应用数学和力学, 第 23 卷 第 10 期(2002 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 10_1080_05

变质量非 型非完整系统在相空间的 Lie 对称性与守恒量

方建会, 赵嵩卿, 焦志勇

(石油大学 应用物理系, 山东 东营 257061)

(张石生推荐)

摘要: 在相空间引入无限小群变换, 研究变质量非 型非完整系统的 Lie 对称和守恒量 利用系统运动微分方程在无限小群变换下的不变性建立 Lie 对称的确定方程和限制方程, 得到 Lie 对称的结构方程和守恒量, 并举例说明结果的应用

关 键 词: 非完整系统; 相空间; 分析力学; 变质量; Lie 对称; 守恒量
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统的对称性与守恒量的研究是数学、力学、物理学等领域的重要课题 力学系统的对称性与守恒量的近代理论包括 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论 1979 年 M. Lutzky 等人把数学家 S. Lie 研究微分方程不变性的扩展群方法引入力学领域加以研究, 提出了使运动微分方程不变的 Lie 对称性[1,2] 近年来, 对完整系统和非完整系统在位形空间的 Lie 对称性与守恒量的研究取得了一系列成果[3~7], 文[6] 研究了常质量非 型非完整系统在位形空间的 Lie 对称性与守恒量, 文[7] 研究了变质量完整系统在位形空间的 Lie 对称性与守恒量 文[8] 研究了常质量 型非完整系统在相空间的 Lie 对称性与守恒量 本文研究变质量非 型非完整系统在相空间的 Lie 对称性与守恒量, 给出其正则形式的 Lie 对称性质 由于变质量非 型非完整系统比常质量 型非完整系统更一般, 因此本文的结果具有更普遍的意义

1 系统的运动微分方程

研究 N 个质点组成的力学系统, 在 t 时刻第 i 个质点的质量为 m_i, 在 $t+ \mathrm{d}t$ 时刻由质点分离(或并入) 的微粒的质量为 $\mathrm{d}m_i$ 系统的位形有 n 个广义坐标 q_s ($s = 1, 2, , n$) 确定, 设 $m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$[9], 系统的运动受到 g 个彼此独立的非 型非完整约束

$$F (t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = 0 \qquad (= 1, 2, , g) \tag{1}$$

收稿日期: 2000_10_24; 修订日期: 2002_05_14
作者简介: 方建会(1957) , 男, 兰州人, 教授, 中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会理事, 已发表论文 50 多篇

约束(1)加在虚位移上的条件为

$$\sum_{s=1}^{n} f_{\ s}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})\ q_s = 0 \qquad (\ = 1, 2, \ , g), \tag{2}$$

一般来说, $f_{\ s}$ 与 F / q_s 无关, 特别地当 $f_{\ s} = F / q_s$ 时, 则约束为　　型非完整约束

由D Alembert_Lagrange原理和虚位移位方程(2), 利用Lagrange乘子法, 可得到变质量非　型非完整系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{L}{q_s} - \frac{L}{q_s} = Q_s + \ _s + \sum_{=1}^{g} \ f_{\ s} \qquad (s = 1, 2, \ , n), \tag{3}$$

其中

$$_s = \sum_{i=1}^{N}\left[m_i(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{r}_i)\ \frac{\boldsymbol{r}_i}{q_s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_i \ \boldsymbol{r}_i\frac{m_i}{q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_i \ \boldsymbol{r}_i\frac{m_i}{q_s}\right)\right]^{[9]} \tag{4}$$

为广义反推力, $\boldsymbol{u}_i$ 是分离(或并入) m_i 的微元质量相对 m_i 的速度, L 为系统的Lagrange函数, Q_s 为非势广义力, 　为约束乘子

方程(3)的正则形式为

$$\left.\begin{aligned} q_s &= \frac{H}{p_s} \\ p_s &= -\frac{H}{q_s} + Q_s + \ _s + \ _s \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, 2, \ , n), \tag{5}$$

其中 $_s = \sum_{=1}^{g} \ f_{\ s}$, p_s 为广义动量, $H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为系统的Hamilton函数

将 Q_s, $_s$ 表为 $t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ 的函数

$$\left.\begin{aligned} Q_s &= Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})), \\ _s &= \ _s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \ _s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

从式(4)知, $_s = \ _s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$, $_s$ 可表为 $t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}$ 的函数, 即

$$_s = \ _s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}) = \ _s[t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})], \tag{7}$$

则方程(5)可写为

$$\left.\begin{aligned} q_s &= \frac{H}{p_s}, \\ p_s &= -\frac{H}{q_s} + Q_s + \ _s + \ _s \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

