应用数学和力学, 第 23 卷 第 10 期(2002 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 10_1041_06

一类三阶非线性微分方程的非振荡解

P. 特牟特克[1], A. 提耳牙克[2]

(1 尔塞耶士大学, 艺术与科学学院, 数学系, 土耳其; 2 噶热大学, 艺术与科学学院, 数学系, 土耳其)

(钱伟长推荐)

摘要: 给出了一类三阶非线性微分方程存在非振荡解的充分条件, 使得 Parhi 准则更加一般化 在一些特殊情况下, 这些结论适合于更弱的条件

关 键 词: 微分方程; 非线性; 非振荡解; Parhi 准则

中图分类号: O175 12 文献标识码: A

引 言

在常微分方程和延迟微分方程理论中, 我们往往对寻求非振荡解的充分条件感兴趣 本文将研究下列形式的方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\ (s)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(r(s)\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\right]+\ q(s)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\ +\ p(s)x\ \ =f(s), \tag{1}$$

这里 、r、q、p 和 f 是在区间 $[0,\ \ )$ 内的连续实函数, 并且有 $(s)>0$, $r(s)>0$ 和 $f(s)\ \ 0$; >0 和 >0 是两个奇数之比

很多作者研究了方程(1) 的一些特殊情况[1, 2] Birkhoff[3], Gregu [4] 和 Hanan[5] 研究了 $= \ = 1$, $(s)=r(s)=1$ 和 $f(s)=0$ 时的线性情形; Philos[6] 考虑了 $(s)=r(s)=1$, $= \ = 1$ 和 $f(s)=0$ 的情形; Parhi[7] 研究 $= \ = 1$ 的情形 最近 Cecchi[8] 还研究了 $= \ = 1$ 和 $q(s)=0$ 的情形

Erbe[9] 和 Heidel[10] 研究了当 $=1$, $r(s)=1$ 和 $f(s)=0$ 时的非线性情形; Parhi[11~15] 研究了 $r(s)=1$ 时的非线性情形

似乎还没有人研究过方程(1) 的非线性三阶微分方程 本文将给出方程(1) 存在非振荡解的充分条件 得到的结果使文献[7, 11~15] 的一些准则更加一般化 同时在一些特殊情况下, 我们得到的一些结果适合于比文献[12, 13, 15] 更弱的条件

直接寻求方程(1) 的存在非振荡解的充分条件似乎是很困难的 如果 $\int_0 \frac{\mathrm{d}s}{r(s)}=\ \ $, 那么引进一变换: $t=\int_0^s\frac{\mathrm{d}u}{r(u)}$, 使方程(1) 转换成这样一个方程, 它的充分条件是已知的 在第 1 节我们得到了一些比 Parhi 更好的结果; 在第 2 节我们将研究上述所提的转换方法

本文只讨论这样的情形: 在 $[T,\ \ )$ 区间内方程(1) 存在实解, 其中 $T\ \ 0$ 依赖于一个特

收稿日期: 2001_08_28
本文原文为英文, 由何吉欢 译

解, 并且是非平凡的 我们说方程(1) 的解 $x(s)$, s $[T,\ )$ 是非振荡的, 如果存在 s_1 T, 使得当 s s_1 时, $x(s)$ 0; 我们说方程(1) 的解 $x(s)$ 是振荡的, 如果对于任何 s_1 T, 存在 s_2 和 s_3 满足 $s_1 < s_2 < s_3$, 使得 $x(s_2) > 0$ 和 $x(s_3) < 0$; 如果说解是Z_型的, 是指它存在任意大的零解, 但它最终是非负或非正

1 方程(2)存在非振荡解的充分条件

在这一节我们考虑

$$(\ \ (t)y\ ) + Q(t)y\ \ + P(t)y\ \ = F(t), \tag{2}$$

这里 $y = y(t)$, P、Q、F 和 是在区间[0,) 内的连续实函数, 并且有 $(t) > 0$ 和 $F(t)$ 0

我们先给出一些已知的定理:

