应用数学和力学,第 23 卷 第 10 期(2002 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 10_1073_07

Stokes 问题基于泡函数的简化的稳定化混合元格式的收敛性*

罗振东[1,2], 朱 江[2]

(1. 首都师范大学 数学系, 北京 100037;
2. 中国科学院 大气物理研究所 国际气候与环境科学研究中心, 北京 100029)

(许政范推荐)

摘要: 利用泡函数导出 Stokes 问题的两种新的、简化的稳定化混合有限元格式• 并证明这些格式与通常带泡函数的稳定化格式具有相同的收敛性, 但是自由度可以大大减少•

关 键 词: Stokes 问题; 稳定化格式; 混合元格式; 误差分析

中图分类号: O241.4 文献标识码: A

引 言

在混合有限元法的研究中, 为了摆脱离散的 Babuska_Brezzi 条件(简称 B_B 条件) 的约束, 通常采用稳定化的混合有限元格式[1]• 在这方面, 已经有各种稳定化方法(可参见文献[1~ 7] 以及当中的参考文献), 这些方法有其独特的优点, 但某些方法也存在着不足• 如文献[7] 中的组合方法, 要用到单元边界上的积分• 因为二维的三角形剖分中的节点数、单元数、边数之比 1∶ 2∶ 3, 因此, 过多地使用边上的自由度是不划算的, 会增加总体自由度和增加计算量•

本文从泡函数的方向出发去导出 Stokes 问题的两种简化的稳定化混合有限元格式• 这些方法可以尽可能用单元顶点的值作为自由度, 使总体自由度尽可能减少• 本文的主要目的是证明这些简化的稳定化混合有限元格式与原来的带泡函数的格式具有相同的精度, 从而可以用简化的稳定化混合有限元格式代替原来的带泡函数的格式, 使得计算量可以减少•

本文的安排如下: 第 1 节先回顾 Stokes 问题的带泡函数的混合元格式: 接着, 在第 2 节导出简化的稳定化混合元格式; 最后, 在第 3 节证明简化的稳定化混合元格式的收敛性•

1 Stokes 问题的带泡函数的混合元格式的回顾

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是有界的多边形区域, 考虑定常的 Stokes 问题:

---

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2002_04_01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071052, 49776283); 北京市教委科技发展计划项目; 中国科学院“百人计划”项目; 中国科学院九五重点项目(K2952_51_434); 北京市优秀人才专项经费; 北京市自然科学基金资助项目
作者简介: 罗振东(1958—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 有限元方法及其应用(E_mail: louzhd@ mail.cnu.edu.cn).

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f} & \text{在 }\Omega\text{ 中,}\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 & \text{在 }\Omega\text{ 中,}\\ \boldsymbol{u}=0 & \text{在}\partial\Omega\text{ 上,}\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\nu>0$ 为粘性系数, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 是流体的速度向量, p 为压力, $\boldsymbol{f}\in L^2(\Omega)^2$ 为体力密度•

对于任意的 $T\subset\Omega$, 用 $H^l(T)$, $l\geqslant 0$, 和 $L^2(T)=H^0(T)$ 分别表示通常的Sobolev 空间和Lebesgue 空间, 其半范数和范数分别为

$$|\varphi|_{l,T}=\left\{\sum_{|\alpha|=l}\int_T|D^\alpha\varphi|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

和
$$\|\varphi\|_{l,T}=\left\{\sum_{m=0}^{l}|\varphi|_{m,T}^2\right\}^{1/2}\qquad\forall\varphi\in H^l(T)\bullet$$

$L^2(T)$ 空间的内积表示为

$$(\varphi,\psi)_T=\int_T\varphi\psi\mathrm{d}x\bullet$$

为了方便起见, 当 $T=\Omega$ 时, 下标的 T 将省略; 空间 $H^l(\Omega)^2$ 和 $L^2(\Omega)^2$ 的范数和内积仍然用相同的记号• 为了引入问题(1) 的变分形式, 引入下面的记号:

$$X:=H_1^0(\Omega)^2,\quad M:=\left\{q\in L^2(\Omega);\int_\Omega q\,\mathrm{d}x=0\right\},$$

而且 $\forall(\boldsymbol{u},p),(\boldsymbol{v},q)\in X\times M$ 记

$$B(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v},q)\equiv\nu\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}\bullet\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}x-\int_\Omega p\operatorname{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x-\int_\Omega q\operatorname{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\bullet\tag{2}$$

