应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1133_08

基于积分二次约束混合摄动系统的摄动界*

董海荣[1,2], 耿志勇[1], 王金枝[1], 黄 琳[1]

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871;
2. 北方交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044)

(叶庆凯推荐)

摘要: 讨论正向通道为线性不确定系统, 反馈通道为非线性动态不确定系统组成的不确定混合摄动系统的摄动界问题• 假定其线性部分的参数不确定由区间摄动模式描述, 非线性部分的动态不确定由积分二次约束(IQC) 描述• 用 Minkowski 泛函出给出区间摄动模式下的摄动界的定义, 并给出参数空间中混合摄动模式下系统摄动界的估计式• 根据双凸函数和凹凸函数的特性把混合摄动系统的无穷稳定检验问题转化为顶点检验和一维检验问题• 最后给出例子•

关 键 词: 混合摄动; 摄动界; 积分二次约束; 参数不确定; 稳定检验
中图分类号: TP273; O175 文献标志码: A

引 言

不确定系统的鲁棒控制在近十几年来得到了广泛深入的研究, 不确定性可分为参数不确定性和非参数不确定性两大类• 参数不确定系统的鲁棒稳定性分析的研究相继出现了一大批有价值的研究成果, 比较具有代表性的如棱边定理[Bartlett 等 1990[1]], 边界定理[Huang 和 Wang1991[2]]等等• 对于非参数的不确定摄动模式有锥(扇形) 条件[Safonov1980[3]], 积分二次约束[Jönsson1996[4], Megretski 和 Rantzer1997[5]], 范数约束[Dong 等 2001[6]] 等• 近来许多学者又针对混合摄动系统的鲁棒稳定性及鲁棒性能的分析相继作出了有意义的工作[Chapellat 等 1990[7], Geng 和 Huang2000[8,9]], 使得不确定系统鲁棒控制的研究更贴切实际工程系统的需要• 给定一个稳定的标称系统, 它的系(参) 数在多大的摄动范围内变动仍然能保持系统的稳定性是系统设计中所关心的一个重要问题, 它在一定程度上定量地反应了系统鲁棒稳定性的大小• 在参数不确定系统中通常是用参数空间的范数来刻画摄动界• 目前用 1_范数, 2_范数, ∞_范数描述的摄动界已经得到了许多有价值的结果, 而且通常都表示为一维频率域上的搜索问题, 但实际系统中往往更关心系统的参数不确定具有确定的摄动模式, 系统在多大的范围内

* 收稿日期: 2001_08_13; 修订日期: 2002_07_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972001); 高等学校骨干教师资助项目和国家重点基础研究专项经费资助项目(No. G1998020302);
作者简介: 董海荣(1974—), 女, 河南人, 博士(E_mail: hrdong@water.pku.edu.cn)•

仍然保持稳定性,即怎样来确定系统在给定摄动模式下的摄动界•

考虑图 1 所示不确定反馈系统, 其正向通道为系统族 $\mathscr{G}$, 设 $G(s;p,q)\in\mathscr{G}$ 为一不确定系统,

$$G(s;p,q)=\frac{N(s,p)}{D(s,q)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}p_i^0s^i+\sum\limits_{i=0}^{m}p_is^i}{\sum\limits_{j=0}^{n}q_j^0s^j+\sum\limits_{j=0}^{n}q_js^j},\tag{1}$$

其中的标称对象为

$$G(s;p^0,q^0)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}p_i^0s^i}{\sum\limits_{j=0}^{n}q_j^0s^j},\tag{2}$$

且有 $m\leqslant n$•　其中 $p=\begin{pmatrix}p_0\\ \vdots\\ p_m\end{pmatrix}\in R^{m+1}$ 和 $q=\begin{pmatrix}q_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}\in R^{n+1}$ 为不确定参数•

若记 $x^0=\begin{pmatrix}p^o\\ q^o\end{pmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}$, 有 $x=x^0+x$•