称方程(8)为与变质量非完整系统(1)、(5)相应的变质量完整系统的运动微分方程

2　无限小变换和Lie对称性

设系统是非奇异的, 由式(8)可解出

$$\left.\begin{aligned} q_s &= h_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ p_s &= \ _s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, 2, \ , n) \tag{9}$$

引入相空间的无限小变换

$$\left.\begin{aligned} t^* &= t + \ t \\ q_s^* &= q_s + \ q_s \\ p_s^* &= p_s + \ p_s \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, 2, \ , n), \tag{10}$$

在一级近似下, 其展开式为

$$\left.\begin{aligned} t^{*} &= t + \quad {}_{0}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ q_s^{*} &= q_s + \quad {}_{s}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ p_s^{*} &= p_s + \quad {}_{s}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, 2, \quad , n), \tag{11}$$

其中 为无限小参数, ${}_{0}$、${}_{s}$、${}_{s}$ 为无限小单参数群变换的生成元

取无限小变换的生成元向量

$$\boldsymbol{X}^{(0)} = \quad {}_{0}\frac{}{t} + \sum_{s=1}^{n} {}_{s}\frac{}{q_s} + \sum_{s=1}^{n} {}_{s}\frac{}{p_s} \tag{12}$$

及它的一次扩展

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}({}_{s} - q_s {}_{0})\frac{}{q_s} + \sum_{s=1}^{n}({}_{s} - p_s {}_{0})\frac{}{p_s}, \tag{13}$$

则方程(9) 在无限小变换(11) 下的不变性归为如下方程[8]

$$\left.\begin{aligned} {}_{s} - q_s {}_{0} &= \boldsymbol{X}^{(0)}(h_s) \\ {}_{s} - p_s {}_{0} &= \boldsymbol{X}^{(0)}({}_{s}) \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, 2, \quad , n) \tag{14}$$

非 型非完整约束(1) 在无限小变换(11) 下的不变性归为如下方程

$$\boldsymbol{X}^{(0)}[F (t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})] = 0 \qquad (= 1, 2, \quad , g) \tag{15}$$

定义 1 如果无限小变换的生成元 ${}_{0}$、${}_{s}$、${}_{s}$ 满足方程(14)、(15), 则称变换是变质量非 型非完整系统(1)、(5) 在相空间的 Lie 对称变换

方程(14)、(15) 分别为变质量非 型非完整系统(1)、(5) 在相空间的 Lie 对称确定方程和限制方程

定义 2 如果无限小变换的生成元 ${}_{0}$、${}_{s}$、${}_{s}$ 满足确定方程(14), 则称变换是相应变质量完整系统(9) 在相空间的 Lie 对称变换

3 结构方程和守恒量

命题 对于满足方程(14)、(15) 的无限小变换生成元 ${}_{0}$、${}_{s}$、${}_{s}$, 如果存在满足结构方程

$$L_p {}_{0} + \boldsymbol{X}^{(1)}(L_p) + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + {}_{s} + {}_{s})({}_{s} - q_s {}_{0}) + G = 0 \tag{16}$$

的规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, 则变质量非 型非完整系统(1)、(5) 存在如下形式的守恒量

$$I = \sum_{s=1}^{n} p_s {}_{s} - H {}_{0} + G = \text{const}, \tag{17}$$

其中

$$L_p = L_p(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sum_{s=1}^{n} p_s q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) - H \tag{18}$$

为系统的 Lagrange 函数

证明 对式(17) 求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=0}^{n}(p_s {}_{s} + p_s {}_{s}) - \frac{H}{t} {}_{0} - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{H}{q_s}q_s + \frac{H}{p_s}p_s\right) {}_{0} - H {}_{0} + G \tag{19}$$

由式(16) 得

$$\left(\sum_{s=1}^{n} p_s q_s - H\right) {}_{0} - \frac{H}{t} {}_{0} - \sum_{s=1}^{n}\frac{H}{q_s} {}_{s} + \sum_{s=1}^{n}\left(q_s - \frac{H}{p_s}\right) {}_{s} +$$

$$\sum_{s=1}^{n}(\quad_s - q_s \quad_0) p_s + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + \quad_s + \quad_s)(\quad_s - q_s \quad_0) + G = 0 \tag{20}$$

将式(20)代入式(19),整理得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \sum_{s=1}^{n}\left[p_s + \frac{H}{q_s} - Q_s - \quad_s - \quad_s\right]_s + \sum_{s=1}^{n}\left[-p_s - \frac{H}{q_s} + Q_s + \quad_s + \quad_s\right] q_s \quad_0 = 0$$

