应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000_0887(2002)11_1169_08

一类推广的中曲率水平集的运动*

郑永爱[1,2], 刘祖汉[2]

(1. 扬州大学 数学系,扬州 225006;2. 上海大学 数学系,上海 200436)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究了根据一个光滑曲面的主曲率函数的经典运动短时存在及唯一性,推广了 Evans 和 Spruck 的结果•

关键词: 水平集; 中曲率; 符号距离函数; 主曲率

中图分类号: O186 文献标识码: A

引 言

设 Γ_0 是光滑连通的超曲面且是一个有界开集 $U\subset\mathbf{R}^n$ 的边界;t_0 为某一时刻,$M=M(x)\in C^3$ 且 $M(0)=0, M'(x)>0$,$l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为一组正实数• $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant t_0}$ 是一类光滑曲面且是一类有界开集 U_t 的边界,U_t 与 $U=U_0$ 同胚,$k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 是 Γ_t 上任何一点 x 的主曲率•

我们考虑方程

$$\begin{cases} \dot{x}=M(l_1k_1+\cdots+l_{n-1}k_{n-1})\boldsymbol{\nu}(x,t) \\ x(t)=x \end{cases} \quad ((x,t)\in\Gamma_t), \tag{1}$$

$\boldsymbol{\nu}(x,t)$ 是 Γ_t 上的单位法向量场•

上述方程描述了以曲面 Γ_t 上任一点主曲率函数为速度移动曲面上该点所产生的光滑曲面的经典运动•

若 $M(x,t)=x$ 且 $l_1=l_2=\cdots=l_{n-1}=1$,则方程(1) 化为

$$\begin{cases} \dot{x}=(n-1)H\boldsymbol{\nu}(x,t), \\ x(t)=x• \end{cases} \quad ((x,t)\in\Gamma_t), \tag{2}$$

对于满足方程(2) 的光滑曲面的经典运动短时存在及唯一性,Brakke[1] 从几何测度论观点给出了证明,后来,Evans 和 Spruck[2],利用符号距离函数又给出了一个初等的证明• 本文利用 Evans 和 Sptuck 符号距离函数的方法对于满足方程(1) 的光滑曲面的经典运动短时存在及唯一性给出了证明•

假设我们给定了一个与上面一样的超曲面 $\Gamma_0=\partial U$,一个时刻 $t_0>0$ 和从 Γ_0 出发根据主曲率函数发展的一类曲面 $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant t_0}$,那么对于每时刻 $t\in[0,t_0]$,Γ_t 是一个同胚于 $U=U_0$ 的有界开集 U_t 的边界• 定义符号距离函数

* 收稿日期: 2001_11_01 修订日期: 2002_06_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071067)
作者简介: 郑永爱(1966—),江苏兴化人,副教授,博士(E_mail: zhengyongai@163.com).

$$d(x,t)=\begin{cases}\operatorname{dist}(x,\Gamma_t) & (x\in\mathbf{R}^n-U_t),\\ -\operatorname{dist}(x,\Gamma_t) & (x\in U_t),\end{cases}$$

由假设 $\Gamma=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\Gamma_t\times\{t\}$ 是光滑的, 则对于充分小的 $\delta_0>0$, d 在 Q^+ 和 Q^- 中是光滑的, 其中

$$Q^+=\{(x,t)\mid 0<t<t_0, 0<d(x,t)<\delta_0\},$$
$$Q^-=\{(x,t)\mid 0<t<t_0, -\delta_0<d(x,t)<0\}\cdot$$

对于任一点 $(x,t)\in Q^+$, 如果 $\delta_0>$ 充分小, 则存在一点 $y\in\Gamma_t$ 使得 $d(x,t)=|x-y|\cdot$ 设 $\boldsymbol{\nu}=Dd$ 的指向是从 Γ 到 Q^+ 的光滑单位法向量场, 因为 $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant t_0}$ 是根据主曲率函数 $M(l_1k_1+\cdots+l_{n-1}k_{n-1})$ 的运动, 所以有 $d_t(x,t)=-M(l_1k_1+\cdots+l_{n-1}k_{n-1})\cdot$
另一方面 $D^2d(x,t)$ 的特征值是

$$\lambda_i=\lambda_i(D^2d(x,t))=-\frac{k_i}{1-k_id(x,t)}\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1),$$
$$\lambda_n=\lambda_n(D^2d(x,t))=0,$$