令 $G(s,x^0+x)\stackrel{\Delta}{=}G(s;p,q)$, 则 $G(s,x^0)=G(s;p^0,q^0)$•

在下面的讨论中将假定 $G(s,x^0+x)\in\mathbf{R}H_\infty$, 其中 $x\in X=P\times Q\subset R^{m+n+2}$, $P\subset R^{m+1}$ 和 $Q\subset R^{n+1}$ 是包含原点的凸多面体, X 为参数摄动模式集, 是包含原点的紧集•

1　定义和概念

首先给出图 1 中系统鲁棒稳定的定义, 用输入输出方法描述系统

$$\begin{cases}y=Gu+g & (G\in\mathscr{G}),\\ u=\Delta(y)+f,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $f,g\in L_{2e}[0,\infty)$, Δ: $L_{2e}[0,\infty)\to L_{2e}[0,\infty)$ 是一因果有界算子•

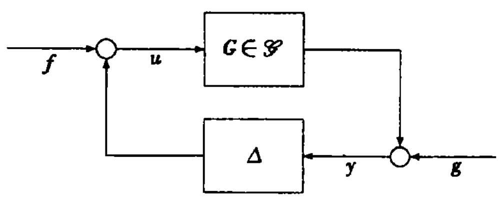

图 1　混合摄动系统

定义 1　称由(3)描述的反馈系统是适定的, 系指对任一个 $G(s;p,q)\in\mathscr{G}$, 映射 $(u,y)\to(f,g)$ 在 $L_{2e}[0,\infty)$ 上有因果逆•　若还对任一 $G(s;p,q)\in\mathscr{G}$, 存在常数 $C>0$ 满足

$$\int_0^T(|u(t)|^2+|y(t)|^2)dt\leqslant C\int_0^T(|f(t)|^2+|g(t)|^2)\mathrm{d}t$$
$$(\forall T\geqslant 0,\ \forall p\in P,\ \forall q\in Q),\tag{4}$$

称系统是鲁棒稳定的•

定义 2　[Jönsson 1996[4], Megreski 和 Rantzer1997[5]]　令 Π_B: $\mathrm{j}\mathbf{R}\to C^{2\times 2}$ 为有界可测函数, $\Pi_p(\mathrm{j}\omega)=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{j}\omega\lambda\\ \mathrm{j}\omega\lambda & 0\end{pmatrix}$　$(\lambda\in\mathbf{R})$, 有界算子 Δ: $L_{2e}[0,\infty)\to L_{2e}[0,\infty)$ 称为满足由 $\Pi=\Pi_B+\Pi_p$ 定义的积分二次约束, 若存在一正常数 γ 满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\hat{y}(j\omega)\\ \widehat{\Delta(y)}(j\omega)\end{pmatrix}^{*}\Pi(j\omega)\begin{pmatrix}\hat{y}(j\omega)\\ \widehat{\Delta(y)}(j\omega)\end{pmatrix}d\omega+\int_{0}^{\infty}2\Delta(y)\lambda\dot{y}\,dt\geqslant-\gamma|y_0|^2. \tag{5}$$

对所有的 $y\in L_2[0,\infty)$ 成立 $\dot{y}\in L_2[0,\infty)$, 且 $\Delta(y)\in L_2[0,\infty)$, 其中‘ ^ ’表示时域上信号的傅氏变换, ‘ * ’表示复向量的共轭转置变换. 假设 $y_0=y(0)$, Π 称为 IQC 乘子.

设 $\mathbf{R}=[-\infty,+\infty]$. 对上述具有动态不确定的标称系统 $G(s,x^0)$, 有如下系统鲁棒稳定的定理.