定理1 1 设 $P(t)$ 0, $Q(t)$ 0, 如果对于大的 t 成立 $Q(t) + tP(t)$ 0, 那么当 = 时, 方程(2) 的所有解都是非振荡的

定理1 2 设 $P(t)$ 0, $Q(t)$ 0, $Q(t)$ 是一次连续可微函数 如果当 $Q\ (t)$ 0 时, 对于大的 t 和 $\lim_t$ $Q\ (t)/P(t) =$ 成立 $Q\ (t) + P(t) > 0$, 那么当 1, = 1 时方程(2) 所有的有界解都是非振荡的

定理1 1 和1 2 的证明见文献[14]

定理1 3 设 $P(t)$ 0, $Q(t)$ 0 如果对于大的 t 有 $F(t)$ $M\ P(t)$, $M > 0$, 那么方程(2) 所有的有界解 $y(t)$ 是非振荡的, 当 $y(t) > 0$ 时

定理1 3 的证明见文献[12]

定理1 4 设 $P(t)$ 0, $Q(t)$ 0, P 和 F 是一次可微连续函数 如果 $P\ (t)$ 0, $F\ (t)$ 0, 并且$(\ \ + 1)F(t) + P\ (t)$ 0, 那么方程(2) 的所有解 $y(t)$ 最终是非振荡的, 当 $|\ y(t)\ |$ 1 时

定理1 4 的证明见文献[11]

当 $Q(t)$ 0, 下面的定理改善了文献[7] 中的定理3 5, 并且其假设比文献[13] 的定理2 3 要弱

定理1 5 设 $P(t)$ 0, $Q(t)$ 0, P 和 F 是一次可微连续函数 如果 $P\ (t)$ 0, $F\ (t)$ 0, 并且$(\ \ + 1)F(t)$ $P(t)$, 那么方程(2) 的所有解 $y(t)$ 最终是非振荡的, 当 $|\ y(t)\ |$ 1 时

证明 设 $y(t)$ 是方程(2) 在$[T,\ )$ 区间内的一个解, 其中 T 0, 并且当 t $T_1 > T$ 时 $|\ y(t)\ |$ 1 假设 $y(t)$ 是非负的Z_型解 设 a 和 b 是 $y(t)$ 的两个相邻的零解$(T_1$ $a < b)$ 方程(2) 乘以 $y\ (t)$, 我们得到

$$\left[\ \ (t)y\ (t)y\ (t) + \frac{1}{\ \ +1}P(t)y^{\ \ +1}(t) - F(t)y(t)\right] =$$

$$\ \ (t)y^{\ 2}(t) + \frac{1}{\ \ +1}P\ (t)y^{\ \ +1}(t) - F\ (t)y(t) - Q(t)y^{\ \ +1}(t) \tag{3}$$

对方程(3) 从 a 到 b 积分得

$$0 = {}_a^b\left[\ \ (t)y^{\ 2}(t) + \frac{1}{\ \ +1}P\ (t)y^{\ \ +1}(t) - F\ (t)y(t) - Q(t)y^{\ \ +1}(t)\right]\mathrm{d}t > 0$$

这与假设相矛盾

接下来我们假设 $y(t)$ 是非正的Z_型解, 它具有两个相邻的零解 a 和 b $(T_1 \quad a< \quad b)$ 这样存在一个 $c \quad (a, b)$, 使得 $y\ (c) = 0$ 和 $y\ (t) > 0,\ t \quad (c, b)$ 方程(2) 乘以 $y\ (t)$, 我们得到

$$(t)y\ (t)y\ (t) = \quad (t)y\ ^2(t) - Q(t)y\ ^{+1}(t) -$$
$$P(t)y\ (t)y\ (t) + F(t)y\ (t) \qquad (4)$$

