文章编号: 1000_0887(2002) 10_1061_12

定常的 Navier_Stokes 方程的非线性 Galerkin 混合元法及其后验估计*

罗振东[1,2], 朱 江[2]

(1. 首都师范大学 数学系, 北京 100037;
2. 中国科学院 大气物理研究所 国际气候与环境科学研究中心, 北京 100029)

(许政范推荐)

摘要: 提出了定常的 Navier_Stokes 方程的一种非线性 Galerkin 混合元法, 并导出非线性 Galerkin 混合元解的存在性和误差估计及其后验误差估计•

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 非线性 Galerkin 混合元法; 误差估计; 后验误差估计
中图分类号: O241. 4 文献标识码: A

引 言

非线性 Galerkin 方法是一种求解具有耗散项的偏微分方程的近似解的多重水平方法• 该方法是将未知量分裂成两项(或多项) , 它们分别属于具有不同网格尺度的离散空间, 在计算过程中, 对于“小尺度”的分量引入简化逼近, 使得该方法变得很便利• 这些方法原先主要是在 Fourier 谱离散化时由 Foias_Manley_Temam[1]、Marion_Temam[2]、Foias_Jolly_Kevrekidis_Titi[3] 和 Devulder_Marion_Titi[4] 提出的• 关于非线性 Galerkin 方法的有限元逼近是 Marion 等人[5~6] 首先提出的• Ait Ou Ammi_Marion[7] 将非线性 Galerkin 方法应用于混合元法中, 用来处理非定常的 Navier_Stokes 问题• 李开泰等人[8~9] 又将此方法用于处理加罚的 Navier_Stokes 方程• 我们[10~11] 又将非线性 Galerkin 混合元法推广应用于非定常的热传导_对流问题的半离散和全离散化格式, 又在[12] 中提出了定常的 Navier_Stokes 方程的一种非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法• 虽然李冠成等人[13] 已经对修改的定常的 Navier_Stokes 方程: $-\nu\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + 0.5(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ 提出了一种计算方法, 但是回避原来的 Navier_Stokes 方程带有压力项和不可压条件的本质性困难•

在计算流体力学中, 人们通常面临既要提高精度而又不增加不必要的自由度的问题• 因此, 必须修改网格以保证在关键的部位网格足够地细而在其余部分保留网格合理地粗• 局部

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2002_04_01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071052, 49776283) ; 北京市教委科技发展计划项目; 中国科学院“百人计划”项目; 中国科学院九五重点项目(K2952_51_434) ; 北京市优秀人才专项经费资助项目; 北京市自然科学基金资助项目
作者简介: 罗振东(1958—) , 男, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 有限元方法及其应用
(E_mail: luozhd@ mail. cnu. edu. cn) .

的后验估计子自然是判别关键的部位的有用工具, 而后验估计子仅仅利用已知条件和已求出的数值解本身• 虽然已经有许多文献[14~19]构造了几种计算流体力学问题的后验估计子, 然而对于不可压的的Navier_Stokes 方程的严密结论[20~24]只是最近才变为有效•

本文的目的是首先导出定常的不可压的 Navier_Stokes 方程的一种非线性 Galerkin 混合元法, 然后给出一种后验估计子• 本文的安排如下: 第 1 节重述定常的不可压的 Navier_Stokes 方程混合元解的一些经典的结果; 第 2 节和第 3 节分别给出非线性Galerkin 混合元法的存在性和收敛性; 最后第 4 节提出基于非线性 Galerkin 混合元法的后验估计子, 并证明这些后验估计子是真正误差的整体上界(相差一个常数倍) 而且具有"局部的残数型"• 虽然我们的后验估计子是与[24] 的后验估计子相似, 但是我们的非线性Galerkin 格式是与[24] 的两水平方法是有着本质的区别• 特别是我们的后验估计子适合于奇性问题, 而[24] 的后验估计子仅仅适合于非奇性的问题•

1　经典的混合有限元法

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是边界为 $\partial\Omega$ 的有界区域• 考虑下面的定常的 Navier_Stokes 方程:

问题(Ⅰ)　求 $\boldsymbol{u}:=(u_1,u_2),p$ 满足

$$\begin{cases}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \boldsymbol{u}=0 & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 表示速度向量, p 为压力, $\boldsymbol{f}:=(f_1,f_2)$ 为体力, ν为 Reynolds 数的倒数是常数•

本文使用的 Sobolev 空间是熟知的• 所用的 C 表示与网格参数h 和H 无关, 但是可能与 Ω、Reynolds 数或其它参数有关的正的常数, 不同的地方出现可能不等•

问题(Ⅰ) 变分形式叙述为

问题(Ⅰ*)　求 $\hat{\boldsymbol{u}}:=(\boldsymbol{u},p)\in\bar{X}$ 满足

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b(p,\boldsymbol{v})+b(q,\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})\qquad\forall(\boldsymbol{v},q)\in\bar{X},\tag{2}$$

其中

$$\bar{X}:=X\times M,\ X:=H_0^1(\Omega)^2,\ M:=L_0(\Omega)=\left\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\,\mathrm{d}x=0\right\},$$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\nu\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x,\ \ b(q,\boldsymbol{v})=\int_\Omega q\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x,$$

$$a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{2}\left[u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j-u_i\frac{\partial w_j}{\partial x_i}v_j\right]\mathrm{d}x\qquad\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X•$$

三线性型 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 有下面性质(可参见[7~9,25~27]): $\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X$,

$$\begin{cases}a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{v});\ a(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0;\\ |a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_0^{1/2}|\boldsymbol{u}|_1^{1/2}(|\boldsymbol{v}|_1^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_0^{1/2}|\boldsymbol{w}|_1+\\ \qquad\qquad|\boldsymbol{v}|_1\|\boldsymbol{w}\|_0^{1/2}|\boldsymbol{w}|_1^{1/2});\\ |a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C|\boldsymbol{u}|_1(|\boldsymbol{v}|_1\|\boldsymbol{v}\|_0\|\boldsymbol{w}\|_0|\boldsymbol{w}|_1)^{1/2}+\\ \qquad\qquad C|\boldsymbol{v}|_1(\|\boldsymbol{u}\|_0|\boldsymbol{u}|_1\|\boldsymbol{w}\|_0|\boldsymbol{w}|_1)^{1/2},\end{cases}\tag{3}$$

其中 C 是与 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 无关的常数, 定义

$$N:=\sup_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X}\frac{a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{u}|_1\cdot|\boldsymbol{v}|_1\cdot|\boldsymbol{w}|_1};\quad\|\boldsymbol{f}\|_*:=\sup_{\boldsymbol{v}\in X}\frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_1}•\tag{4}$$