定理 1[Megreski 和 Rantzer 1997[5]] 由(3)描述的反馈互联系统是鲁棒稳定的, 若

(i) 对任意的 $\tau\in[0,1]$, $G(s,x^0)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统是适定的;

(ii) 对任意的 $\tau\in[0,1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义得到 IQC; 且

(iii) $$\begin{pmatrix}G(j\omega,x^0)\\ 1\end{pmatrix}^{*}\Pi(j\omega)\begin{pmatrix}G(j\omega,x^0)\\ 1\end{pmatrix}<0\qquad(\forall\omega\in\mathbf{R}). \tag{6}$$

假定 IQC 乘子有如下形式

$$\Pi(j\omega)=\begin{pmatrix}\Pi_{11}(j\omega) & \Pi_{12}(j\omega)\\ \Pi_{12}^{*}(j\omega) & \Pi_{22}(j\omega)\end{pmatrix}, \tag{7}$$

且定义

$$W(j\omega,x)=\begin{bmatrix}N(j\omega,p)\\ D(j\omega,q)\end{bmatrix}^{*}\Pi(j\omega)\begin{bmatrix}N(j\omega,p)\\ D(j\omega,q)\end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中 $x=[p,q]^{\mathrm{T}}\in P\times Q=X$.

定义 3 给定 $\omega\in\mathbf{R}$, 若 $\Pi_{11}(j\omega)>0$, $\Pi_{22}(j\omega)>0$, $\Pi(j\omega)$ 称为双凸的; 若 $\Pi_{11}(j\omega)=0$, $\Pi_{22}(j\omega)=0$, $\Pi(j\omega)$ 称为双线性; 若 $\Pi_{11}(j\omega)\geqslant0(x\leqslant0)$, $\Pi_{22}(j\omega)\leqslant0(\geqslant0)$, $\Pi(j\omega)$ 称为凸凹的.

引理 1 $$\begin{pmatrix}G(j\omega;p,q)\\ 1\end{pmatrix}^{*}\Pi(j\omega)\begin{pmatrix}G(j\omega;p,q)\\ 1\end{pmatrix}<0\qquad(\forall\omega\in\mathbf{R}), \tag{9}$$

当且仅当

$$W(j\omega,x)<0\qquad(\forall\omega\in\mathbf{R}). \tag{10}$$

下面给出参数不确定系统在给定摄动模式下系统摄动界的定义. 为此先给出 Minkowski 泛函的定义及一些性质.

定义 4 L 为 R^{m+n+2} 上的线性空间, X 为 L 上包含原点紧致凸子集. 定义

$$\mu_X(x)=\inf\{r\mid r>0,\ x/r\in X\}\qquad(\forall x\in L) \tag{11}$$

为 X 上的 Minkowski 泛函.

记 $X_r=\{x\in L\mid \mu_X(x)\leqslant r\}$, $X_r^0=\{x\in L\mid \mu_X(x)<r\}$, 其中 $r\geqslant0$. 显然 $\mu_X(x)$ 具有下列性质:

1) 对任意的 $k\geqslant0$, $x\in L$, 有 $\mu_X(kx)=k\mu_X(x)$;

2) 对任意的 $x\in L$, 若 $\mu_X(x)=r$, 则 $x\in\partial X_r$;

3) $X_r=rX=\{rx\mid x\in X\}$, $X_r^0=rX^0=\{rx\mid x\in X^0\}$,
 $\partial X_r=r\partial X=\{rx\mid x\in\partial X\}$;

4) 若 $r_1<r_2$, 则 $X_{r1}\subset X_{r2}$;

5) $X=\{x\in L\mid \mu_X(x)\leqslant1\}$.

由以上可知对任意的 $x\in L$, 若 $\mu_X(x)=r$, 则 $x/r\in\partial X$. 令 $x^b=(x/r)\in\partial X$, 则 $x=$

rx^b• 对于给定的 $\omega\in\mathbf{R}$, 我们给出给定摄动模式下反馈系统的摄动界的定义•

定义 5 对于标称点 x^0, 定义

$$\begin{aligned} r^*(j\omega) &= \sup\left\{r \mid \max_{x\in X_r} W(j\omega, x^0+x) < 0\right\} \\ &= \inf_{x\in L}\left\{r = \mu_X(x) \mid W(j\omega, x^0+x) = 0\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

为给定摄动模式下反馈系统的摄动界•

注 1 以这种方式定义摄动界, 主要是考虑保持系统摄动模式,即将不确定域以标称对象参数为中心进行线性变化的最范围• 当 $r>1$ 时, 说明系统的允许摄动范围内包含不确定域, 当 $r\leqslant 1$ 时, 说明不确定域包含允许摄动范围, 显然这时系统不是鲁棒稳定的•

问题: 若正向通道的标称部分 $G(s;p^0,q^0)$ 与由积分二次约束(IQC) 描述的动态不确定性组成的闭环系统是稳定的• 当正向通道对象在给定摄动模式下, 在多大的摄动范围内仍然能保持稳定性?