其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 表示 Γ_t 在 y 点关于法向量场 $\boldsymbol{\nu}$ 的主曲率, 即

$$k_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i d(x,t)-1}\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1)\cdot$$

最后我们推出:

$$d_t(x,t)=-M\circ f(\lambda_1(D^2d(x,t)),\cdots,\lambda_n(D^2d(x,t)),d(x,t)),\tag{3}$$

其中

$$f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,z)=\sum_{i=1}^n\frac{l_i\lambda_i}{\lambda_i z-1}\cdot\tag{4}$$

如果 $(x,t)\in Q^-\cdot$ 可得类似结果$\cdot$ 偏微分方程(3)有一般形式

$$d_t(x,t)=-M\circ F(D^2d,d),\tag{5}$$

且

$$\frac{\partial(-M\circ F)}{\partial\lambda_i}=M'\circ F(D^2d,d)\frac{l_i}{(\lambda_i d-1)^2}>0\qquad(1\leqslant i\leqslant n)\cdot\tag{6}$$

我们将直接研究偏微分方程(5),(6)$\cdot$ 为此, 设

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{dist}(x,\Gamma_0) & (x\in\mathbf{R}^n-U),\\ -\operatorname{dist}(x,\Gamma_0) & (x\in U)\end{cases}\tag{7}$$

是符号距离函数, 设 $\delta_0>0$ 充分小满足 g 在 $V=\{x\in\mathbf{R}^n\mid-\delta_0<g<\delta_0\}$ 上是光滑的, 记

$$Q=V\times(0,t_0),\ \Sigma=\partial V\times[0,t_0]$$

在第1节, 我们对偏微分方程

$$\begin{cases}v_t=-M\circ F(D^2v,v) & (\text{在 } Q \text{ 内}),\\ |Dv|^2=1 & (\text{在 }\Sigma\text{ 上}),\\ v=g & (\text{在 } V\times\{t=0\}\text{ 上}),\end{cases}\tag{8}$$

在某个充分小时间 $t_0>0$ 建立一个光滑解 $v\cdot$ 在第2节, 我们证明在 Q 内

$$|Dv|^2=1\cdot\tag{9}$$

设 $\Gamma_t=\{x\in V\mid v(x,t)=0\}$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, 我们从(8),(9)推出 $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant t_0}$ 是根据主曲率函数的光滑发展和 $v=d$ 是相应的符号距离函数$\cdot$

1 非线性偏微分方程的解

在这节中,我们的目标是对于充分小的 $\delta_0 >$ 和 $t_0 > 0$,构造偏微分方程(8)的一个解。记 $M = \max_V |D^2 g|$,选取 $\delta_0 > 0$ 使

$$M\delta_0 \leqslant \frac{1}{4}. \tag{10}$$

记 $B = \{R \in S^{n\times n}, z \in \mathbf{R} \mid |z| < \delta_0, |R| < 2M\}$,则由(10)得

$$|\lambda_i(R)z| \leqslant |R||z| \leqslant \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

如果 $(R, g) \in B$,则

$$F(R,z) = f(\lambda_1(R), \cdots, \lambda_n(R), z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i \lambda_i(R)}{\lambda_i(R)z - 1}$$

在 B 上光滑,且 $|F|$, $|DF|$, $|D^2F|$ 在 B 上有界。

引理 1.1 存在一个常数 $\theta > 0$ 在 V 中满足

$$\frac{\partial(-M\circ F)}{\partial r_{ij}}(R,z)\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2, \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n, (R,z) \in B). \tag{11}$$

证明 固定 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 和选取充分小 $t > 0$ 满足 $(R + t\xi\otimes\xi, z) \in G$。由Courant 最小特征,我们推出特征值能被排序成

$$\lambda_k(R + t\xi\otimes\xi) \geqslant \lambda_k(R) \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