对方程(4) 从 c 到 b 积分得

$$0 = \int_c^b [\ (t)y^2(t) - Q(t)y\ ^{+1}(t) -$$
$$P(t)y\ (t)y\ (t) + F(t)y\ (t)]\mathrm{d}t > 0$$

这与假设相矛盾

若设 $y(t)$ 是振荡的, a、b、a 是 $y(t)$ 的任意 3 个相邻零解$(T_1 \quad a < \quad b < \quad a\ )$, 并且当 $t \quad (a, b)$ 时有 $y\ (a) \quad 0, y\ (b) \quad 0, y\ (a\ ) \quad 0, y(t) < 0$; 当 $t \quad (b, a\ )$ 时, $y(t) > 0$ 因此存在点 $c \quad (a, b)$ 和 $c \quad (b, a\ )$, 使得当 $t \quad (c, c\ )$ 时 $y\ (c) = 0, y\ (c\ ) = 0, y\ (t) > 0$ 我们考虑两种情况, 既 $y\ (b) \quad 0$ 和 $y\ (b) > 0$

当 $y\ (b) \quad 0$ 时, 对方程(4) 从 c 到 b 积分得

$$0 \quad (b)y\ (b)y\ (b) = \int_c^b [\ (t)y\ ^2(t) - Q(t)y\ ^{+1}(t) -$$
$$P(t)y\ (t)y\ (t) + F(t)y\ (t)]\mathrm{d}t > 0$$

这与假设相矛盾

当 $y\ (b) > 0$ 时, 对方程(4) 从 b 到 c 积分得

$$- \quad (b)y\ (b)y\ (b) = \int_b^c [\ (t)y^2(t) - Q(t)y\ ^{+1}(t) -$$
$$P(t)y\ (t)y\ (t) + F(t)y\ (t)]\mathrm{d}t \qquad (5)$$

但

$$\int_b^c P(t)y\ (t)y\ (t)\mathrm{d}t = \frac{1}{+\ 1}\left[P(t)y\ ^{+1}(t)\Big|_b^c - \int_b^c P\ (t)y\ ^{+1}(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$\frac{1}{+\ 1}P(c\ )y\ ^{+1}(c\ )$$

和

$$\int_b^c F(t)y\ (t)\mathrm{d}t = F(t)y(t)\Big|_b^c - \int_b^c F\ (t)y(t)\mathrm{d}t \quad F(c\ )y(c\ )$$

因此

$$\int_b^c F(t)y\ (t)\mathrm{d}t - \int_b^c P(t)y\ (t)y\ (t)\mathrm{d}t$$
$$F(c\ )y(c\ ) - \frac{1}{+\ 1}P(c\ )y\ ^{+1}(c\ )$$
$$\frac{P(c\ )}{+\ 1}y(c\ ) - \frac{1}{+\ 1}P(c\ )y\ ^{+1}(c\ ) =$$
$$\frac{1}{+\ 1}P(c\ )[y(c\ ) - y\ ^{+1}(c\ )] \quad 0$$

既然当 $t \quad T_1$ 时有 $|\ y(t)\ | \quad 1$, 所以由方程(5) 可得

$$0 \quad - \quad (b)y\ (b)y\ \ (b) > 0$$

这与假设矛盾

因此 $y(t)$ 是非振荡的, 定理证毕

评注1 1 如果在定理1 1 中 $F(t)$ 0, 那么 $P(t)$ 0, 因此这一定理不适合于下列方程:

$$(\ (t)y\ )\ +\ Q(t)y\ +\ P(t)y\ =\ 0$$

定理1 6 如果 $Q(t)$ 在 t 很大时, 不改变符号, $F(t) > 0$, $\lim_t$ $F(t)/|P(t)| =$, 那么方程(2) 的所有有界解都是非振荡的