则问题(1) 的变分形式可表示为

问题Q 求 $(\boldsymbol{u},p)\in X\times M$ 满足

$$B(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v},q)=\int_\Omega\boldsymbol{f}\bullet\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\qquad\forall(\boldsymbol{v},q)\in X\times M\bullet\tag{3}$$

熟知 $B(\bullet,\bullet;\bullet,\bullet)$ 满足下面的 inf_sup 条件[8]

$$\inf_{(\boldsymbol{u},p)\in V\times M}\ \sup_{(\boldsymbol{v},q)\in V\times M}\frac{B(\boldsymbol{u},p;\boldsymbol{v},q)}{[|\boldsymbol{u}|_1+\|p\|_0][|\boldsymbol{v}|_1+\|q\|_0]}\geqslant\beta>0,\tag{4}$$

其中 β 为常数• 从而问题Q 存在唯一的解• 下面用 $h>0$ 表示剖分参数, 并用 c 表示与 h 无关的一般常数, 不同处出现可能不等• 设 $\mathscr{T}_h$ 为 Ω 的拟一致三角形剖分(可参见[9～10] 等)• 用 $P_l(T)$, $l\geqslant 0$, 表示 T 上次数 $\leqslant l$ 多项式空间• 定义

$$V_h^k=\left\{\boldsymbol{v}_h\in X\cap C^0(\Omega)^2;\boldsymbol{v}_h|_T\in P_k(T)^2,\ \forall T\in\mathscr{T}_h\right\}\qquad(k=1,2)\bullet\tag{5}$$

对于每一单元 $T\in\mathscr{T}_h$, 用 λ_{T1}、λ_{T2}、λ_{T3} 表示 T 上的面积坐标, 并定义

$$b_T(x)=\begin{cases}\lambda_{T1}(x)\lambda_{T2}(x)\lambda_{T3}(x) & \text{当 }x\in T\text{ 时,}\\ 0 & \text{当 }x\notin T\text{ 时}\bullet\end{cases}\tag{6}$$

由于 b_T 在 T 上是3 次多项式, 通常称其为 3 次泡函数• 显然 $b_T\in H_0^1(\Omega)$ 且 $b_T|_T\in H_0^1(T)$•

记
$$B_h=(\operatorname{span}\{b_T;T\in\mathscr{T}_h\})^2\tag{7}$$

和
$$X_h^k=V_h^k\oplus B_h\qquad(k=1,2)\bullet\tag{8}$$

则有 $X_h^k\subset X$• 令

$$M_h=\left\{q_h\in M\cap C^0(\Omega);q_h|_T\in P_1(T),\ \forall T\in\mathscr{T}_h\right\},\tag{9}$$

$$W_h^{k-1}=\left\{\boldsymbol{v}_h\in H^{k-1}(\Omega)^2;\boldsymbol{v}_h|_T\in P_{k-1}(T)^2,\ \forall T\in\mathscr{T}_h\right\}\tag{10}$$

而且 $P_h^{k-1}:L^2(\Omega)^2\to W_h^{k-1}$ 为 L^2 投影, 即 $\forall\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^2$ 满足

$$(\boldsymbol{v} - P_h^{k-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in W_h^{k-1}. \tag{11}$$

考虑问题Q 的一种新的格混合有限元格式:

问题 $\mathbf{Q}_h^k$　求$(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h^k \times M_h$, $k = 1, 2$, 满足

$$B(\boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}_h, q_h) = \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x \qquad \forall(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in X_h^k \times M_h. \tag{12}$$

附注 A　离散格式(12)与通常的格式不同(可参见[8~ 10]),这种格式更便于实际计算.

文献[8~ 10]已证明了 $B(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ 在 $X_h^k \times M_h$ 上满足离散的B_B条件, 即存在与 h 无关的常数 $\beta > 0$ 使得:

$$\inf_{(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in V_h \times M_h} \sup_{(\boldsymbol{v}_h, q_h) \in V_h \times M_h} \frac{B(\boldsymbol{u}_h, p_h; \boldsymbol{v}_h, q_h)}{[|\boldsymbol{u}_h|_1 + \|p_h\|_0][|\boldsymbol{v}_h|_1 + \|q_h\|_0]} \geqslant \beta > 0. \tag{13}$$

从而问题 Q_h^k 存在唯一的解$(\boldsymbol{u}_h, p_h)$, 而且有下面的误差估计.