因为 $M = M(x) \in C^3$ 且 $M'(x) > 0$,由(6)知 $\frac{\partial(-M\circ F)}{\partial\lambda_k} \geqslant 0$,所以对某个 $\theta > 0$ 有

$$\begin{aligned}
&-M\circ F(R + t\xi\otimes\xi, z) + M\circ F(R,z) = \\
&\quad -M\circ f(\cdots, \lambda_k(R + t\xi\otimes\xi), \cdots, z) + M\circ f(\cdots, \lambda_k(R), \cdots, z) = \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial(-M\circ f)}{\partial\lambda_k}(\cdots, s\lambda_k(R + t\xi\otimes\xi) + (1-s)\lambda_k(R), \cdots, z)\mathrm{d}s \\
&\quad [\lambda_k(R + t\xi\otimes\xi) - \lambda_k(R)] \geqslant \theta\,\mathrm{trace}(R + t\xi\otimes\xi - R).
\end{aligned}$$

两边除 $t > 0$ 再让 $t \to 0^+$,我们得不等式(11)。

注 引理 1.1 说明非线性偏微分方程(8)在 g 附近是一致抛物的。

令 $v = g + th + w$,这里 $h = -M\circ F(D^2g, g)$。由(8)有在 Q 内

$$w_t - a_{ij}w_{x_ix_j} + cw = A(D^2w, w, x, t),$$

这里

$$a_{ij} = -M'\circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2g, g),$$

$$C = M'\circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2g, g).$$

和

$$\begin{aligned}
A(R, z, x, t) = &-M\circ F(D^2g + tD^2h + R, g + th + z) + M\circ F(D^2g, g) + \\
&M'\circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2g, g)r_{ij} + M'\circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2g, g)z.
\end{aligned} \tag{12}$$

因为 $|Dg|^2 = 1$ 和 Dg 是 ∂V 的法向量场。我们发现在 Σ 上有

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = a(Dw, x, t),$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 是 Σ 的单位外法向量场和

$$a(p, x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}|tDh + p|^2 - t\dfrac{\partial h}{\partial \boldsymbol{v}}, & (在\{d = \delta_0\} 上), \\ \dfrac{1}{2}|tDh + p|^2 - t\dfrac{\partial h}{\partial \boldsymbol{v}}, & (在\{d = -\delta_0\} 上)\cdot \end{cases} \tag{13}$$

根据(12),(13)我们有

$$\begin{cases} w_t - a_{ij}w_{x_ix_j} + cw = A(D^2w, w, x, t) & (在 Q 内), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} = a(Dw, x, t) & (在 \Sigma 上), \\ w = 0 & (在 V\times\{t = 0\} 上)\cdot \end{cases} \tag{14}$$

设 $0 < \alpha < \beta, 0 < \beta < 1$, 由文献[3]知我们可以定义几个范数:

$$|u|^0 = \sup\{|u(x,t)|\,|\,(x,t)\in Q\},\ |u|^{(1)} = |u|^{(0)} + |Du|^{(0)},$$

$$|u|^{(2)} = |u|^{(1)} + |D^2u|^{(0)} + |u_t|^{(0)},$$

$$\langle u\rangle_x^{(\beta)} = \sup\left\{\frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^\beta}\,\Big|\,(x,t),(y,t)\in Q, x\neq y\right\},$$

$$\langle u\rangle_t^{(\beta)} = \sup\left\{\frac{|u(x,t) - u(x,s)|}{|t-s|^\beta}\,\Big|\,(x,t),(x,s)\in Q, t\neq s\right\}\cdot$$

因此

$$\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} = |u|^{(0)} + \langle u\rangle_x^{(\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(\frac{\alpha}{2})},$$

$$\|u\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(Q)} = |u|^{(1)} + \langle Du\rangle_x^{(\alpha)} + \langle u\rangle_t^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle Du\rangle_t^{(\frac{\alpha}{2})}\cdot$$

$$\|u\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} = |u|^{(2)} + \langle Du\rangle_t^{\frac{1+\alpha}{2}} + \langle D^2u\rangle_x^{(\alpha)} + \langle D^2u\rangle_t^{(\frac{\alpha}{2})} + \langle u_t\rangle_t^{(\alpha/2)}\cdot$$