2 主要定理

定理 2 $$r^* = \inf_{x^b\in\partial X}\min_{\omega\in R}\left\{r \mid W(j\omega, x^0+rx^b) = 0\right\}• \tag{13}$$

证明 对任意的 $r\in\left\{r=\mu_X(x) \mid W(j\omega,x^0+x)=0,\ \forall x\in L\right\}$, 有 $\mu_X(x/r)=1$• 从而存在 $x^b\in\partial X$ 满足 $x=rx^b$, 且 $W(j\omega,x^0+rx^b)=0$• 从而

$$r\in\left\{r \mid W(j\omega,x^0+rx^b)=0,\ \forall x^b\in\partial X\right\}•$$

反之, 若 $r\in\left\{r \mid W(j\omega,x^0+rx^b)=0,\ \forall x^b\in\partial X\right\}$, 则令 $x=rx^b$, $x^b\in\partial X$, 可由Minkowski泛函性质可以得到 $r=\mu_X(x)$, 这样

$$r\in\left\{r=\mu_X(x) \mid W(j\omega,x^0+x)=\mathbf{0},\ \forall x\in L\right\}•$$

令

$$N(j\omega,p^0+p) = [1 \quad j\omega \quad \cdots \quad (j\omega)^m]\begin{bmatrix} p_0^0+p \\ \vdots \\ p_m^0+p_m\end{bmatrix} = N(j\omega)p,$$

$$D(j\omega,q^0+q) = [1 \quad j\omega \quad \cdots \quad (j\omega)^n]\begin{bmatrix} q_0^0+q_0 \\ \vdots \\ q_n^0+q_n\end{bmatrix} = D(j\omega)q, \tag{14}$$

则有

$$W(j\omega,x^0+x) = \begin{bmatrix} p \\ q\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} N^*(j\omega) & 0 \\ 0 & D^*(j\omega)\end{bmatrix}\Pi(j\omega)\begin{bmatrix} N(j\omega) & 0 \\ 0 & D(j\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q\end{bmatrix}• \tag{15}$$

记

$$H(j\omega) = \begin{bmatrix} N^*(j\omega) & 0 \\ \mathbf{0} & D^*(j\omega)\end{bmatrix}\Pi(j\omega)\begin{bmatrix} N(j\omega) & 0 \\ \mathbf{0} & D(j\omega)\end{bmatrix}, \tag{16}$$

则(15) 式变为

$$W(j\omega,x^0+x) = \begin{bmatrix} p \\ q\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H(j\omega)\begin{bmatrix} p \\ q\end{bmatrix}•$$

对于给定的标称点 x^0 和点 $x^b\in\partial X$, 有 $x^0+rx^b = x^0+x$, 代入上式则有

$$W(\mathrm{j}\omega, x^0 + rx^b) = r^2(x^b)^{\mathrm{T}}H(j\omega)x^b + 2r\mathrm{Re}(x^b)^{\mathrm{T}}H(j\omega)x^0 + (x^0)^{T}H(j\omega)x^0.$$

取

$$a(\mathrm{j}\omega) = (x^b)^{\mathrm{T}}H(j\omega)x^b,\quad b(j\omega) = 2\mathrm{Re}(x^b)^{\mathrm{T}}H(\mathrm{j}\omega)x^0,$$
$$c(\mathrm{j}\omega) = (x^0)^{\mathrm{T}}H(j\omega)x^0,$$