定理 1　如果$\boldsymbol{f} \in H^1(\Omega)^2$而且问题(3)的解$(\boldsymbol{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$, 那么有下面的误差估计

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leqslant ch^k(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1} + \|p\|_k + \|\boldsymbol{f}\|_1) \quad (k = 1, 2). \tag{14}$$

证明　设 $\rho_h: M \to M_h$ 是L^2 投影, 即 $\forall q \in M$ 满足

$$(q - \rho_h q, q_h) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h. \tag{15}$$

由投影性质(可参见[9]或[10])知 P_h^{k-1} 和 ρ_h 满足下面的逼近性质:

$$\|\boldsymbol{v} - P_h^{k-1}\boldsymbol{v}\|_{-1} \leqslant ch^k\|\boldsymbol{v}\|_1 \qquad \text{当 } \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^2 \text{ 时;} \tag{16}$$

$$\|q - \rho_h q\|_s \leqslant ch^k\|q\|_k \qquad \text{当 } q \in H^k(\Omega) \text{ 时}, s = 0, 1. \tag{17}$$

由[9]知, 存在 $r_h: X \to X_h^k$ 使得

$$(q_h, \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - r_h\boldsymbol{v})) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h \tag{18}$$

满足

$$|\boldsymbol{v} - r_h\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \leqslant ch^k\|\boldsymbol{v}\|_{k+1,\Omega} \qquad \text{当 } \boldsymbol{v} \in H^{k+1}(\Omega)^2 \cap X \text{ 时}. \tag{19}$$

由(3)和(12)可得下面的误差方程:

$$\nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla\boldsymbol{v}_h) - (p - p_h, \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f} - P_h^{k-1}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^k, \tag{20}$$

$$(q_h, \mathrm{div}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)) = 0 \qquad \forall q_h \in M_h. \tag{21}$$

因此, 从(20)~ (21)有

$$\begin{aligned}
&\nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)) = \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla(\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u})) + \\
&\quad \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla(r_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)) = \\
&\quad \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla(\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u})) + (p - p_h, \mathrm{div}(r_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)) + \\
&\quad (\boldsymbol{f} - P_h^{k-1}\boldsymbol{f}, r_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) = \\
&\quad \nu(\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h), \nabla(\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u})) - (p - \rho_h p, \mathrm{div}(\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u})) + \\
&\quad (p - \rho_h p, \mathrm{div}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)) + (\boldsymbol{f} - P_h^{k-1}\boldsymbol{f}, r_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) + \\
&\quad (\boldsymbol{f} - P_h^{k-1}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) \leqslant \\
&\quad c(|\boldsymbol{u} - r_h\boldsymbol{u}|_1^2 + \|p - \rho_h p\|_0^2 + \|\boldsymbol{f} - P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\|_{-1}^2) + \nu|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_1^2/2.
\end{aligned} \tag{22}$$

于是, 由(16)~ (17)和(19)可得

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_1 \leqslant ch^k(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1}\|p\|_k + \|\boldsymbol{f}\|_1). \tag{23}$$

又由(13),(20)~ (22)有

$$\beta\|\rho_h p-p_h\|_0\leqslant\sup_{v_h\in V_h}\frac{(\rho_h p-p_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)}{|\boldsymbol{v}_h|_1}\leqslant$$
$$\sup_{v_h\in V_h}\frac{(\rho_h p-p,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)+(p-p_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)}{|\boldsymbol{v}_h|_1}\leqslant$$
$$c\|p-\rho_h p\|_0+\sup_{v_h\in V_h}\frac{\nu(\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h),\nabla\boldsymbol{v}_h)-(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)}{|\boldsymbol{v}_h|_1}\leqslant$$
$$c(|\boldsymbol{u}-r_h\boldsymbol{u}|_1+\|p-\rho_h p\|_0+\|\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\|_{-1})\cdot \tag{24}$$

则由(19)和(16)~(17)可得

$$\|p-p_h\|_0\leqslant\|p-\rho_h p\|_0+\|\rho_h p-p_h\|_0\leqslant$$
$$ch^k(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1}+\|p\|_k+\|\boldsymbol{f}\|_1)\cdot \tag{25}$$