注意到

$$\|Du\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(Q)},\ \|D^2u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)},\ \|u_t\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant \|u\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)}\cdot$$

最后定义

$$\|u\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Sigma)} = \inf\{\|v\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(Q)}\,|\,v = u 在 \Sigma 上\}\cdot$$

我们考虑线性一致抛物偏微方程

$$\begin{cases} w_t - a_{ij}w_{x_ix_j} + cw = B & (在 Q 内), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{v}} = b & (在 \Sigma 上), \\ w = 0 & (在 V\times\{t = 0\} 上)\cdot \end{cases} \tag{15}$$

假设在 $\partial V\times\{t = 0\}$ 上·

$$b = 0 \tag{16}$$

引理 1.2[2] 假设 $B\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)$, $b\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Sigma)$ 和第零阶相容条件(16)成立, 那么偏微分方程(15)存在一个唯一解 $w\in C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)$ 且有

$$\|w\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C(\|B\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} + \|b\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}_{(\Sigma)}}) \tag{17}$$

常数 C 与 t_0 无关

设

$$X = \{w\in C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)\,|\,w = 0, 在 V\times\{t = 0\} 上\}\cdot$$

如果 $\hat{w}\in X$, 通过求解下面的偏微分方程, 我们定义一个映射 $T: \hat{w}\to w = T(\hat{w})$

$$\begin{cases} w_t - a_{ij}w_{x_ix_j} + cw = B(x,t) = A(D^2w, w, x, t) & (\text{在 } Q \text{ 内}), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = b(x,t) = a(Dw, x, t) & (\text{在 } \Sigma \text{ 上}), \\ w = 0 & (\text{在 } V \times \{t = 0\} \text{ 上}). \end{cases} \tag{18}$$

为了寻求映射 $T: X \to X$ 的一个不动点, 对 $r_0 > 0$ 我们设 $Y = \{w \in X \mid \|w\|_{C^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant r_0\}$.

引理 1.3　如果 $t_0, r_0 > 0$ 充分小, 那么 $T: Y \to Y$.

证明　选取任一函数 $\hat{w} \in Y$, 我们要证明(18) 的解 $w = T(\hat{w}) \in Y$, 即要证明, 对于充分小的 $t_0, r_0 > 0$ 有 $\|\hat{w}\|_{C^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant r_0$ 推出 $\|w\|_{C^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant r_0$.　由(12) 有

$$\begin{aligned} A(R, z, x, t) = &- tM' \circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2g, g)h_{x_ix_j} - \\ & tM' \circ F(D^2g, g)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2g, g)h - \\ & \int_0^1 (1-s)M' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \times \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij}\partial r_{kl}}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)\mathrm{d}s \times (th_{x_ix_j} + r_{ij})(th_{x_kx_l} + r_{kl}) - \\ & 2\int_0^1 (1-s)M' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \times \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij}\partial z}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)\mathrm{d}s \times (th_{x_ix_j} + r_{ij})(th + z) - \\ & \int_0^1 (1-s)M' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \times \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)\mathrm{d}s \times (th + z)^2 - \\ & \int_0^1 (1-s)M'' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \times \\ & [\frac{\partial F}{\partial r_{ji}}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)]^2 ds \times (th_{x_ix_j} + r_{ij})^2 - \\ & 2\int_0^1 (1-s)M'' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \\ & \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2g + stD^2h + sr, g + \\ & sth + sz) \times \mathrm{d}s(th_{x_ix_j} + r_{ij})(th + z) - \\ & \int_0^1 (1-s)M'' \circ F(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz) \times \\ & [\frac{\partial F}{\partial z}(D^2g + stD^2h + sR, g + sth + sz)]^2\mathrm{d}s \times (th + z)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

对于 $u, v \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)$, 有

$$\|uv\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)}\|v\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)} \tag{20}$$

和

$$\|t\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant Ct_0^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{21}$$