证明 设当 t t_0 时, $Q(t)$ 0 又设 $y(t)$ 是方程(2) 的有界解, 并且有 $|y(t)|$ M 由给定的条件, 存在一个 t_1 t_0, 使得当 t t_1 时 $F(t)$ M $|P(t)|$ 若设当 t (t_2, t_3) 时 $y(t)$ 是振荡的或 Z_型的 对方程(2) 从 t_2 到 t_3 积分, 我们得:

$$0 > \ (t)y\ (t)\Big|_{t_2}^{t_3} = \ _{t_2}^{t_3}F(t)\mathrm{d}t - \ _{t_2}^{t_3}Q(t)y\ (t)\mathrm{d}t - \ _{t_2}^{t_3}P(t)y\ (t)\mathrm{d}t$$

$$_{t_2}^{t_3}F(t)\mathrm{d}t - \ _{t_2}^{t_3}|\ P(t)y\ (t)|\ \mathrm{d}t \quad _{t_2}^{t_3}(F(t) - M\ |P(t)|)\mathrm{d}t > 0$$

这与假设相矛盾 所以 $y(t)$ 是非振荡的

如果当 t t_0 时, $Q(t)$ 0, 那么我们可以选择 t_2 和 t_3($t_1 < t_2 < t_3$), 从而得 $y\ (t_2) = 0 = y\ (t_3)$ 和 $y\ (t)$ 0, t (t_2, t_3), 这样就产生了矛盾

评注1 2 在定理1 6 中我们对 $P(t)$ 没有符号的限制, 并且这里的假设要比文献[12] 中的定理2 3 和文献[15] 中的定理2 3 要弱

2 变换方法和方程(1) 存在非振荡解的充分条件

在本节中将把方程(1) 转化为方程(2) 的形式 设 $_0\frac{\mathrm{d}u}{r(u)} =$, 置 $R(s) = \ _0^s\frac{\mathrm{d}u}{r(u)}$ 这样 R: [0,) [0,) 是一个增函数, 即当 s 时有 $R(s)$ 因此 R^{-1} 是存在的 置 $t = R(s)$, 即 $s = R^{-1}(s)$ 置 $y(t) = x(R^{-1}(t)) = x(s)$, 我们得

$$r(s)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad 和 \quad (s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(r(s)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{(s)}{r(s)}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\ (s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(r(s)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\right] = \frac{1}{r(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{(s)}{r(s)}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]$$

置 $(t) = (R^{-1}(t))/r(R^{-1}(t))$, 方程(1) 变成方程(2), 其中

$$Q(t) = q(R^{-1}(t))/[r(R^{-1}(t))]^{-1},\ P(t) = r(R^{-1}(t))p(R^{-1}(t))$$

和 $$F(t) = r(R^{-1}(t))f(R^{-1}(t))$$

根据定理1 1~ 1 6, 我们得到适合于方程(1) 的相应的定理

定理2 1 设 $p(s)$ 0, $q(s)$ 0, $R(s) = \ _0^s\frac{\mathrm{d}u}{r(u)}$ 如果对于大的 s 成立 $q(s) + R\ (s)r\ (s)p(s)$ 0, 那么当 $=$ 时, 方程(1) 的所有解都是非振荡的

定理2 2 设 $p(s)$ 0, $q(s)$ 0, $q(s)$ 是一次连续可微函数# 如果当 $qc(s)$ \ 0 时, 对于大的 s 和 $\lim_{s\ y\ ]}$ $qc(s)/p(s) =]$, $qc(s) + p(s) > 0$, 那么当 A \ 1, $B =$ 1 时方程(1) 所有的有界解都是非振荡的#

定理213 设 $p(s)$ \ 0, $q(s)$ [0, 如果对于大的 s 有 $f(s)$ \ $M^A p(s)$, $M > 0$, 那么方程(1)

的所有有界解 $x(s)$ 是非振荡的, 当 $x(s) > 0$ 时#

定理 214 设 $p(s)$ [0, $q(s)$ [0, rp 和 rf 是一次可微连续函数# 如果 $(rp)c(s)$ \ 0, $(rf)c(s)$ \ 0, 并且 $(A+1)f(s)+p(s)$ \ 0, 那么方程(1) 的所有解 $x(s)$ 最终是非振荡的, 当 | $x(s)$ | [1 时#