当 m_i 为常量,$f\ _s = F / q_s$ 时,本文结果给出文[8]的结果

4 算　例

一变质量质点的质量为 $m(t) = m_0 e^{-kt}$(m_0, k 均为常数),微粒分离质点的相对速度为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{r} = -q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j}, \tag{21}$$

质点受有非完整约束

$$F = q_2 - tq_1 = 0 \tag{22}$$

假设约束(22)是非　　　型的,虚位移方程为

$$q_1 - \quad q_2 = 0, \tag{23}$$

系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2), \tag{24}$$

非势广义力不存在　试研究系统在相空间的Lie对称和守恒量

系统Hamilton函数为

$$H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \sum_{s=1}^{n} p_s q_s - L = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2), \tag{25}$$

由式(8)可得到

$$\left.\begin{aligned} & q_1 = \frac{p_1}{m},\ q_2 = \frac{p_2}{m}, \\ & p_1 = \quad_1 = \quad,\ p_2 = \quad_2 = - \quad, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由式(22)和(26)可解得

$$= -\frac{p_1}{1+t}, \tag{27}$$

由式(9)、(26)、(27)得

$$\left.\begin{aligned} & h_1 = q_1 = \frac{p_1}{m},\ h_2 = q_2 = \frac{p_2}{m}, \\ & _1 = p_1 = -\frac{p_1}{1+t},\quad _2 = p_2 = \frac{p_1}{1+t} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

将式(28)代入式(14)得

$$_1 - q_1\ _0 = k\ _0\frac{p_1}{m} + \quad_1\frac{1}{m}, \tag{29a}$$

$$_2 - q_2\ _0 = k\ _0\frac{p_2}{m} + \quad_2\frac{1}{m}, \tag{29b}$$

$$_1 - p_1\ _0 = \quad_0\frac{p_1}{(1+t)^2} - \quad_1\frac{1}{1+t}, \tag{29c}$$

$$_2 - p_2\ _0 = -\quad_0\frac{p_1}{(1+t)^2} + \quad_1\frac{1}{1+t} \tag{29d}$$

由式(15)、(22)可得

$$ {}_0[k(p_2 - tp_1) - p_1] + {}_2 - {}_1 t = 0 \tag{30}$$

方程(29)、(30)存在如下解

$$ {}_0 = 0,\quad {}_1 = 0,\quad {}_2 = 0,\quad {}_1 = 1,\quad {}_2 = 1 \tag{31}$$

对生成元(31),由结构方程(16)可得到

$$ G = 0,\quad G = \text{const}, \tag{32}$$

由式(17)给出守恒量

$$ I = p_1 + p_2 = \text{const} \tag{33}$$

[参　考　文　献]

[1] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities [J]. J Phys A: Mach Gen, 1979, 12(7): 973) 981.

[2] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations [M]. New York: Springer_Verlag, 1989.

[3] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, 23(3): 360) 372.

[4] 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性和守恒量[J]. 力学学报, 1994, 26(3): 380) 384.

[5] WU Run_heng, MEI Feng_xiang. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems[J]. Journal of Beijing Institute Technology, 1997, 6(3): 229) 235.

[6] 梅凤翔, 吴润衡, 张永发. 非 ¶Ä±ª 型非完整系统 Lie 对称性与守恒量[J]. 力学学报, 1998, 30(4): 468) 474.

[7] 梅凤翔. 变质量完整力学系统的 Lie 对称性和守恒量[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(6): 592) 596.

[8] 刘荣万, 傅景礼. 非完整非保守力学系统在相空间的 Lie 对称性与守恒量[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(6): 597) 601.

[9] 梅凤翔, 刘瑞, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.

The Lie Symmetries and Conserved Quantities of Variable_Mass Nonholonomic System of Non_Chetaev.s Type in Phase Space

FANG Jian_hui,　ZHAO Song_qing,　JIAO Zhi_yong

(Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257061, P R China)

Abstract: The Lie symmetries and the conserved quantities of a variable mass nonholonomic system of non_Chetaev. s type are studied by introducing the infinitesimal transformations of groups in phase space. By using the invariance of the differential equations of motion under the infinitesmal transformations of groups, the determining equations and the restriction equations of the Lie symmetries of the system are established, and the structure equations and the conserved quantities are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Key words: nonholonomic system; phase space; analytic mechanics; variable mass; Lie symmetry; conserved quantity