由(18), (19), (20), (21) 得

$$\|B\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C(r_0^2 + t_0^{1-\frac{\alpha}{2}})\cdot \tag{22}$$

类似的由(13)可得

$$\|b\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\bar{\Sigma})} \leqslant C(r_0^2 + t_0^{\frac{1-\alpha}{2}})\cdot \tag{23}$$

由(17),(22),(23),我们有

$$\|w\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C(r_0^2 + t_0^{\frac{1-\alpha}{2}}), \tag{24}$$

常数 C 不依赖于 r_0 和 t_0, 设 $r_0 \leqslant \frac{1}{2C}$. 则如果 t_0 充分小有

$$\|w\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant \frac{r_0}{2} + Ct_0^{\frac{1-\alpha}{2}} \leqslant r_0\cdot$$

引理得证.

引理 1.4 如果 $r_0, t_0 > 0$ 充分小, 则对所有的 $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in Y$. 有

$$\|T(\hat{w}_1) - T(\hat{w}_2)\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)}, \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \tag{25}$$

证明 任取 $\hat{w}_1\hat{w}_2 \in Y$, 那么 $\|\hat{w}_1\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)}, \|\hat{w}_2\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant r_0$. 设

$$\begin{cases} B_1(x,t) = A(D^2\hat{w}_1, \hat{w}_1, x, t), \\ b_1(x,t) = a(D\hat{w}_1, x, t), \end{cases}$$
$$\begin{cases} B_2(x,t) = A(D^2\hat{w}_2, \hat{w}_2, x, t), \\ b_2(x,t) = a(D\hat{w}_2, x, t), \end{cases}$$

记 $w_1 = T(\hat{w}_1), w_2 = T(\hat{w}_2)$, 则 w_1, w_2 分别是偏微分方程(18)中用 B_1, b_1; B_2, b_2 代替 B, b 的解.

由引理 1.2 有

$$\|w_1 - w_2\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C(\|B_1 - B_2\|)_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} + \|b_1 - b_2\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Sigma)})\cdot \tag{26}$$

如果 $u, v \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)$ 和 Φ 是光滑的且 $D\Phi$, $D^2\Phi$ 有界, 则

$$\begin{aligned} &\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant \\ &\quad (\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} + \|v\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} + 1)\|u - v\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)}\cdot \end{aligned} \tag{27}$$

由(19),(20),(21),(27),通过计算我们有

$$\|B_1 - B_2\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q)} \leqslant C(r_0 + t_0^{1-\frac{\alpha}{2}})\|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)} \tag{28}$$

类似地

$$\|b_1 - b_2\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Sigma)} \leqslant C(r_0 + t_0^{\frac{1-\alpha}{2}})\|\hat{w}_1 - \hat{w}_2\|_{C^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(Q)}\cdot \tag{29}$$

由(26),(28),(29),如果 $r_0, t_0 > 0$ 充分小, 我们有(25). 由 Banach 不动点定理, 我们有

定理 1.1 如果 $\delta_0, t_0 > 0$ 充分小, 对于偏微分方程(8)有唯一解.

2 根据主曲率函数零水平集的运动

这一节我们证明集合

$$\Gamma = \{x \in V \mid v(x,t) = 0\} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0) \tag{30}$$

是根据主曲率函数发展的光滑超曲面.

定理 2.1 在 Q 内, 我们有

$$|Dv|^2 = 1\cdot$$

证明　设 $w=|Dv|^2-1\in C^1(Q)\cap C^\infty$; 那么由(7) 和(8), 我们有

$$w=0(\text{在}\sum\text{上})\text{ 和 } w=0(\text{在 } V\times\{t=0\}\text{ 上})\tag{31}$$

微分(8) 我们有

$$v_{tx_k}=-M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2v,v)v_{x_ix_jx_k}$$
$$-M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2v,v)v_{x_k}\qquad(k=1,\cdots,n)\cdot$$