结合(23)和(25)即得(14)· 定理1证毕·

2 简化的稳定化混合元格式

把(12)分裂为如下方程

求 $\boldsymbol{u}_h=\boldsymbol{u}_h^k+\boldsymbol{u}_B,\ \boldsymbol{u}_h^k\in V_h^k,\ \boldsymbol{u}_B\in B_h$ 和 $p_h\in M_h$ 满足

$$\begin{cases}B(\boldsymbol{u}_h^k+\boldsymbol{u}_B,p_h;\boldsymbol{v}^k,q_h)=\int_\Omega P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}^k\mathrm{d}x & \forall\boldsymbol{v}^k\in V_h^k,\ q_h\in M_h,\\ B(\boldsymbol{u}_h^k+\boldsymbol{u}_B,p_h;\boldsymbol{v}_B,q_h)=\int_\Omega P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}_B\mathrm{d}x & \forall\boldsymbol{v}_B\in B_h,\ q_h\in M_h\cdot\end{cases} \tag{26}$$

在(26)的第二个方程中取 $q_h=0$ 可得

$$\nu\int_T\nabla(\boldsymbol{u}_h^k+\boldsymbol{C}_T b_T)\cdot\nabla b_T\mathrm{d}x-\int_T p_h\operatorname{div}b_T\mathrm{d}x=\int_T P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\cdot b_T\mathrm{d}x\cdot \tag{27}$$

注意到 $b_T\in H_0^1(T)^2$, 并利用 Green 公式可得

$$\int_T(\nu\Delta\boldsymbol{u}_h^k-\nabla p_h+P_h^{k-1}\boldsymbol{f})b_T\mathrm{d}x-\nu\boldsymbol{C}_T\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x=0\cdot \tag{28}$$

由面积坐标的性质(参见[9])可算出:

$$\int_T b_T\mathrm{d}x=\frac{|T|}{60} \tag{29}$$

和
$$\int_T P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\cdot b_T\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_T P_h^{k-1}\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\cdot \tag{30}$$

事实上, 当 $k=1$ 时, 由于 $P_h^{k-1}\boldsymbol{f}$ 在 T 上是常数, 这时, (30) 显然成立; 当 $k=2$ 时, 由于 $P_h^{k-1}\boldsymbol{f}$ 在 T 上是一次多项式, 不妨设

$$P_h^1\boldsymbol{f}|_T=\boldsymbol{f}_1\lambda_{T1}+\boldsymbol{f}_2\lambda_{T2}+\boldsymbol{f}_3\lambda_{T3}\cdot \tag{31}$$

则由面积坐标(参见[9])可算得

$$\int_T P_h^1\boldsymbol{f}\ b_T\mathrm{d}x=(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3)\cdot\frac{|T|}{180};\quad\int_T P_h^1\boldsymbol{f}\mathrm{d}x=(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3)\cdot\frac{|T|}{3}\cdot \tag{32}$$

从而当 $k=2$ 时, (30) 也成立· 注意到 ∇p_h 和 $\nu\Delta\boldsymbol{u}_h^k$ 在 T 上是常数, 则从(28) 可得

$$\boldsymbol{C}_T=\frac{1}{60\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x}\int_T[P_h^{k-1}\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h^k-\nabla p_h]\mathrm{d}x\cdot \tag{33}$$

于是, 利用 Green 公式可计算出

$$\nu\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}_B\cdot\nabla\boldsymbol{v}^k\mathrm{d}x=\nu\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\boldsymbol{C}_T\int_T\nabla b_T\cdot\nabla\boldsymbol{v}^k\mathrm{d}x=$$

$$-\nu\sum_{T\in\mathcal{T}_h}C_T\Delta v^k\int_T b_T\mathrm{d}x=-\frac{\nu}{60}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\frac{|T|(P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h,\Delta v^k)_T}{60\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x},\tag{34}$$

$$\int_\Omega q_h\mathrm{div}\,u_B\mathrm{d}x=\sum_{T\in\mathcal{T}_h}C_T\int_T q_h\mathrm{div}\,b_T\mathrm{d}x=-\sum_{T\in\mathcal{T}_h}C_T\cdot\nabla q_h|_T\int_T b_T\mathrm{d}x=$$
$$-\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\frac{|T|(P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h,\nabla q_h)_T}{3\,600\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x}.\tag{35}$$

将(34)～(35)代入(26)的第一个方程,便得到问题Q_h^k的简化的稳定化格式:

问题 Q_{Jh}^k　求$(u_h^k,p_h)\in V_h^k\times M_h$, $k=1,2$, 满足

$$B(u_h^k,p_h;v^k,q_h)+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\alpha_T(P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h,\nabla q_h-\nu\nabla v^k)_T=$$
$$\int_\Omega P_h^{k-1}f\cdot v^k\mathrm{d}x\qquad\forall v^k\in V_h^k,\ \forall q_h\in M_h,\tag{36}$$