从[25, 26]可得到下面的结果•

定理 1.1　如果$\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^2$, 那么问题(Ⅰ*)至少存在一个解, 又如果$\nu^{-2}N\,\|\boldsymbol{f}\|_* < 1$, 那么解是唯一的, 并有下面的先验估计

$$|\boldsymbol{u}|_1 \leqslant \nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_* =: R•$$

设$\left\{\mathscr{T}_h\right\}$为$\Omega$的拟一致三角形剖分(可参见[28]或[29]), 即令$h := \max_{K\in\mathscr{T}_h}\left\{h_K;\ h_K := \mathrm{diam}(K)\right\}$, 则存在一个与$h$无关的常数$C$使得$\forall K \in \mathscr{T}_h$都有$h \leqslant Ch_K$•

下面分别引进X和M的有限元空间X_h和M_h•　设$X_h \subset X$(至少为分片m次多项式向量空间, 其中$m > 0$为整数), $M_h \subset M$(为分片$(m-1)$次多项式空间)•　记$\mathscr{X}_h = X_h \times M_h$, 并定义$X_h$的子空间$V_h$如下

$$V_h = \left\{\boldsymbol{v}_h \in X_h;\ b(q_h, \boldsymbol{v}_h) = 0,\ \ \forall q_h \in M_h\right\}• \tag{5}$$

假定(X_h, M_h)满足下面的逼近性质: $\forall \boldsymbol{v} \in [H^{m+1}(\Omega)^2 \cap X]$、$\forall q \in M \cap H^m(\Omega)$,

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h\in X_h}\|\nabla(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)\|_0 \leqslant Ch^m|\boldsymbol{v}|_{m+1};\quad \inf_{q_h\in M_h}\|q-q_h\|_0 \leqslant Ch^m|q|_m, \tag{6}$$

并满足所谓的 inf_sup 条件, 即$\forall q_h \in M_h$, 存在$\boldsymbol{v}_h \in X_h$满足

$$b(q_h, \boldsymbol{v}_h) \geqslant \beta\|q_h\|_0 • \|\nabla \boldsymbol{v}_h\|_0, \tag{7}$$

其中β是一个与h无关的常数•

那么, 问题(Ⅰ*)的经典的 Galerkin 混合元格式叙述为

问题(Ⅰ$_h$)　求$\hat{\boldsymbol{u}}_h := (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \mathscr{X}_h$满足

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + a_1(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) - b(p_h, \boldsymbol{v}) + b(q, \boldsymbol{u}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})\qquad \forall \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathscr{X}_h, \tag{8}$$

其中$\hat{\boldsymbol{v}} := (\boldsymbol{v}, q)$•

下面的结果是经典的(可参见[25, 26])•

定理 1.2　在(6)~(7)的假定条件下, 如果$\boldsymbol{f} \in (H^{-1}(\Omega))^2$, $\nu^{-2}N\,\|\boldsymbol{f}\|_* < 1$, 那么存在一个常数$h_0 > 0$使得对于所有的$h \leqslant h_0$, 问题(Ⅰ$_h$)都存在唯一的解$\hat{\boldsymbol{u}}_h = (\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \mathscr{X}_h$满足

$$|\boldsymbol{u}_h|_1^2 \leqslant \nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_* = R,\ \ |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_1 + \|p-p_h\|_0 \leqslant Ch^m, \tag{9}$$

其中$\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, p) \in [H_0^1(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega)]^2 \times [H^m(\Omega) \cap M]$是问题(Ⅰ)的精确解, C是与$|\boldsymbol{u}|_{m+1}$和$|p|_m$有关的常数•

满足(6)~(7)的有限元空间X_h和M_h的例子可参看[25, 27, 28, 30]•

2　非线性 Galerkin 混合元法的存在性

设h和H($H \gg h > 0$)是两个趋于 0 参数•　考虑有限元空间X_h、X_H($X_H \subset X_h$)、X_h^H($X_h^H \subset X_h$)和M_h, 前三个空间的关系如下

$$X_h := X_H + X_h^H,\ \ X_H := \mathrm{R}_H X_h,\ \ X_h^H := (I - \mathrm{R}_H)X_h, \tag{10}$$

其中R_H是从X到X_H的 Ritz 正交算子, 即对于所有的$\boldsymbol{v} \in X$满足

$$(\nabla(\boldsymbol{v} - \mathrm{R}_H\boldsymbol{v}), \nabla \boldsymbol{v}_H) = 0\qquad \forall \boldsymbol{v}_H \in X_H, \tag{11}$$

X_h和M_h是对应于网格尺寸为h的细网格有限元空间, 而X_H是对应于网格尺寸为H的粗网格有限元空间•　记

$$\mathscr{X}_H := X_H \times M_h;\ \mathscr{X}_h^H := X_h^H \times M_h•$$

下面关于空间X_H、X_h^H和算子R_H的性质将经常被使用, 这些性质可由(11)及对偶原理导出(可

参见[28, 29])•

引理 2.1 空间 X_H、X_h^H 和算子 R_H 满足: $\forall \boldsymbol{v} \in H^l(\Omega)^2 \cap X$,

$$| \boldsymbol{v} - R_H \boldsymbol{v} |_s \leqslant C H^{l-s} | \boldsymbol{v} |_l \qquad s = 0, 1, s \leqslant l \leqslant m + 1; \tag{12}$$

$$| R_H \boldsymbol{v} |_1 \leqslant | \boldsymbol{v} |_1, \quad \forall \boldsymbol{v} \in X; \quad \| \chi \|_0 \leqslant C H | \chi |_1, \quad \forall \chi \in X_h^H; \tag{13}$$

$$(\nabla \phi, \nabla \chi) = 0, \ | \phi |_1^2 + | \chi |_1^2 = | \phi + \chi |_1^2 \qquad \forall \phi \in X_H, \chi \in X_h^H• \tag{14}$$

现在引进非线性 Galerkin 混合有限元格式:

问题(I^h) 求 $\boldsymbol{u}^h := \boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h$ 和 $p^h \in M_h$, 其中 $\boldsymbol{u}^h \in X_h$、$\boldsymbol{u}^H \in X_H$、$\boldsymbol{w}^h \in X_h^H$, 满足

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{u}^H; \boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{u}^H; \boldsymbol{w}^h, \phi) - \\ & \qquad b(p^h, \phi) + b(q, \boldsymbol{u}^H) = (\boldsymbol{f}, \phi) \qquad \forall \phi \in X_H, q \in M_h; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{w}^h, \chi) + a_1(\boldsymbol{u}^H; \boldsymbol{u}^H, \chi) - b(p^h, \chi) + b(q, \boldsymbol{w}^h) = (\boldsymbol{f}, \chi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \chi \in X_h^H, q \in M_h• \end{aligned} \tag{16}$$