则对任意的 $\omega \in R$, $W(\mathrm{j}\omega, x^0 + rx^b) = 0$ 的解为

$$r(\mathrm{j}\omega) = \min\left\{ |r_1|, |r_2| \;\middle|\; r_{1,2} = \frac{-b(\mathrm{j}\omega) \pm \sqrt{b^2(j\omega) - 4a(j\omega)c(j\omega)}}{2a(j\omega)},\ r_{1,2} \in \mathbf{R} \right\}. \tag{17}$$

对于给定的标称点 x^0 和摄动方向 x^b, 其定向摄动界为

$$r(x^b) = \min_{\omega\in\mathbf{R}}\left\{ r(\mathrm{j}\omega) \mid W(\mathrm{j}\omega, x^0 + r(\mathrm{j}\omega)x^b) = 0 \right\}. \tag{18}$$

如 $W(\mathrm{j}\omega, x^0 + rx^b) = 0$ 没有实数解, 表明沿着 x^b 方向的摄动为无穷, 这时的结果应该舍去.

此时参数不确定系统在给定摄动模式下系统的摄动界为

$$r^* = \inf_{x^b\in\partial X}\min_{\omega\in\mathbf{R}}\left\{ r \mid W(\mathrm{j}\omega, x^0 + rx^b) = 0 \right\}. \tag{19}$$

证毕.

注2 定向摄动界是一维的, 表示从标称点 x^0 出发沿着给定的摄动方向 x^b 摄动, 直到稳定参数空间与非稳定参数空间的边界为止, r 是以给定的摄动方向向量的大小来度量的, 而且它正是这一摄动方向的 Minkowski 泛函的值. 如果对所有的边界点所构成的摄动方向以及所有的频率取极小得到的 r 就是摄动界 r^*. 由于参数空间中摄动方向有无穷多个, 怎样从这无穷多个方向中找出有限个, 然后再在这有限个方向中找极小就是有限检验的思想. 但并不是所有情况都可以找到有限检验的, 我们就将问题集中到具有特殊形式的 IQC 的乘子 Π 上.

记 p^* 和 Q^* 分别为 P 和 Q 的顶点集合.

定理3 假定对所有 $\omega \in \mathbf{R}$, IQC 乘子 Π 为双凸的, 若由(3)描述的反馈互联系统的标称系统是鲁棒稳定的, 且满足

i) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, $G(s; x^0 + x)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统对所有的 $x \in X$ 是适定的;

ii) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义得到 IQC,

则此参数不确定系统在给定摄动模式下系统的摄动界为

$$r^* = \inf_{x^b\in X^*}\min_{\omega\in\mathbf{R}}\left\{ r \mid W(j\omega, x^0 + rx^b) = 0 \right\}.$$

推论1 假定对所有 $\omega \in \mathbf{R}$, IQC 乘子 Π 为双线性的, 若由(3) 描述的反馈互联系统的标称系统是鲁棒稳定的, 且满足

i) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, $G(s; x^0 + x)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统对所有的 $x \in X$ 是适定的;

ii) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义得到 IQC,

则此参数不确定系统在给定摄动模式下系统的摄动界为

$$r^* = \sup_{x^b\in X^*}\left\{ r \mid \mathrm{Re}(\Pi_{12}^*(j\omega)G(j\omega; x^0 + x)) = 0,\ \forall\, \omega \in \mathbf{R} \right\}.$$

记 P_E, Q_E 分别为 P, Q 的所有凸出棱边的集合. $x^b = [(p^b)^T, (q^b)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

定理4(a) 假定对所有 $\omega \in \mathbf{R}$, IQC 乘子 Π 为凸凹的, 且有 $\Pi_{11} \geqslant 0$ 和 $\Pi_{22} \leqslant 0$, 若由(3) 描述的反馈互联系统的标称系统是鲁棒稳定的, 且满足

i) 对任意的 $\tau \in [0, 1]$, $G(s; x^0 + x)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统对所有的 $x \in X$ 是适定的;

ii) 对任意的 $\tau\in[0,1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义得到 IQC,

