应用数学和力学, 第 23 卷 第 10 期(2002 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 10_1093_08

两自由度非线性振动系统周期运动及其稳定性研究*

刘 俊

(曲靖师范学院 数学系, 云南 曲靖 655000)

(李继彬推荐)

摘要: 运用 Liapunov 函数方法, 对一类两自由度非线性振动系统周期运动及其稳定性进行了研究, 得到了存在唯一渐近稳定的周期解的充分条件•

关 键 词: 非线性振动; 周期运动; Liapunov 函数; 周期解
中图分类号: O322; O175. 14 文献标识码: A

引 言

在非线性振动系统中, 周期运动具有头等的重要性, 但周期解的存在性是一个很困难的问题, 好在实际物理系统中往往存在着某种形式的周期解, 因此, 通常都是在周期解存在的前提下, 对特殊模型进行近似计算分析和应用, 但计算工作量大、精度又不高• 如文献[1] 提出的 Lindsted_Poincar 法、平均法、多尺度法等, 这些方法对分析单自由度系统弱非线性问题一般行之有效, 对多自由度系统问题, 一般求助于数值方法, 但这样处理存在一个缺陷: 对非线性问题误差较大• 因此, 对非线性系统周期解的存在唯一性进行研究具有重要的意义•

本文研究一类两自由度非线性振动系统的周期运动及其稳定性, 这一模型是由两个互耦的二阶非线性微分方程组表达, 此模型的一般形式是:

$$\begin{cases} \ddot{x} + P(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{x} + Q(t, x, y)x = f(x, y)\cos\omega t, \\ \ddot{y} + \Phi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{y} + H(t, x, y)y = g(x, y)\cos\omega t, \end{cases} \tag{1}$$

其中, $P(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{x}$, $\Phi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{y}$ 是阻力; $Q(t, x, y)x$, $H(t, x, y)y$ 是势; $f(x, y)\cos\omega t$, $g(x, y)\cos\omega t$ 是周期性强迫外力; ω 是角频率•

方程组(1) 能够描述许多的物理现象, 在理论与应用方面都有很重要的地位• 例如, 系统(1) 广泛存在于动力机械、弹性结构的动力屈曲、船舶在海洋中的航行、航空航天设备(火箭或绳系卫星) 、流固耦合系统等工程实际问题中[2], 研究这类系统对于解决工程实际问题具有重要的意义• 在通常情况下, 都是针对特殊系统采用数值计算求近似周期解[1~ 6]• 本文利用 Liapunov 函数方法, 对系统(1) 周期解的存在唯一性及其稳定性进行了研究, 得到了存在唯一渐近稳定的周期解的充分条件•

* 收稿日期: 2001_02_27; 修订日期: 2002_04_01
基金项目: 云南省教育厅应用基础研究基金资助课题(0012226)
作者简介: 刘俊(1963—) , 男, 昆明人, 副教授, 硕士.

1 预备知识

在证明结果之前,有必要介绍一下定理证明过程中引用的结论．为叙述方便,考虑微分方程系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t, x), \tag{2}$$

其中: $F(t, x) \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$, $F(t+\omega, x) = F(t, x)$ ($\omega > 0$ 是周期)．

引理 1[7] 如果存在一个 Liapunov 函数 $V(t, x)$ 在乘积空间

$$\Omega: I(0 \leqslant t < +\infty) \times E_R(\|x\| \geqslant R, R > 0)$$

上连续可微 (R 可以足够大), 且满足:

(i) $a(\|x\|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\|x\|)$, 其中 $a(r)$、$b(r)$ 是连续的, 且 $\lim\limits_{r \to +\infty} a(r) = +\infty$;

(ii) $$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\Big\{V(t+h, x+hF(t, x)) - V(t, x)\Big\} \leqslant$$
$$-[c - \lambda_1(t)]V(t, x) + \lambda_2(t)\sqrt{V(t, x)}．$$