定理 2.2 在定理 1.2 的条件下, 存在一个常数 H^* 使得对于任意的 $H \leqslant H^*$ 问题(I^h) 都存在唯一的解 $\hat{\boldsymbol{u}}^h := (\boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h, p^h) \in \hat{X}_h$ 满足

$$| \boldsymbol{u}^h |_1 \leqslant \nu^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_* = R• \tag{17}$$

证明 下面利用 Brouwer 不动点定理证明定理 2.2, 证明分为下面 3 步•

(i) 对于给定的 $\hat{\boldsymbol{v}}_h = (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h) \in \hat{X}_h$, 其中 $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{v}_H + \boldsymbol{w}_h$、$\boldsymbol{v}_H \in X_H$、$\boldsymbol{w}_h \in X_h^H$, 考虑问题($\mathrm{I}^h$) 下面的线性化问题:

求 $\hat{\boldsymbol{u}}^h = (\boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h, p^h) \in \hat{X}_h$ 使得

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{v}_H; \boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{v}_H; \boldsymbol{w}^h, \phi) - \\ & \qquad b(p^h, \phi) + b(q, \boldsymbol{u}^H) = (\boldsymbol{f}, \phi) \qquad \forall \phi \in X_H, q \in M_h; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{w}^h, \chi) + a_1(\boldsymbol{v}_H; \boldsymbol{u}^H, \chi) - b(p^h, \chi) + b(q, \boldsymbol{w}^h) = (\boldsymbol{f}, \chi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \chi \in X_h^H, q \in M_h• \end{aligned} \tag{19}$$

令

$$\begin{aligned} & B(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{w}_h; [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h], [\phi, \chi]) := a(\boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h, \phi + \chi) + \\ & \qquad a_1(\boldsymbol{v}_H; \boldsymbol{u}^H, \phi + \chi) + a_1(\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{u}^H, \phi) + a_1(\boldsymbol{v}_H; \boldsymbol{w}^h, \phi), \end{aligned} \tag{20}$$

则

$$B(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{w}_h; [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h], [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h]) = \nu | \boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h |_1^2, \tag{21}$$

即 $B(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{w}_h; [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h], [\phi, \chi])$ 是正定的双线性型• 由于 $b(\cdot, \cdot)$ 满足离散 inf_sup 条件(7), 所以下面的线性化问题:

$$\begin{cases} B(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{w}_h; [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h], [\phi, 0]) - b(p^h, \phi) + b(q, \boldsymbol{u}^H) = (\boldsymbol{f}, \phi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall (\phi, q) \in \hat{X}_H, \\ B(\boldsymbol{v}_H, \boldsymbol{w}_h; [\boldsymbol{u}^H, \boldsymbol{w}^h], [0, \chi]) - b(p^h, \chi) + b(q, \boldsymbol{w}^h) = (\boldsymbol{f}, \chi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall (\chi, q) \in \hat{X}_h^H \end{cases} \tag{22}$$

存在唯一的解 $(\boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h, p^h) \in \hat{X}_h$• 由于

$$| (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^h) | \leqslant \| \boldsymbol{f} \|_* \cdot (| \boldsymbol{u}^H |_1^2 + | \boldsymbol{w}^h |_1^2)^{1/2}, \tag{23}$$

所以, 由(21)~(23) 可得

$$(| \boldsymbol{u}^H |_1^2 + | \boldsymbol{w}^h |_1^2)^{1/2} \leqslant \nu^{-1} \| \boldsymbol{f} \|_* = R• \tag{24}$$

因此, 对于任意给定的 $\hat{\boldsymbol{v}}_h \in \bar{X}_h$, 问题(22) 可以确定一个映射 F: $\hat{\boldsymbol{v}}_h \rightarrow \hat{\boldsymbol{u}}^h = F(\hat{\boldsymbol{v}}_h)$•

(ii) 记集合

$$B_R := \left\{ \hat{\boldsymbol{v}}_h \in \bar{X}_h;\ \hat{\boldsymbol{v}}_h := (\boldsymbol{v}_h, q),\ |\boldsymbol{v}_h|_1 \leqslant R \right\}•$$

下面证明 F 是从 B_R 到 B_R 的连续映射• 不等式(24) 表明 F: $B_R \rightarrow B_R$• 这样, 只需验证 F 是连续的•

对于任意给定的 $\hat{\boldsymbol{v}}_h^i \in B_R$ 使得 $\boldsymbol{v}_h^i = \boldsymbol{v}_H^i + \boldsymbol{w}_h^i \in X_H + X_h^H$, 则由(22) 定义的 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^h = F(\hat{\boldsymbol{v}}_h^i)$, $i = 1, 2$, 满足

$$B(\boldsymbol{v}_H^i, \boldsymbol{w}_h^i; [\boldsymbol{u}_i^H, \boldsymbol{w}_i^h], [\phi, \chi]) - b(p_i^h, \phi + \chi) + b(q, \boldsymbol{u}_i^H + \boldsymbol{w}_i^h) = (\boldsymbol{f}, \phi + \chi) \quad \forall(\phi + \chi, q) \in \bar{X}_h,\ i = 1, 2, \tag{25}$$

$$(|\boldsymbol{u}_i^H|_1^2 + |\boldsymbol{w}_i^h|_1^2)^{1/2} \leqslant R \qquad i = 1, 2• \tag{26}$$

在(25) 中取 $\phi = \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H$, $\chi = \boldsymbol{w}_1^h - \boldsymbol{w}_2^h$、$q = p_1^h - p_2^h$ 得

$$\begin{aligned}\nu|\boldsymbol{u}_1^h - \boldsymbol{u}_2^h|_1^2 = {} & a_1(\boldsymbol{v}_H^2; \boldsymbol{u}_2^H, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) - a_1(\boldsymbol{v}_H^1; \boldsymbol{u}_1^H, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) + \\ & a_1(\boldsymbol{w}_h^2; \boldsymbol{u}_2^H, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) - a_1(\boldsymbol{w}_h^1; \boldsymbol{u}_1^H, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) + \\ & a_1(\boldsymbol{v}_H^2; \boldsymbol{w}_2^h, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) - a_1(\boldsymbol{v}_H^1; \boldsymbol{w}_1^h, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) + \\ & a_1(\boldsymbol{v}_H^2; \boldsymbol{u}_2^H, \boldsymbol{w}_1^h - \boldsymbol{w}_2^h) - a_1(\boldsymbol{v}_H^1; \boldsymbol{u}_1^H, \boldsymbol{w}_1^h - \boldsymbol{w}_2^h) = \\ & a_1(\boldsymbol{v}_H^2 - \boldsymbol{v}_H^1; \boldsymbol{u}_1^h, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) + a_1(\boldsymbol{w}_h^2 - \boldsymbol{w}_h^1; \boldsymbol{u}_1^H, \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H) + \\ & a_1(\boldsymbol{v}_H^2 - \boldsymbol{v}_H^1; \boldsymbol{u}_1^H, \boldsymbol{w}_1^h - \boldsymbol{w}_2^h) \leqslant \\ & NR(|\boldsymbol{v}_h^1 - \boldsymbol{v}_h^2|_1^2 + |\boldsymbol{u}_1^h - \boldsymbol{u}_2^h|_1^2),\end{aligned} \tag{27}$$