其中 $\alpha_T=|T|/(3\,600\,\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x)$. 因为当 $k=1$ 时, $\Delta v^k=0$ 和 $\Delta u_h^k=0$, 所以, 当 $k=1$ 时, 问题 Q_{Jh}^k 会更简化. 通过计算可以得到:

$$\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x=\frac{d_T^2}{600|T|},\tag{37}$$

其中 $d_T^2=|e_1|^2+|e_2|^2+|e_3|^2$ 是单元 T 的3边 e_1,e_2,e_3 ($e_1\cup e_2\cup e_3=\partial T$) 的平方和. 则有

$$\alpha_T=|T|\bigg/\left(3\,600\,\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x\right)=6|T|^2/d_T^2\leqslant ch^2.\tag{38}$$

附注 B　从问题 Q_{Jh}^k 求出(u_h^k,p_h)后, 可以利用下面的方法求得问题 Q_h^k 的解(u_h,p_h):

$$u_h=u_h^k+u_B,\quad u_B|_T=\frac{b_T}{60\nu\int_T|\nabla b_T|^2\mathrm{d}x}\int_T[P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h]\mathrm{d}x.\tag{39}$$

于是, 由(38)可容易得到

$$\|u_B\|_{0,T}^2=\frac{5|T|^3}{126\nu^2d_T^4}\left|\int_T(P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h)\mathrm{d}x\right|^2.\tag{40}$$

上式表明, 问题 Q_h^k 的解的 u_h 的泡函数部分可以由问题 Q_{Jh}^k 的解表示. 下面将证明, 问题 Q_{Jh}^k 的解(u_h^k,p_h)与问题 Q_h^k 的解(u_h,p_h)具有相同的收敛精度.

3　简化的稳定化混合元格式的收敛性

在问题 Q 中取 $v=v^k$, $q=q_h$, 并与问题 Q_{Jh}^k 相减可得下面的误差方程:

$$B(u-u_h^k,p-p_h;v^k,q_h)-$$
$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\alpha_T(P_h^{k-1}f+\nu\Delta u_h^k-\nabla p_h,\nabla q_h-\nu\Delta v^k)_T=$$
$$(f-P_h^{k-1}f,v^k)\qquad\forall v^k\in V_h^k,\ \forall q_h\in M_h,\tag{41}$$

令 $I_h^k:H_0^1(\Omega)^2\cap H^{k+1}(\Omega)^2\to V_h^k$ 为插值算子, 则下面的估计成立(可参考[9]或[10])

$$|u-I_h^ku|_s\leqslant ch^{k-s+1}|u|_{k+1}\qquad 0\leqslant s\leqslant k+1.\tag{42}$$

一方面, 由(41)和(1)有

$$\nu(\nabla(u-u_h^k),\nabla(u-u_h^k))=\nu(\nabla(u-u_h^k),\nabla(u-I_h^ku))+$$
$$\nu(\nabla(u-u_h^k),\nabla(I_h^ku-u_h^k))=$$

$$
\begin{aligned}
&\nu(\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k),\nabla(\boldsymbol{u}-I_h^k\boldsymbol{u}))+(p-p_h,\operatorname{div}(I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))+\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(P_h^{k-1}\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h^k-\nabla p_h,\nu\Delta(I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))_T+\\
&(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)=\\
&\nu(\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k),\nabla(\boldsymbol{u}-I_h^k\boldsymbol{u}))+(p-p_h,\operatorname{div}(I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}))+\\
&(p-\rho_h p,\operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))+(\rho_h p-p_h,\operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))-\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},\nu\Delta(I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))_T+\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h),\nu\Delta(I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}))_T-\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h),-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))_T+\\
&(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},I_h^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k);
\end{aligned}
\tag{43}
$$

另一方面,再由(41)和(1)有

$$
\begin{aligned}
&(\rho_h p-p_h,\operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k))=\\
&\quad-\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(P_h^{k-1}\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h^k-\nabla p_h,\nabla(\rho_h p-p_h))_T=\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(\boldsymbol{f}-P_h^{k-1}\boldsymbol{f},\nabla(\rho_h p-p_h))_T-\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h),\nabla(\rho_h p-p))_T-\\
&\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T(-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h),\nabla(p-p_h))_T.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