其中 $c > 0$ 是常数, $\lambda_i(t) \geqslant 0$ ($i = 1, 2$) 是连续函数, 且满足:

$$\lim_{(t, v) \to (\infty, \infty)} \frac{1}{v}\int_t^{t+v} \lambda_1(s)\mathrm{d}s < c \text{ 和 } \sup_{t \geqslant 0}\int_t^{t+1} \lambda_2(s)\mathrm{d}s < +\infty．$$

那么方程(2)的解是一致最终有界的．

引理 2[8] 如果系统(2)的解是最终有界的, 且界是 M, 则系统(2)存在以 ω 为周期的周期解, 且 $\|x(t)\| \leqslant M$, ($\forall t \in [t_0, +\infty)$, $t_0 \geqslant 0$)．

引理 3[9] 如果系统(2)是非常稳定的, 且有一个有界解, 则系统(2)存在唯一的以 ω 为周期的周期解, 且(2)的所有其它解当 $t \to \infty$ 时都逼近于它．

2 主要结果

先对非线性项作特殊处理, 设

$$P(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{x} = a(t)\dot{x} + p(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}),$$
$$Q(t, x, y)x = b(t)x + q(t, x, y),$$
$$\Phi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})\dot{y} = c(t)\dot{y} + \varphi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}),$$
$$H(t, x, y)y = d(t)y + h(t, x, y),$$

而 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 均为正的连续可微函数, 且均以 ω 为周期． $p(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})$、$\varphi(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})$、$q(t, x, y)$、$h(t, x, y)$ 均为各自变量的连续可微函数, 且对变量 t 而言, 均是以 ω ($\omega > 0$) 为周期的周期函数．

于是, 可将系统(1)化成如下等价方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -b(t)x_1 - a(t)x_2 - p(t, x_1, x_2, x_3, x_4) - \\ \qquad q(t, x_1, x_3) + f(x_1, x_3)\cos\omega t, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -d(t)x_3 - c(t)x_4 - \varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4) - \\ \qquad h(t, x_1, x_3) + g(x_1, x_3)\cos\omega t． \end{cases} \tag{3}$$

系统(3)的系数矩阵为:

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -b(t) & -a(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -d(t) & -c(t)\end{bmatrix}. \tag{4}$$

定理 1 设系统(3)满足下列条件:

(ⅰ) 系数矩阵(4)的广义特征方程的广义特征根 $\lambda_i(t)$ 均有负实部, 即

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(t)\leqslant-\delta<0\qquad(i=1,2,3,4),$$

其中 δ 是一个正常数;

(ⅱ) $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 均为正有界函数, 设公共上界为 M (不妨假定 $M>1$);

(ⅲ) $|\dot{a}(t)|\leqslant\eta$, $|\dot{b}(t)|\leqslant\eta$, $|\dot{c}(t)|\leqslant\eta$, $|\dot{d}(t)|\leqslant\eta$, $t\in[0,+\infty)$, $0<\eta\leqslant\delta^{10}/2M^6$;

(ⅳ) $$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|}{\rho}=\mu_1,\quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{|q(t,x_1,x_3)|}{\rho}=\mu_2,$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|}{\rho}=\mu_3,\quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{|h(t,x_1,x_3)|}{\rho}=\mu_4,$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|f(x_1,x_3)|}{\rho}=\mu_5,\quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{|g(x_1,x_3)|}{\rho}=\mu_6,$$

其中 $\rho=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{1/2}$, $\mu=\max\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6\}$, $0<\mu<7\sqrt{2}\,\delta^{10}/96M^6$.

则系统(3)至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

证明 为方便, 把 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$、$d(t)$ 分别记作 a、b、c、d, 系数矩阵(4)的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可化为

$$\lambda^4+(a+c)\lambda^3+(ac+b+d)\lambda^2+(ad+bc)\lambda+bd=0.$$

由条件(ⅰ)知满足 Routh_Hurwitz 条件, 故有

$$\Delta\overset{\Delta}{=}(a+c)(ac+b+d)(ad+bc)-bd(a+c)^2-(ad+bc)^2>0.$$

由根与系数之间的关系, 可推得

$$a+c=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\geqslant4\delta;$$

$$ac+b+d=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\geqslant6\delta^2;$$

$$ad+bc=-(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\geqslant4\delta^3;$$

$$bd=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\geqslant\delta^4;$$

$$\Delta\geqslant64\delta^6.$$

构造 Liapunov 函数如下:

