimensional multilayer composite finite element for stress analysis of composite laminates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993, **36**(22): 3903—3914.
- [10] MacNeal R H, Harder R L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy[J]. Finite Element in Analysis and Design, 1985, **1**(1): 3—20.
- [11] MacNeal R H. A theorem regarding the locking of tapered four-noded membrane elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, **24**(9): 1793—1799.

## **The Stress Subspace of Hybrid Stress Element and the Diagonalization Method for Flexibility Matrix $H$**

ZHANG Can\_hui, FENG Wei, HUANG Qian  
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** The following is proved: 1) The linear independence of assumed stress modes is the necessary and sufficient condition for the nonsingular flexibility matrix. 2) The equivalent assumed stress modes lead to the identical hybrid element. The Hilbert stress subspace of the assumed stress modes is established. So, it is easy to derive the equivalent orthogonal normal stress modes by Schmidt's method. Because of the resulting diagonal flexibility matrix, the identical hybrid element is free from the complex matrix inversion so that the hybrid efficiency is improved greatly. The numerical examples show that the method is effective.

**Key words:** hybrid stress finite element; Hilbert stress subspace; diagonalization method for flexibility matrix