即

$$\nu|\boldsymbol{u}_1^h - \boldsymbol{u}_2^h|_1^2(1 - N\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_*) \leqslant NR|\boldsymbol{v}_h^1 - \boldsymbol{v}_h^2|_1^2• \tag{28}$$

由于 $N\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_* < 1$, 所以存在常数 $\omega \in (0, 1)$ 使得 $N\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_* \leqslant \omega$• 记 $c_0^{-1} := \nu(1 - \omega)$, 则从(28) 可得

$$|\boldsymbol{u}_1^h - \boldsymbol{u}_2^h|_1^2 \leqslant NRc_0|\boldsymbol{v}_H^2 - \boldsymbol{v}_H^1|_1^2, \tag{29}$$

这就证明了 F 从 B_R 到 B_R 的连续映射• 则由 Brouwer 不动点定理可知, $\hat{\boldsymbol{u}}^h = F(\hat{\boldsymbol{v}}^h)$ 至少存在一个不动点, 即问题(Ⅰ ^{h}) 至少存在一个解 $\hat{\boldsymbol{u}}^h = (\boldsymbol{u}^H + \boldsymbol{w}^h, p^h) \in \bar{X}_h$•

(iii) 证明问题 (Ⅰ ^{h}) 的解的唯一性•

在问题 (Ⅰ ^{h}) 中取 $\phi = \boldsymbol{u}^H$、$\chi = \boldsymbol{w}^h$、$q = p^h$ 可得(17) •

设 $\hat{\boldsymbol{u}}_i^h (i = 1, 2)$ 是问题(Ⅰ ^{h}) 的两个解, 记 $\phi = \boldsymbol{u}_1^H - \boldsymbol{u}_2^H$、$\chi = \boldsymbol{w}_1^h - \boldsymbol{w}_2^h$、$q = p_1^h - p_2^h$• 那么, 由(3) 和(13), 与(27) 同理可得

$$\begin{aligned}\nu(|\phi|_1^2 + |\chi|_1^2) = {} & -a_1(\phi; \boldsymbol{u}_1^h, \phi) - a_1(\chi; \boldsymbol{u}_1^H, \phi) - a_1(\phi, \boldsymbol{u}_1^H, \chi) \leqslant \\ & CH^{1/2}(|\phi|_1^2 + |\chi|_1^2) + N\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_*|\phi|_1^2 \leqslant \\ & (N\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_* + CH^{1/2})(|\phi|_1^2 + |\chi|_1^2),\end{aligned} \tag{30}$$

即

$$\nu(|\phi|_1^2 + |\chi|_1^2)(1 - N\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_* - CH^{1/2}) \leqslant 0• \tag{31}$$

由于 $N\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_* \leqslant \omega < 1$, 所以存在一个常数 $H^* = [(1 - \omega)/(2C)]^2$, 其中 C 是(31) 的左边所给, 使得对于所有的 $H \leqslant H^*$ 都有

$$(|\phi|_1^2 + |\chi|_1^2) \leqslant 0, \tag{32}$$

这就意味着 $\phi = 0$ 和 $\chi = 0$, 即 $\boldsymbol{u}_1^h = \boldsymbol{u}_2^h$• 那么由(25) 可得

$$b(p_1^h - p_2^h, \phi + \chi) = 0 \qquad \forall \phi \in X_H,\ \chi \in X_h^H. \tag{33}$$

这样, 利用 inf_sup 不等式(7) 可得 $p_1^h = p_2^h$. 定理2.2 证毕.

3 非线性 Galerkin 混合有限元法的收敛性

本节的目的是导出问题(Ⅰ ^{h}) 的非线性Galerkin混合元解关于参数H 和$h(h \ll H)$ 的收敛性.

定理 3.1 在定理 2.2 的条件下, 如果 $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^2$ 而且问题(2) 精确解 $\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega))^2 \times H^m(\Omega)$, 那么存在一个正的常数 h^* 使得对于 $h \ll H \leqslant h^*$ 都有

$$|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}^h|_1 + \|p_h - p^h\|_0 \leqslant CH^{m+1}, \tag{34}$$

其中 $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ 是问题(Ⅰ $_h$) 的解, $(\boldsymbol{u}^h, p^h)$ 是问题(Ⅰ ^{h}) 的解, $m \geqslant 1$ 是整数.

证明 定理 3.1 的证明将分为下面两步:

(a) 预备论述

对于问题(Ⅰ $_h$) 的解 $\boldsymbol{u}_h$, 令

$$\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_H + \boldsymbol{w}_h,\quad \boldsymbol{u}_H = \mathrm{R}_H \boldsymbol{u}_h,\quad \boldsymbol{w}_h = (I - \mathrm{R}_H)\boldsymbol{u}_h, \tag{35}$$

并记

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_H - \boldsymbol{u}^H,\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{w}^h,\quad \tau = p_h - p^h. \tag{36}$$

引理 3.2 在定理3.1 的条件下, 问题(Ⅰ $_h$) 的解 $\boldsymbol{u}_h$ 使得 $\boldsymbol{w}_h = (I - \mathrm{R}_H)\boldsymbol{u}_h$ 满足

$$\|\boldsymbol{w}_h\|_0 + H|\boldsymbol{w}_h|_1 \leqslant CH^{m+1}. \tag{37}$$

证明 $\boldsymbol{w}_h$ 可分解为

$$\boldsymbol{w}_h = (I - \mathrm{R}_H)\boldsymbol{u}_h = (I - \mathrm{R}_H)\boldsymbol{u} + (I - \mathrm{R}_H)(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}), \tag{38}$$

由定理1.2 和引理 2.1 可得

$$\|\boldsymbol{w}_h\|_0 + H|\boldsymbol{w}_h|_1 \leqslant CH|\boldsymbol{w}_h|_1 \leqslant CH(|\boldsymbol{u} - \mathrm{R}_H|_1 + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_1) \leqslant$$
$$C(H^{m+1} + Hh^m) \leqslant CH^{m+1}.$$