因此

$$w_t=2v_{x_k}v_{x_kt}=-2M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2v,v)v_{x_k}v_{x_ix_jx_k}-$$
$$2M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial z}|Dv|^2=2M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2v,v)v_{x_kx_i}v_{x_jx_k}-$$
$$M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2v,v)w_{x_ix_k}-2M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2v,v)|Dv|^2\cdot\tag{32}$$

但是在 Q 内有

$$-M'\circ F(D^2v,v)=-M\circ f(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v),$$

因此

$$-M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial z}(D^2v,v)=$$
$$-M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial f}{\partial z}(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v)=$$
$$M'\circ f(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v)\sum_{i=1}^{n}\frac{l\lambda_i^2(D_2v)}{(\lambda_i(D^2v)z-1)^2}\cdot\tag{33}$$

另一方面

$$-M'\circ F(D^2v,v)\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2v,v)v_{x_kx_i}v_{x_jx_k}=$$
$$M'\circ f(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\lambda_i}(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v)\lambda_i^2(D^2v)=$$
$$M'\circ f(\cdots,\lambda_i(D^2v),\cdots,v)\sum_{i=1}^{n}\frac{l\lambda_i^2(D^2v)}{(\lambda_i(D^2v)z-1)^2}\cdot\tag{34}$$

由(33), (34) 得

$$w_t=\frac{\partial(-M\circ F)}{\partial r_{ij}}w_{x_ix_j}+2\frac{\partial(-M\circ F)}{\partial z}(D^2v,v)w\cdot\tag{34}$$

由引理1.1知, 这是一个一致抛物方程, 由(31)知在 Q 的边界上 $w=0$, 我们推出在 Q 内 $w=0$•

由(30), (31) 我们看到 $\Gamma=\{(x,t\in Q\mid v=0)\}$ 是一个 $\mathbf{R}^{n+1}\cap Q$ 中的光滑超曲面和每个 $\Gamma_t=\{x\in V\mid(x,t)\in Q\}$ 是一个在 V 中的光滑超曲面•

定理2.2　曲面 $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant t_0}$ 构成从 Γ_0 出发, 根据主曲率函数 $M(l_1k_1+\cdots,+l_{n-1}k_{n-1})$ 的经典运动•

证明　对 $[0,t_0]$ 中任一点 t, 由方程(8) 知在 Γ_t 上有

$$v_t=-M\circ F(D^2v,0)=-M(-l_1\lambda_1-\cdots-l_n\lambda_n)=$$
$$-M(l_1k_1+\cdots,+l_{n-1}k_{n-1})\cdot$$

现在固定 $t \in [0, t_0]$, $x \in \Gamma_t$, 和按照常微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = M(l_1 k_1 + \cdots l_{n-1} k_{n-1})\boldsymbol{v}, \\ x(t) = x, \end{cases}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} v(x(s), s) = Dv \cdot \boldsymbol{v} M(l_1 k_1 + \cdots + l_{n+1} k_{n-1}) + v_t = 0 \cdot$$

因此

$$v(x(s), s) = 0 \cdot$$

这说明$\{\Gamma_t\}_{0 \leqslant t \leqslant t0}$是根据主曲率函数$M(l_1 k_1 + \cdots + l_{n-1} k_{n-1})$的发展•

[参 考 文 献]

[1] Brakke K. The Motion of a Surface by Its Curvature [M]. Mathematical Notes 20 , Princeton, NJ: Princeton University Press, 1978.

[2] Evans L C, Spruck J. Motion of levelsets by mean curvature[J]• Transactions of the Amer , Math, soc, 1992, **33**(1): 321—332•

[3] Ladyzhenskaja O, A, Solonnikov V A, Uraltseva N N. Linear and Quasilinear Equations of Paraboic Type[M]. Providence R I: Amer Math Soc 1968.

Motion of Level Sets by a Generalized Mean Curvature

ZHENG Yong_ai[1,2], LIU Zu_han[1]

(1. Department of Mathematics ,Yangzhou University, Yangzhou 225006, P RChina;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China;)

Abstract: Short time existence and uniqueness for the classical motion are studied by the function of the principal curvatures of a smooth, surface and the Evans and Spruck' s results are generalized•

Key words: Level set; mean curvature; signed distance function; principal curvature