定理 215 设 $p(s)$ \ 0, $q(s)$ [0, rp 和 rf 是一次可微连续函数# 如果 $(rp)c(s)$ \ 0, $(rf)c(s)$ [0, 并且 $(A+1)f(s)$ \ $p(s)$, 那么方程(1) 的所有解 $x(s)$ 最终是非振荡的, 当 | $x(s)$ | < 1 时#

定理 216 如果 $q(s)$ 在 s 很大时, 不改变符号, $f(s) > 0$, 和 $\lim_{sy]} f(s)/|p(s)| =]$, 那么方程(1) 的所有有界解都是非振荡的#

[参 考 文 献]

[1] Gregu M. Third Order Linear Differential Equations[M]. Dordrecht, Boston, Lancaster: D Reidel Publishing Company, 1987.

[2] Swanson C A. Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations[M]. New York: A P, 1968.

[3] Birkhoff G D. On solutions of the ordinary linear differential equations of the third order[J]. Ann Math, 1911, 12: 103) 127.

[4] Gregu M. On some properties of the solutions of a homogeneous linear differential equation of the third order[J]. Mat Fiz Casopis Slovensk Akad Vied, 1955, 5: 73) 78.

[5] Hanan M. Oscillation criteria for third order linear differential equations[J]. Pacific J Math, 1961, 11: 919) 944.

[6] Philos Ch G. Oscillation and asymptotic behaviour of third order differential equations[J]. Bull Inst Math Acad Sinica, 1983, 11(2): 141) 160.

[7] Parhi N. Nonoscillation of solutions of a class of third order differential equations[J]. Acta Math Hungar, 1989, 54(1_2): 79) 88.

[8] Cecchi M, D sl Z, Marini M. On the qualitative behaviour of solutions of third order differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1996, 197(3): 749) 766.

[9] Erbe L. Existence of oscillatory solutions and asymptotic behaviour for a class of third order linear differential equations[J]. Pacific J Math, 1976, 64(2): 369) 385.

[10] Heidel J W. Qualitative behaviour of solutions of a third order nonlinear differential equation[J]. Pacific J Math, 1968, 27: 507) 526.

[11] Parhi N. Nonoscillatory behaviour of solutions of nonhomogeneous third order differential equations [J]. Applicable Analysis, 1981, 12(4): 273) 285.

[12] Parhi N, Parhi S. Oscillation and nonoscillation theorems for nonhomogeneous third order differential equations[J]. Bulletin Inst Math Academia Sinica, 1983, 11(2): 125) 139.

[13] Parhi N, Parhi S. Nonoscillation and asymptotic behaviour for forced nonlinear third order differential equations[J]. Bulletin Inst Math Academia Sinica, 1985, 13(4): 367) 384.

[14] Parhi N, Parhi S. On the behaviour solutions of the differential equations $(r(t)yd)c + q(t)yc^{B} + p(t)y^{A} = f(t)$ [J]. Annales Polonici Mathematici, 1986, 47(2): 137) 148.

[15] Parhi N, Parhi S. Qualitative behaviour of solutions of forced nonlinear third order differential equations[J]. Riv Math Univ Parma, 1987, 13(4): 201) 210.

[1], Ayd n Tiryaki[2]
(11 Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science,
Erciyes University, 38039, Kayseri, Turkey;
2. Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science, Gazi University,
Teknikokullar 06500 Ankara, Turkey)

Abstract: Sufficient conditions for the nonoscillatory solutions of a class of third order nonlinear differential equations are presented. The results obtained generalize some criteria given by Parhi. In some special cases, some of these results contain weaker conditions.

Key words: differential equation; nonlinear; nonoscillatory solution; Parhi criteria