下面考虑 Laplace 算子的离散形式 $\mathrm{A}_h \in \mathscr{L}(X_h, X_h)$ 定义为:

$$(\mathrm{A}_h \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in X_h. \tag{39}$$

那么, 下面的估计[7, 12, 13, 25, 26]成立:

$\forall \boldsymbol{u}_h \in V_h$ 和 $\forall \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h \in X_h$, 有

$$|a_1(\boldsymbol{v}_h; \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h)| + |a_1(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h)| \leqslant$$
$$|\boldsymbol{u}_h|_1^{1/2} \|\mathrm{A}_h \boldsymbol{u}_h\|_0^{1/2} \|\boldsymbol{v}\|_0 |\boldsymbol{w}_h|_1, \tag{40}$$

又对于问题(Ⅰ $_h$) 的解 $\boldsymbol{u}_h$ 和问题(Ⅰ ^{h}) 的解 $\boldsymbol{u}^h$, 有

$$\|\mathrm{A}_h \boldsymbol{u}_h\|_0 + \|\mathrm{A}_h \boldsymbol{u}^h\|_0 \leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_0. \tag{41}$$

(b) 定理 3.1 的证明

利用(35) 和(14), 问题(Ⅰ ^{h}) 可写为

$$a(\boldsymbol{u}_H, \phi) + a(\boldsymbol{w}_h, \chi) + a_1(\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{u}_h, \phi + \chi) - b(p_h, \phi + \chi) + b(q, \boldsymbol{u}_H + \boldsymbol{w}_h) =$$
$$(\boldsymbol{f}, \phi + \chi) \qquad \forall \phi \in X_H,\ \chi \in X_h^H,\ q \in M_h. \tag{42}$$

在(42) 中取 $\phi = \boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}_H - \boldsymbol{u}^H$、$\chi = \boldsymbol{E} = \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{w}^h$、$q = \tau = p_h - p^h$ 并与(18) ~ (19) 相减, 再由(14) 和(3) 可得

$$\nu(|\boldsymbol{e}|_1^2 + |\boldsymbol{E}|_1^2) = a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{e}) - a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{w}^h, \boldsymbol{e}) +$$

$$a_1(\boldsymbol{u}^H;\boldsymbol{u}^H,\boldsymbol{E})-a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{e})-a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{E})=$$
$$a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})+a_1(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E};\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{e})+a_1(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{E})-$$
$$a_1(\boldsymbol{e};\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})-a_1(\boldsymbol{E};\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{e})-$$
$$a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})+a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{e})\cdot \tag{43}$$

由(40)~(41),引理2.1、3.2和定理1.2,有

$$|a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})|\leqslant C|\boldsymbol{u}_h|_1^{1/2}\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_0^{1/2}\|\boldsymbol{w}_h\|_0|\boldsymbol{E}|_1\leqslant CH^{m+1}|\boldsymbol{E}|_1, \tag{44}$$
$$|a_1(\boldsymbol{e};\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{e})|\leqslant NR|\boldsymbol{e}|_1^2, \tag{45}$$
$$|a_1(\boldsymbol{E};\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{e})|\leqslant C|\boldsymbol{u}_h|_1^{1/2}\|A_h\boldsymbol{u}_h\|_0^{1/2}\|\boldsymbol{E}\|_0|\boldsymbol{e}|_1\leqslant$$
$$CH|\boldsymbol{E}|_1\cdot|\boldsymbol{e}|_1\leqslant CH(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2), \tag{46}$$
$$|a_1(\boldsymbol{e};\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{E})|\leqslant CH(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2), \tag{47}$$
$$|a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{E})|\leqslant CH^{m+1}|\boldsymbol{E}|_1\cdot \tag{48}$$

其次,只要 $m\geqslant 1$,再利用(3)有

$$|a_1(\boldsymbol{e};\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})|\leqslant C[|\boldsymbol{e}|_1(|\boldsymbol{w}_h|_1\|\boldsymbol{w}_h\|_0\|\boldsymbol{E}\|_0|\boldsymbol{E}|_1)^{1/2}+$$
$$|\boldsymbol{w}_h|_1(\|\boldsymbol{e}\|_0|\boldsymbol{e}|_1\|\boldsymbol{E}\|_0|\boldsymbol{E}|_1)^{1/2}]\leqslant$$
$$CH(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2), \tag{49}$$
$$|a_1(\boldsymbol{E};\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{e})|\leqslant CH(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2), \tag{50}$$
$$|a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{E})|\leqslant CH^{m+1}|\boldsymbol{E}|_1, \tag{51}$$
$$|a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{e})|\leqslant CH^{m+1}|\boldsymbol{e}|_1\cdot \tag{52}$$

由(43)~(52)得

$$\nu(|\boldsymbol{e}|_1^2+|\boldsymbol{E}|_1^2)\leqslant(N\nu^{1}\|\boldsymbol{f}\|_*+CH)(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2)+$$
$$CH^{m+1}(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2)^{1/2}, \tag{53}$$

即

$$\nu(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2)(1-N\nu^{2}\|\boldsymbol{f}\|_*-CH)\leqslant CH^{m+1}(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2)^{1/2}\cdot \tag{54}$$

由于 $N\nu^{2}\|\boldsymbol{f}\|_*<1$,所以存在一个常数 $\omega\in(0,1)$ 使得 $N\nu^{2}\|\boldsymbol{f}\|_*\leqslant\omega<1\cdot$ 取 $h^*=(1-\omega)/(2C)$,其中 C 是(54)的左边所给,则对于所有的 $H\leqslant h^*$ 都有

$$(|\boldsymbol{E}|_1^2+|\boldsymbol{e}|_1^2)^{1/2}\leqslant CH^{m+1}\cdot \tag{55}$$

由 inf_sup 不等式(6)有

$$\beta\|p_h-p^h\|_0\leqslant\sup_{\phi+\chi\in X_h}\frac{b(p_h-p^h,\phi+\chi)}{|\phi+\chi|_1}\cdot \tag{56}$$

由(42)与(18)~(19)相减可得

$$b(\tau,\phi+\chi)=a(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E},\phi+\chi)+a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\phi)-$$
$$a_1(\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}^h,\phi)+a_1(\boldsymbol{w}^h;\boldsymbol{w}^h,\phi)+a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\chi)-a_1(\boldsymbol{u}^H;\boldsymbol{u}^H,\chi)$$
$$\forall\phi\in X_H,\ \chi\in X_h^H\cdot \tag{57}$$