注意到 $\alpha_T=6|T|^2/d_T^2\leqslant ch^2$. 结合(43)和(44),而且由(16)、(17)、(25)、(42)、Hölder不等式、Cauchy不等式和逆估计定理(可参见[9~10])有

$$
\begin{aligned}
&\nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k|_1^2+\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T\|-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h)\|_{0,T}^2\leqslant\frac{\nu}{2}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k|_1^2+\\
&\quad\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T\|-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h)\|_{0,T}^2+\\
&\quad ch^{2k}(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1}+\|p\|_k+\|\boldsymbol{f}\|_1)^2,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

即得

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k|_1+\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\alpha_T^{1/2}\|-\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k)+\nabla(p-p_h)\|_{0,T}\leqslant\\
&\quad ch^k(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1}+\|p\|_k+\|\boldsymbol{f}\|_1).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

结合(46)和(25)得到下面定理2.

定理2 如果 $\boldsymbol{f}\in H^1(\Omega)^2$ 而且问题(3)的解 $(\boldsymbol{u},p)\in H^{k+1}(\Omega)^2\times H^k(\Omega)$,那么问题 Q_{Jh}^k 的解 $(\boldsymbol{u}_h^k,p_h)$ 满足下面误差估计

$$
|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^k|_{1,\Omega}+\|p-p_h\|_{0,\Omega}\leqslant ch^k(\|\boldsymbol{u}\|_{k+1,\Omega}+\|p\|_{k,\Omega}+\|\boldsymbol{f}\|_{1,\Omega})\quad(k=1,2).
\tag{47}
$$

附注C 由于问题 Q_{Jh}^k 和问题 Q_h^k 的网格是相同的,因此,对比定理2的(47)和定理1的(14)(尽管它们的常数 c 可能不等)可知,问题 Q_{Jh}^k 的解 $(\boldsymbol{u}_h^k,p_h)$ 与问题 Q_h^k 的解 $(\boldsymbol{u}_h,p_h)$ 具有相同的收敛精度(在相差一个定常数情况下). 若剖分 $\mathscr{T}_h$ 的单元数目为 N_T,则容易算出利用问题 Q_{Jh}^k 求方程(1)的近似解较问题 Q_h^k 少 $2N_T$ 个自

由度• 本文的方法可以直接推广到三维的 Stokes 问题,只是 α_T 不同•

[参 考 文 献]

[1] Brezzi F, Douglas J. Stabilized mixed methods for the Stokes problem[J]. Numer Math, 1988, **53**(2): 225—235.

[2] Fix G J, Gunzburger M D, Nicolaides R A. On mixed finite element methods for the first elliptic systems[J]. Numer Math, 1981, **37**(1): 29—48.

[3] Neittanmäki P, Picard R. On finite element approximation of the gradient for the solution of Poisson equation[J]. Numer Math, 1981, **37**(3): 333—337.

[4] Pehlivanov A I, Carey G F. Error estimates for least_squares finite elements[J]. M2AN, 1994, **28**(5): 499—516.

[5] Russo A. A posteriori error estimators for the Stokes problems[J]. Appl Math Lett, 1995, **8**(1): 1—4.

[6] Zhou T X, Feng M F. A least squares Petrov_Galerkin finite element method for the staionary Navier_Stokes equations[J]. Math Comp, 1993, **60**(202): 531—543.

[7] 周天孝• 基于鞍点问题对偶组合的有限元法及其理论[J]. 中国科学(E 辑), 1997, **27**(1): 75—87.

[8] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier_Stokes Equations, Theorem and Algorithms[M]. Series in Computational Mathematics, Springer_Verlag, 1986: 1—210.

[9] 罗振东• 有限元混合法理论基础及其应用[M]• 济南: 山东教育出版社, 1996, 32—144.

[10] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer_Verlag, 1991, 1—190.

Convergence of Simplified and Stabilized Mixed Element Formats Based on Bubble Function for the Stokes Problem

LUO Zhen_dong[1,2], ZHU Jiang[2]

(1. Department of Mathematics, Capital Normal University,
Beijing 100037, P R China;
2. ICCES, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100029, P R China)

Abstract: Two simplified and stabilized mixed element formats for the Stokes problem are derived by bubble function, and their convergence, i. e., error analysis, are proved. These formats can save more freedom degrees than other usual formats.

Key words: Stokes problem; stabilized format; mixed element format; error analysis