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4, \tag{5}$$

其中

$$V_1=\frac{1}{2}\left(ad+\frac{bd}{a}\right)\Delta x_1^2+d\,\Delta x_1x_2+\frac{d}{2a}\Delta x_2^2,$$

$$V_2=\frac{b^2d}{2a}\Delta x_1^2+\frac{bd}{2a}\Delta x_2^2,$$

$$V_3=\frac{1}{2}\left(bc+\frac{bd}{c}\right)\Delta x_3^2+b\,\Delta x_3x_4+\frac{b}{2c}\Delta x_4^2,$$

$$V_4=\frac{bd^2}{2c}\Delta x_3^2+\frac{bd}{2c}\Delta x_4^2.$$

由于 $V_1 \geqslant 2\Delta|x_1x_2|\sqrt{0.5(ad+bd/a)d/2a}+d\Delta x_1x_2\geqslant 0$, 同理 $V_3\geqslant 0$, 故 V 是正定的, 因此

$$V\geqslant V_2+V_4\geqslant$$
$$\Delta\left(\frac{b^2d}{2M}x_1^2+\frac{bd}{2M}x_2^2+\frac{bd^2}{2M}x_3^2+\frac{bd}{2M}x_4^2\right)\geqslant$$
$$64\delta^6\cdot\frac{\delta^4}{2M}[6\delta^2(x_1^2+x_3^2)+(x_2^2+x_4^2)]\geqslant$$
$$\frac{32B\delta^{10}}{M}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2),$$

其中 $B=\min(6\delta^2,1)$•

同样地, 经过大量计算, 又可估计出

$$V\leqslant 16M^7(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)• \tag{6}$$

故 V 有无穷小上界•

沿着系统(3)的轨线, 对 V 求全导数, 得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}[-bx_1-ax_2-p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-$$
$$q(t,x_1,x_3)+f(x_1,x_3)\cos\omega t]+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_4+\frac{\partial V}{\partial x_4}[-dx_3-cx_4-$$
$$\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-h(t,x_1,x_3)+g(x_1,x_3)\cos\omega t]\leqslant$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|-bd\Delta(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}[-p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-q(t,x_1,x_3)+f(x_1,x_3)\cos\omega t]\right|+$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_4}[-\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4)-h(t,x_1,x_3)+g(x_1,x_3)\cos\omega t]\right|•$$

由条件(ii)、(iii), 可得

$$\left|\frac{\partial V_1}{\partial t}\right|\leqslant\eta M^6(70x_1^2+40x_2^2),\quad\left|\frac{\partial V_2}{\partial t}\right|\leqslant\eta M^6(26x_1^2+22x_2^2),$$
$$\left|\frac{\partial V_3}{\partial t}\right|\leqslant\eta M^6(70x_3^2+40x_4^2),\quad\left|\frac{\partial V_4}{\partial t}\right|\leqslant\eta M^6(26x_3^2+22x_4^2),$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|\leqslant\left|\frac{\partial V_1}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial V_2}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial V_3}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial V_4}{\partial t}\right|\leqslant 96\eta M^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2),$$

又有

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|\leqslant 16M^6(|x_1|+|x_2|)\leqslant 16\sqrt{2}M^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{1/2},$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_4}\right|\leqslant 16M^6(|x_3|+|x_4|)\leqslant 16\sqrt{2}M^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{1/2},$$
$$bd\Delta\geqslant\delta^6\cdot 64\delta^6=64\delta^{10}•$$

由条件(iv)知, 对任意给定的 $\varepsilon_0(0<\varepsilon_0<\sqrt{2}\delta^{10}/192M^6)$, 存在充分大的 $R>0$, 使得 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant R^2$, 有

$$|p(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho,\quad|q(t,x_1,x_3)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho,$$
$$|\varphi(t,x_1,x_2,x_3,x_4)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho,\quad|h(t,x_1,x_3)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho,$$
$$|f(x_1,x_3)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho,\quad|g(x_1,x_3)|\leqslant(\mu+\varepsilon_0)\rho•$$