由于

$$a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\phi)-a_1(\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}^h,\phi)+a_1(\boldsymbol{w}^h;\boldsymbol{w}^h,\phi)=a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E},\phi)+$$
$$a_1(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E};\boldsymbol{u}_h,\phi)-a_1(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E};\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E},\phi)+a_1(\boldsymbol{w}_h;\boldsymbol{w}_h,\phi), \tag{58}$$

由(55)、引理2.1和3.2有

$$|a_1(\boldsymbol{u}_h;\boldsymbol{u}_h,\phi)-a_1(\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}^h,\phi)+a_1(\boldsymbol{w}^h;\boldsymbol{w}^h,\phi)|\leqslant C[|\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E}|_1+$$

$$|e+E|_1^2+|w_h|_1^2]\|\nabla\phi\|_0\leqslant$$
$$CH^{m+1}|\phi+\chi|_1\cdot \tag{59}$$

再由(55)、(3)和引理3.2可得

$$|a_1(u_h;u_h,\chi)-a_1(u^H;u^H,\chi)|=|a_1(u_h;e+w_h,\chi)+$$
$$a_1(e+w_h;u_h,\chi)-a_1(e+w_h;e+w_h,\chi)|\leqslant$$
$$C[|e+w_h|_1+|e+w_h|_1^2]|\chi|_1\leqslant$$
$$CH^{m+1}|\phi+\chi|_1, \tag{60}$$

$$|a(e+E,\phi+\chi)|\leqslant\nu\|\nabla(e+E)\|_0\|\nabla(\phi+\chi)\|_0\leqslant$$
$$CH^{m+1}\|\nabla(\phi+\chi)\|_0\cdot \tag{61}$$

结合(56)~(61)即得

$$\|p_h-p^h\|_0\leqslant CH^{m+1}\cdot \tag{62}$$

结合(55)和(62)得(34)• 定理3.1证毕•

结合定理1.2和定理3.1得到下面的推论•

推论3.3 在定理3.1的条件下,下面的估计成立

$$|u-u^h|_1+\|p-p^h\|_0\leqslant C(h^m+H^{m+1})\cdot \tag{63}$$

附注3.4 如果取 $H=O(h^{m/(m+1)})$, 那么我们的非线性Galerkin混合元与经典的混合有限元解(参见[25~27])具有同阶的逼近的误差估计• 反之, 如果取 $h=O(H^{(m+1)/m})$, 非线性Galerkin混合元法相对于 H 具有超收敛•

4 非线性Galerkin混合元法的后验误差分析

本节引进后验误差估计子,并证明这些后验估计子是真正误差的整体上界(相差一个常数倍)而且具有"局部的残数型"•

从现在起, 假定剖分 $\mathscr{T}_h$ 中相对于 h 和 H 的最小角 $\theta_{\min}$ 一致地具有不为零的界•

为了定义后验误差估计子, 需要引进关于离散解 $(u^h,p^h)\in\mathscr{X}_h$ 的某些跳跃• 对于在区域内部的单元边 l, 其法向量 n_l 有两种可能取法, 并用 K_{in} 和 K_{out} 表示具有公共边为 n_l 的两个三角形, 指向外的为 K_{in}• 当 l 为区域边界上的单元的边时, n_l 表示外法向量• 函数 g 跨越边界 l 的跳跃定义为

$$[gn_l]_l:=g|_{K_{\text{out}}}n_l-g|_{K_{\text{in}}}n_l\cdot \tag{64}$$

设 E_h 为剖分 $\mathscr{T}_h$ 的边界集合• 定义

$$J_l:=[\nu\nabla u^h\cdot n_l-p^hn_l]_l\qquad\forall l\in E_h, \tag{65}$$

$$r:=f+\nu\Delta u^h-(u^h\cdot\nabla)u^h-\nabla p^h, \tag{66}$$

而且 $\forall\hat{u}:=(u,p),\ \hat{v}:=(v,q)\in\mathscr{X}$, 记

$$F((u,p),(v,q)):=a(u,v)+a_1(u;u,v)-b(p,v)+b(q,u)\cdot \tag{67}$$

下面用到的局部插值估计是由Clément[31]通过函数局部平均插值导出的• 即存在算子 $P_h^X:X\to X_h$ 和算子 $P_h^M:M\to M_h$ 使得, 当 $v^h:=P_h^Xv$ 和 $q^h=P_h^Mq$ 时, 对于所有的 $K\in\mathscr{T}_h$ 和所有的 $l\in E_h$, 及对于 $w:=v$ 或 q, 都有 $\|w^h\|_{i,K}\leqslant C_1\|w\|_{i,k}(i=0,1)$, $\|w^h\|_{0,l}\leqslant C_1\|w\|_{0,l}$, 而且有

$$\|w-w^h\|_{0,K}\leqslant C_2h_K\|w\|_{1,\omega(K)},\quad\|w-w^h\|_{0,l}\leqslant C_2h_l^{1/2}\|w\|_{1,\omega(l)}, \tag{68}$$

其中 $\omega(K)$ 和 $\omega(l)$ 分别表示与单元 K 和边 l 接触的单元和边的集合, $h_K:=\operatorname{diam}(K)$ 和 $h_l:=$

$\mathrm{diam}(l)$。 由于 $\mathcal{T}_h$ 满足最小角条件, 所以有

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{w}\|_{1,\omega(K)}^2\right)^{1/2}\leqslant C(\theta_{\min})\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega};\tag{69}$$

$$\left(\sum_{l\in\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{w}\|_{1,\omega(l)}^2\right)^{1/2}\leqslant C(\theta_{\min})\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}.\tag{70}$$

下一定理是由 Arnica_Padra[23] 证明的, 该定理给出了 $\hat{\boldsymbol{u}}=(\boldsymbol{u},p)\in X$ 的范数的一个上界。

定理 4.1 设 $(\boldsymbol{u},p)\in X$ 是问题(I^*)的解。 如果 $|\boldsymbol{u}|_1\leqslant R_0$, 那么存在一个与 β 和 R_0 有关的常数 $M_{R_0}>0$ 使得下面不等式成立:

$$(|\boldsymbol{u}|_1^2+\nu^{-2}\|p\|_0^2)^{1/2}\leqslant\nu^{-1}M_{R_0}\sup_{(\boldsymbol{v},q)\in X}\frac{F(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{v}})}{(|\boldsymbol{v}|_1^2+\nu^{-2}\|q\|_0^2)^{1/2}},\tag{71}$$

其中 β 为(7) 中所给, R_0 为已知的常数, 而且

$$M_{R_0}:=2\times\frac{(\max\{2,1+2\beta^2[1+\nu^{-1}R_0N]^{-4}\})^{1/2}}{\min\{1,\beta^2[1+\nu^{-1}R_0N]^{-2}\}}.\tag{72}$$