则此参数不确定系统在给定摄动模式下系统的摄动界为

$$r^* = \inf_{p\in P^*,\, q\in Q_{Ex}} \min_{\omega\in R}\left\{r \mid W(\mathrm{j}\omega, x^0+rx^b)=0\right\}.$$

定理 4(b) 假定对所有的 $\omega\in\mathbf{R}$, IQC 乘子 Π 为凸凹的, 且有 $\Pi_{11}\leqslant 0$ 和 $\Pi_{22}\geqslant 0$, 若由 (3) 描述的反馈互联系统的标称系统是鲁棒稳定的, 且满足

i) 对任意的 $\tau\in[0,1]$, $G(s;x^0+x)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统对所有的 $x\in X$ 是适定的;

ii) 对任意的 $\tau\in[0,1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义得到 IQC,

则此参数不确定系统在给定摄动模式下系统的摄动界为

$$r^* = \inf_{p\in P_E,\, q\in Q^*} \min_{\omega\in\mathbf{R}}\left\{r \mid W(j\omega, x^0+rx^b)=0\right\}.$$

3 实 例

下面给出一个简单的例子. 考虑图 1 所示系统, 若其线性部分为区间系统族

$$\mathscr{G}(s)=\left\{G(s)=\frac{2+[1,5]s+s^2}{5+[4,8]s+s^2}\right\},$$

非线性部分为

$$\Delta(\upsilon)=\begin{cases}-\kappa(\delta-\alpha) & (\upsilon\leqslant-\delta),\\ \kappa(\upsilon+\alpha) & (-\delta\leqslant\upsilon\leqslant-\alpha),\\ 0, & (-\alpha\leqslant\upsilon\leqslant\alpha),\\ \kappa(\upsilon-\alpha) & (\alpha\leqslant\upsilon\leqslant\delta),\\ \kappa(\delta-\alpha) & (\upsilon\geqslant\delta),\end{cases}$$

其中 κ 和 δ 为正变量, $0\leqslant\alpha\leqslant\delta$ 为非负变量.

对于上述混合摄动系统, 我们将给出其摄动界. 由前文我们可知系统扰动部分的分子和分母分别为

$$N^p(s,p)=2p_1,\ -1\leqslant p_1\leqslant 1;\quad D^p(s,q)=2q_1,\ -1\leqslant q_1\leqslant 1.$$

系统标称部分的分子和分母分别为

$$N^0(s)=2+3s+s^2,\quad D^0(s)=5+6s+s^2.$$

我们可以得到 $\mathscr{G}$ 的如下四个 Kharitonov 顶点系统

$$G_1(s)=\frac{2+s+s^2}{5+4s+s^2};\quad G_2(s)=\frac{2+5s+s^2}{5+4s+s^2};$$

$$G_3(s)=\frac{2+s+s^2}{5+8s+s^2};\quad G_4(s)=\frac{2+5s+s^2}{5+8s+s^2}.$$

易证对 $i=1,2,3,4$, $G_i(s)\in\mathbf{R}H_\infty$, 由 Kharitonov 定理(Kharitonov 1978) 可证 $\mathscr{G}(s)\subset\mathbf{R}H_\infty$. 首先我们构造一个二次锥, 其 Δ_y 面上把 $\gamma_1\gamma_2y^2-(\gamma_1+\gamma_2)\Delta y+\Delta^2>0$ 包含在其第一第三象限中, 其中 γ_2 为一个足够大的负数, γ_2 为一较小的负数. 为方便起见我们通常假设 $\gamma_2=\gamma_1^{-1}$. 由 Parseval 等式我们可有

$$\int_0^\infty(\gamma_1\gamma_2y^2(t)-(\gamma_1+\gamma_2)\Delta(t)y(t)+\Delta(t)^2)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}\hat{y}(\mathrm{j}\omega)\\ \Delta(y)(\mathrm{j}\omega)\end{bmatrix}^*\Pi(\mathrm{j}\omega)\begin{bmatrix}\hat{y}(\mathrm{j}\omega)\\ \Delta(y)(\mathrm{j}\omega)\end{bmatrix}\mathrm{d}\omega>0,$$

其中

$$\Pi(\mathrm{j}\omega)=\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_2 & -\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{2}\\ -\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

对任意 $\tau\in[0,1]$, $(\tau\Delta(y)y, y)$ 的图包含在这个二次锥里, 所以所有的 $\tau\in[0,1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC. 显然对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$, IQC 算子 Π 是双凸的, 我们可取 $\gamma_1=-50$, $\gamma_2=-0.02$.