由(6), 在乘积空间

$$\Omega^*: I(0 \leqslant t < +\infty) \times \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant R^2\right\},$$

我们有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)} \leqslant [96\eta M^6 - 64\delta^{10} + 96\sqrt{2}M^6(\mu + \varepsilon_0)](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) =$$

$$-[(48\delta^{10} - 96\eta M^6) + (14\delta^{10} - 96\sqrt{2}M^6\mu) +$$

$$(\delta^{10} - 96\sqrt{2}M^6\varepsilon_0) + \delta^{10}](x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \leqslant$$

$$-\delta^{10}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \leqslant -\frac{\delta^{10}}{16M^7}V.$$

由引理1知, 系统(3)的解是一致最终有界的, 它的有界域是

$$\Omega: I(0 \leqslant t < +\infty) \times \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < R^2\right\}.$$

再由引理2知, 系统(3)至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

定理2 如果系统(3)满足

1) 定理1中的条件(i), (ii), (iii);

2) 系统(3)中的所有函数 p、q、h、φ、f、g 关于各自变元有连续偏导数, 且存在一个正常数 $\beta < 7\sqrt{2}\delta^{10}/192M^6$, 使得

$$\lim_{x_i^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 p'_{x_i}(t, x_1, x_2, x_3, x_4)\mathrm{d}s\right| < \beta, \quad \lim_{x_i^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 \varphi'_{x_i}(t, x_1, x_2, x_3, x_4)\mathrm{d}s\right| < \beta$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\lim_{x_n^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 q'_{x_n}(t, x_1, x_3)\mathrm{d}s\right| < \beta, \quad \lim_{x_n^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 h'_{x_n}(t, x_1, x_3)\mathrm{d}s\right| < \beta,$$

$$\lim_{x_n^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 f'_{x_n}(t, x_1, x_3)\mathrm{d}s\right| < \beta, \quad \lim_{x_n^2(s)\to\infty}\left|\int_0^1 g'_{x_n}(t, x_1, x_3)\mathrm{d}s\right| < \beta$$

$$(n = 1, 3).$$

则系统(3)存在唯一渐近稳定的周期解.

证明 设 (x_1, x_2, x_3, x_4) 和 (z_1, z_2, z_3, z_4) 是系统(3)的任意两个解, 则

$$\frac{\mathrm{d}(x_1 - z_1)}{\mathrm{d}t} = x_2 - z_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}(x_2 - z_2)}{\mathrm{d}t} = -b(x_1 - z_1) - a(x_2 - z_2) -$$

$$[p(t, x_1, x_2, x_3, x_4) - p(t, z_1, z_2, z_3, z_4)] -$$

$$[q(t, x_1, x_3) - q(t, z_1, z_3)] + [f(x_1, x_3) - f(z_1, z_3)]\cos\omega t,$$

$$\frac{\mathrm{d}(x_3 - z_3)}{\mathrm{d}t} = x_4 - z_4,$$

$$\frac{\mathrm{d}(x_4 - z_4)}{\mathrm{d}t} = -d(x_3 - z_3) - c(x_4 - z_4) -$$

$$[\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4) - \varphi(t, z_1, z_2, z_3, z_4)] -$$

$$[h(t, x_1, x_3) - h(t, z_1, z_3)] + [g(x_1, x_3) - g(z_1, z_3)]\cos\omega t.$$

由积分中值定理, 有

$$q(t, x_1, x_3) - q(t, z_1, z_3) =$$

$$[q(t, x_1, x_3) - q(t, z_1, x_3)] + [q(t, z_1, x_3) - q(t, z_1, z_3)] =$$

$$(x_1-z_1)\int_0^1 q'(t, sx_1+(1-s)z_1, x_3)\mathrm{d}s+$$
$$(x_3-z_3)\int_0^1 q'(t, z_1, sx_3+(1-s)z_3)\mathrm{d}s \stackrel{\Delta}{=}$$
$$(x_1-z_1)\int_0^1 q'_1\mathrm{d}s+(x_3-z_3)\int_0^1 q'_3\mathrm{d}s,$$