现在给出第 2 节中的非线性 Galerkin 混合元解的后验估计子的主要结果。

定理 4.2 设 $(\boldsymbol{u}^h,p^h)\in X_h$ 是问题(I^h)的非线性 Galerkin 混合元解。$(\boldsymbol{u},p)$ 是问题(I^*)的精确解。 如果 $\boldsymbol{f}\in L^2(\Omega)^2$ 满足 $\nu^{-2}N\|\boldsymbol{f}\|_*<\min\{1,1/2M_0\}$, 则存在可计算的常数 $C_i(i=1,2,3)$ 和 $C(\theta_{\min})$ 使得下面的后验误差界成立。

$$\begin{aligned}(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h|_1^2+\nu^{-2}\|p-p^h\|_0^2)^{1/2}\leqslant\frac{2M_0}{(1-s)\nu}\Big\{&C_3(N|\boldsymbol{w}^h|_1^2+\\&\|\boldsymbol{f}\|_0\|\boldsymbol{w}^h\|_0)+C(\theta_{\min})\max\{C_1,C_2\}\Big[\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(h_K^2\|\boldsymbol{r}\|_{0,K}^2+\\&\nu^2\|\nabla\cdot\boldsymbol{u}^h\|_{0,K}^2+\sum_{l\in\partial K}h_l\|\boldsymbol{J}_l\|_{0,l}^2\Big)\Big]^{1/2}\Big\},\end{aligned}\tag{73}$$

其中

$$M_0:=2\times\frac{(\max\{2,1+2\beta^2/81\})^{1/2}}{\min\{1,\beta^2/18\}};\quad s:=2M_0\nu^{-2}N\|\boldsymbol{f}\|_*.\tag{74}$$

证明 由定理 1.1 和 2.2 有 $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h|_1\leqslant2\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_*$, 即定理 4.1 的 $R_0=2\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_*$。 再利用假定条件 $\nu^{-2}N\|\boldsymbol{f}\|_*<\min\{1,1/2M_0\}$, 用

$$M_0=2\times(\max\{2,1+2\beta^2/81\})^{1/2}/\min\{1,\beta^2/18\}$$

代替定理 4.1 的 M_{R_0}。

一方面, 由定理 4.1 有

$$\begin{aligned}&(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h|_1^2+\nu^{-2}\|p-p^h\|_0^2)^{1/2}\leqslant\\&\qquad 2M_0\sup_{(\boldsymbol{v},q)\in X}\frac{F((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,p-p^h),(\boldsymbol{v},q))}{(|\boldsymbol{v}|_1^2+\nu^{-2}\|q\|_0^2)^{1/2}},\end{aligned}\tag{75}$$

另一方面, 由(67)、问题(I^*)和问题(I^h)有

$$\begin{aligned}F((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,p-p^h),(\boldsymbol{v},q))=&\ a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})+a_1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})-\\&b(p-p^h,\boldsymbol{v})+b(q,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h)=\\&a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+a_1(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b(p,\boldsymbol{v})+b(q,\boldsymbol{u})-\\&a(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})-a_1(\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})+b(p^h,\boldsymbol{v})-b(q,\boldsymbol{u}^h)-\\&a_1(\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})-a_1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h;\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h)+a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v})+a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v})-\\
&b(p^h, \boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v})+b(q^h-q, \boldsymbol{u}^h)-a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{w}^h, \boldsymbol{v}^h)-\\
&a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{u}^H, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)-a_1(\boldsymbol{u}^H; \boldsymbol{w}^h, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)-\\
&a_1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v})-a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}). \qquad (76)
\end{aligned}
$$

利用 Green 公式和(68)~(70)有

$$
\begin{aligned}
&|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h)-a(\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h)-a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h)+\\
&\quad b(p^h, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h)+b(q^h-q, \boldsymbol{u}^h)| \leqslant\\
&\quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big[\|\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}^h-(\boldsymbol{u}^h\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^h-\nabla p^h\|_{0,K}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h\|_{0,K}+\\
&\quad \|\operatorname{div}\boldsymbol{u}^h\|_{0,K}\|q-q^h\|_{0,K}+\\
&\quad \sum_{l\in\partial K}\|[\nu\nabla\boldsymbol{u}^h\cdot\boldsymbol{n}_l-p^h\boldsymbol{n}_l]_l\|_{0,l}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^h\|_{0,l}\Big] \leqslant\\
&\quad 2\max\{C_1, C_2\}C(\theta_{\min})\Big\{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big[h_K^2\|\boldsymbol{r}\|_{0,K}^2+\nu^2\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}^h\|_{0,K}^2+\\
&\quad \sum_{l\in\partial K}h_l\|\boldsymbol{J}_l\|_{0,l}^2\Big]\Big\}^{1/2}(|\boldsymbol{v}|_1^2+\nu^{2}\|q\|_0^2)^{1/2}, \qquad (77)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|a_1(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{v})-a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h, \boldsymbol{v})| \leqslant\\
&\quad 2N|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h|_1|\boldsymbol{u}^h|_1|\boldsymbol{v}|_1 \leqslant\\
&\quad 2N\nu^{1}\|\boldsymbol{f}\|_*(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h|_1^2+\nu^2\|p-p^h\|_0^2)^{1/2}|\boldsymbol{v}|_1. \qquad (78)
\end{aligned}
$$

利用(40)~(41)和(13)可得

$$
\begin{aligned}
&|a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{w}^h, \boldsymbol{v}^h)+a_1(\boldsymbol{u}^H; \boldsymbol{w}^h, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)+a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{u}^H, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)| =\\
&\quad |-a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{w}^h, \boldsymbol{v}^h)+2a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{w}^h, \mathrm{R}_H\boldsymbol{v}^h)+\\
&\quad a_1(\boldsymbol{w}^h; \boldsymbol{u}^h, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)+a_1(\boldsymbol{u}^h; \boldsymbol{w}^h, (I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h)| \leqslant\\
&\quad 3N|\boldsymbol{w}^h|_1^2|\boldsymbol{v}^h|_1+2|\boldsymbol{u}^h|_1^{1/2}\|\mathrm{A}_h\boldsymbol{u}^h\|_0^{1/2}\|\boldsymbol{w}^h\|_0|(I-\mathrm{R}_H)\boldsymbol{v}^h|_1 \leqslant\\
&\quad 2C_3(N|\boldsymbol{w}^h|_1^2+\|\boldsymbol{f}\|_0\|\boldsymbol{w}^h\|_0)|\boldsymbol{v}|_1. \qquad (79)
\end{aligned}
$$

结合(75)~(79)并注意到 $s<1$ 可得(73). 定理 4.2 证毕.