对于给定点 $x^0=[2\ 3\ 1\ 5\ 6\ 1]$, 通过计算我们有

$\mu_{11}=1.154\,2$, $\mu_{12}=-2.221\,9$,

$\mu_{21}=6.809\,9$, $\mu_{22}=-8.284\,5$,

$\mu_{31}=1.753\,1$, $\mu_{32}=-1.210\,6$,

$\mu_{41}=-1.356\,7$, $\mu_{42}=-3.330\,5$.

由定理 2 可知这个混合摄动系统的摄动界是 $r^*=1.154\,2$. 此反馈互联系统是鲁棒稳定的.

4 结　　语

对混合摄动系统运用 Minkowski 泛函给出摄动界的估计式, 它一定程度上定量的反映了系统鲁棒性的大小. 利用一些已知结果(如顶点检验结果和棱边检验结果) 降到有限维或一维搜索.

[参　考　文　献]

[1] Bartlett A C, Hollot C V, Huang L. Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges[J]. Mathematic Control Signals Systems, 1988, **1**(1): 61—71.

[2] HUANG Lin, WANG Long. Value mapping and parameterization approach to robust stability[J]. Science in China (A), 1991, **34**(10): 1122—1232.

[3] Safonov M G. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems[M]. Cambridge: MIT Press, 1980.

[4] J⊥sson U. Robust Analysis of Uncertain and Nonlinear Systems[M]. Sweden: Lund, 1996.

[5] Megretski A, Rantzer A. Systems analysis via integral quadratic constraints[J]. IEEE Transaction Automatica Control, 1997, **42**(6): 819—830.

[6] DONG Hai_rong, GENG Zhi_yong, HUANG Lin. Stability analysis for the systems with feedback norm constraint uncertainties[J]. International Journal of Control, 2001, **74**(9): 949—956.

[7] Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations[J]. IEEE Transaction Automatica Control, 1990, **35**(10): 1100—1108.

[8] GEMG Zhi_yong, HUANG Lin. Robust stability of the systems with mixed uncertainties under the IQC descriptions[J]. International Journal of Control, 2000, **73**(9): 776—786.

[9] GENG Zhi_yong, HUANG Lin. Robust stability of systems with both parametric and dynamic uncertainties[J]. System and Control Letters, 2000, **39**(2): 87—96.

Stability Margin of Systems With Mixed Uncertainties Under the IQC Descriptions

DONG Hai_rong[1,2], GENG Zhi_yong[1], WANG Jin_zhi[1], HUANG Lin[1]

(1. Department of Mechanics and Engineering Sciences, Peking University, Beijing 100871, P R China ,
2. School of Electronics and Information Engineering, North Jiaotong University,
Beijing 100044, P R China)

Abstract: Stability perturbation bounds problem for systems with mixed uncertainties is discussed. It is supposed that the linear part in the forwark loop is of parametric unceratinties described by interval perturbation mode, and that the non_linear part in the feedback loop is characterized by an integral quadratic constraint(IQC). The definition of stability margin under the interval perturbation mode is given by using the Minkowski functional. The infinite stability checking problem of the mixed uncertain system can be coverted to finite or one dimensional stability checking for different structures of the IQC multipliers based on the concepts of biconvex and convex_concave functions and their properties. The result is illustrated to be efficient through an example.

Key words: system with mixed uncertainty; perturbation margin; integral quadratic constraint; parametric uncertainty; stability checking