类似地有

$$p(t, x_1, x_2, x_3, x_4)-p(t, z_1, z_2, z_3, z_4)=$$
$$(x_1-z_1)\int_0^1 p'(t, sx_1+(1-s)z_1, x_2, x_3, x_4)\mathrm{d}s+$$
$$(x_2-z_2)\int_0^1 p'(t, z_1, sx_2+(1-s)z_2, x_3, x_4)\mathrm{d}s+$$
$$(x_3-z_3)\int_0^1 p'(t, z_1, z_2, sx_3+(1-s)z_3, x_4)\mathrm{d}s+$$
$$(x_4-z_4)\int_0^1 p'(t, z_1, z_2, z_3, sx_4+(1-s)z_4)\mathrm{d}s \stackrel{\Delta}{=}$$
$$(x_1-z_1)\int_0^1 p'_1\mathrm{d}s+(x_2-z_2)\int_0^1 p'_2\mathrm{d}s+$$
$$(x_3-z_3)\int_0^1 p'_3\mathrm{d}s+(x_4-z_4)\int_0^1 p'_4\mathrm{d}s,$$

$$f(x_1, x_3)-f(z_1, z_3)=(x_1-z_1)\int_0^1 f'_1\mathrm{d}s+(x_3-z_3)\int_0^1 f'_3\mathrm{d}s,$$

$$g(x_1, x_3)-g(z_1, z_3)=(x_1-z_1)\int_0^1 g'_1\mathrm{d}s+(x_3-z_3)\int_0^1 g'_3\mathrm{d}s,$$

$$h(t, x_1, x_3)-h(t, z_1, z_3)=(x_1-z_1)\int_0^1 h'_1\mathrm{d}s+(x_3-z_3)\int_0^1 h'_3\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(t, x_1, x_2, x_3, x_4)-\varphi(t, z_1, z_2, z_3, z_4)=$$
$$(x_1-z_1)\int_0^1 \varphi'_1\mathrm{d}s+(x_2-z_2)\int_0^1 \varphi'_2\mathrm{d}s+$$
$$(x_3-z_3)\int_0^1 \varphi'_3\mathrm{d}s+(x_4-z_4)\int_0^1 \varphi'_4\mathrm{d}s\cdot$$

令 $u_i=x_i-z_i(i=1, 2, 3, 4)$, 于是得到:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=u_2,\\
&\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}=-bu_1-au_2-u_1\int_0^1 p'_1\mathrm{d}s-u_2\int_0^1 p'_2\mathrm{d}s-u_3\int_0^1 p'_3\mathrm{d}s-u_4\int_0^1 p'_4\mathrm{d}s-\\
&\qquad u_1\int_0^1 q'_1\mathrm{d}s-u_3\int_0^1 q'_3\mathrm{d}s+\left(u_1\int_0^1 f'_1\mathrm{d}s+u_3\int_0^1 f'_3\mathrm{d}s\right)\cos\omega t,\\
&\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}=u_4,\\
&\frac{\mathrm{d}u_4}{\mathrm{d}t}=-du_3-cu_4-u_1\int_0^1 \varphi'_1\mathrm{d}s-u_2\int_0^1 \varphi'_2\mathrm{d}s-u_3\int_0^1 \varphi'_3\mathrm{d}s-u_4\int_0^1 \varphi'_4\mathrm{d}s-\\
&\qquad u_1\int_0^1 h'_1\mathrm{d}s-u_3\int_0^1 h'_3\mathrm{d}s+\left(u_1\int_0^1 g'_1\mathrm{d}s+u_3\int_0^1 h'_3\mathrm{d}s\right)\cos\omega t\cdot
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