附注 4.3 从引理 3.2 可知,定理 4.2 中基于非线性 Galerkin 混合元法的后验估计子是真正误差的整体上界(相差一个常数倍)而且具有"局部的残数型". 虽然定理 4.2 的结果看起来与[24]中的定理 3.1 相似,但是我们的估计子的所有常数都是可以计算的,而[24]中的定理 3.1 还有一个不可计算的因子 $\|DF^{-1}\|$. 特别地,我们的非线性 Galerkin 混合元法是与[24,32]中的两水平方法有着本质的区别. 另外我们的估计子甚至适用于奇性问题,而[24]中的估计子仅仅适用于非奇性的问题(参看[24]).

[参 考 文 献]

[1] Foias C, Manley O P, Temam R. Modellization of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows[J]. Math Mod Numer Anal, 1988, **22**(1): 93—114.

[2] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, **2**(5): 1139—1157.

[3] Foias C, Jolly M, Kevrekidis I G, et al. Dissipativy of numerical schemes[J]. Nonlinearity, 1991, **4**(4): 591—613.

[4] Devulder C, Marion M, Titi E. On the rate of convergence of nonlinear Galerkin methods[J]. Math

Comp, 1992, **59**(200): 173－201.

[5] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods: the finite elements case[J]. Numer Math, 1990, **57**(3): 205－226.

[6] Marion M, Xu J C. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two_grid finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, **32**(4): 1170－1184.

[7] Ait Ou Ammi A, Marion M. Nonlinear Galerkin methods and mixed finite element: two_grid algorithms for the Navier_Stokes equations[J]. Numer Math, 1994, **68**(2): 189－213.

[8] Li K T, Zhou L. Finite element nonlinear Galerkin methods for penalty Navier_Stokes equations[J]. Math Numer Sinica, 1995, **17**(4): 360－380.

[9] He Y, Li K T. Nonlinear Galerkin method and two_step method for the Navier_Stokes equations[J]. Inc Numer Methods P D Eq, 1996, **12**(3): 283－305.

[10] Luo Z D, Wang L H. Nonlinear Galerkin mixed element methods for the non stationary conduction_convection problems (Ⅰ): The continuous_time case[J]. Chinese J Numer Math Appl, 1998, **20**(4): 71－94.

[11] Luo Z D, Wang L H. Nonlinear Galerkin mixed element methods for the non stationary conduction_convection problems (Ⅱ): The backward one_step Euler fully discrete format[J]. Chinese J Numer Math Appl, 1999, **21**(1): 86－105.

[12] 罗振东, 朱江, 王会军. 定常的 Navier_Stokes 方程的非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 697－708.

[13] Li G C, He Y N. Convergence of nonlinear Galerkin finite element algorithm for the steady incompressible equations of the Navier_Stokes type[J]. Chinese J Comput Phys, 1997, **14**(1): 83－89.

[14] Bank R E, Welfert B. A posteriori error estimates for the Stokes equations: A comparison[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1990, **82**(3): 323－340.

[15] Bank R E, Welfert B. A posteriori error estimates for the Stokes problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1991, **28**(3): 591－623.

[16] Oden J T, Demkowicz L. *h_p* adaptive finite element methods in computational fluid dynamics[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1991, **89**(1): 11－40.

[17] Padra C, Buscaglia G C, Dari E A. Adaptivity in steady incompressible Navier_Stokes equations using discontinuous pressure interpolates[A]. In: H Alder, J C Heinrich, S Lavanchy, et al Eds. Num Meth Eng Appl Sci, Part Ⅰ[C]. Barcelona: CIMNE, 1992, 267－276.

[18] Wu J, Zhu J Z, Szmelter J, et al. Error estimation and adaptivity in Navier_Stokes incompressible flows[J]. Comput Mech, 1990, **6**(2): 259－270.

[19] Verf rth R. A posteriori error estimators for the Stokes equations[J]. Numer Math, 1989, **55**(3): 309－325.

[20] Verf rth R. A posteriori error estimators and adaptive mesh_refinement techniques for the Navier_Stokes equations[A]. In: M Gunzburger, R A Nicolaides Eds. Incompressible Computational Fluid Dynamics, Trends and Advances[C]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, 447－477.

[21] Verf rth R. A posteriori error estimates for non_linear problems: Finite element discretizations of elliptic equations[J]. Math Comp, 1994, **62**(206): 445－475.

[22] Oden J T, Wu W, Ainsworth M. An a posteriori error estimate for finite element approximations of the Navier_Stokes equations[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1994, **111**(2): 185－220.

[23] Arnica D, Padra C. A posteriori error estimators for steady incompressible Navier_Stokes equations[J]. Inc Numer Methods P D Eq, 1997, **13**(5): 561－574.

[24] Ervin V, Layton W, Maubach J. A posteriori error estimators for a two_level finite element method

for the Navier_Stokes equations[J]. Inc Numer Methods P D Eq, 1996, **12**(3): 333—346.

[25] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier_Stokes Equations, Theorem and Algorithms[M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[26] Temam R. Navier_Stokes Equations[M]. Amsterdam: North_Holland, 1984.

[27] Bernardi C, Raugel B. Analysis of some finite elements for the Stokes problem[J]. Math Comp, 1985, **44**(169): 71—79.

[28] 罗振东. 有限元混合法理论基础及其应用, 发展与应用[M]. 济南: 山东教育出版社, 1996.

[29] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North_Holland, 1978.

[30] Luo Z D. The third order estimate of mixed finite element for the Navier_Stokes problems[J]. Chinese Quart J Math, 1995, **10**(3): 9—12.

[31] Cl ment P. Approximation by finite element function using local regularization[J]. RAIRO, 1975, R_**2**(1): 77—84.

[32] Layton W. A two level discretization method for the Navier_Stokes equations[J]. Comput Math Appl, 1993, **26**(1): 33—45.

[33] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York: Berlin, Heidelberg: Springer_Verlag, 1991.

A Nonlinear Galerkin Mixed Element Method and a Posteriori Error Estimator for the Stationary Navier_Stokes Equations

LUO Zhen_dong[1, 2], ZHU Jiang[2]

(1. Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100037, P R China;
2. ICCES, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P R China)

Abstract: A nonlinear Galerkin mixed element (NGME) method and a posteriori error estimator based on the method are established for the stationary Navier_Stokes equations. The esistence and error estimates of the NGME solution are first discussed, and then a posteriori error estimator based on the NGME method is derived

Key words: Navier_Stokes equation; nonlinear Galerkin mixed element method; error estimate; posteriori error estimator