由条件 2), 对任意给定 $\varepsilon_1(0<\varepsilon_1<\delta^{10}/192\sqrt{2}M^6)$, 存在充分大的 $R_1(R_1>R)$, 使 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$+ x_4^2 \geqslant R_1^2$, 就有

$$\left|\int_0^1 q_n' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1; \quad \left|\int_0^1 h_n' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1;$$

$$\left|\int_0^1 f_n' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1; \quad \left|\int_0^1 g_n' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1 \qquad (n = 1, 3);$$

$$\left|\int_0^1 p_i' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1; \quad \left|\int_0^1 \varphi_i' \mathrm{d}s\right| < \beta + \varepsilon_1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

仿定理1的证明, 仍然取(5)作为(7)的Liapunov函数, 只需把(5)中的 x_i 改为u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, 对(5)沿着(7)的轨线求全导数, 得到:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(7)} = {} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial u_1}u_2 + \frac{\partial V}{\partial u_2}\Big[- bu_1 - au_2 - u_1\int_0^1 p_1' \mathrm{d}s - u_2\int_0^1 p_2' \mathrm{d}s - u_3\int_0^1 p_3' \mathrm{d}s - \\
& u_4\int_0^1 p_4' \mathrm{d}s - u_1\int_0^1 q_1' \mathrm{d}s - u_3\int_0^1 q_3' \mathrm{d}s + \left(u_1\int_0^1 f_1' \mathrm{d}s + u_3\int_0^1 f_3' \mathrm{d}s\right)\cos\omega t\Big] + \\
& \frac{\partial V}{\partial u_3}u_4 + \frac{\partial V}{\partial u_4}\Big[- du_3 - cu_4 - u_1\int_0^1 \varphi_1' \mathrm{d}s - u_2\int_0^1 \varphi_2' \mathrm{d}s - u_3\int_0^1 \varphi_3' \mathrm{d}s - \\
& u_4\int_0^1 \varphi_4' \mathrm{d}s - u_1\int_0^1 h_1' \mathrm{d}s - u_3\int_0^1 h_3' \mathrm{d}s + \left(u_1\int_0^1 g_1' \mathrm{d}s + u_3\int_0^1 g_3' \mathrm{d}s\right)\cos\omega t\Big] \leqslant \\
& \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| - bd(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^3) + 6(\beta + \varepsilon_1)\left\{\left|\frac{\partial V}{\partial u_2}\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial u_4}\right|\right\} \times \\
& \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)} \leqslant \\
& [96\eta M^6 - 64\delta^{10} + 192\sqrt{2}(\beta + \varepsilon_1)M^6](u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = \\
& -[(48\delta^{10} - 96\eta M^6) + (14\delta^{10} - 192\sqrt{2}M^6\beta) + (\delta^{10} - 192\sqrt{2}M^6\varepsilon_1) + \\
& \delta^{10}](u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \leqslant - \delta^{10}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \leqslant - \frac{\delta^{10}}{16M^7}V.
\end{aligned}$$

因此, 在乘积空间

$$\Omega^*: I(0 \leqslant t < +\infty) \times \left\{(u_1, u_2, u_3, u_4) \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \geqslant R_1^2\right\},$$

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\,|_{(7)}$ 是定负的, 则系统(7)的零解渐近稳定, 从而系统(7)是非常稳定的, 根据引理3知, 系统(3)存在唯一的以 ω 为周期的渐近稳定的周期解.

致谢　本文是在北京大学作为访问学者期间完成, 承蒙导师王铎教授热情指导、鼓励和帮助, 谨致谢意.

[参 考 文 献]

[1] Nayfey A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: A Wiley Interscience Publication, 1979, 92—98.

[2] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔理论和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993, 180—198.

[3] 丁皓江, 陈伟球, 刘钟. 球壳和柱壳振动中的一类方程组的求解[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(1): 1—13.

[4] 凌复华. 非线性振动系统周期解的数值分析[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(4): 489—505.

[5] 凌复华. 非线性振动系统周期运动及其稳定性的数值研究[J]. 力学进展, 1986, **16**(1): 14—27.

[6] Rosenberg R M, Atkinson C P. On the natural modes and their stability in nonlinear two_degree_of_freedom system[J]. J Appl Mech, 1959, **26**(3): 377—385.

[7] Hara T. On the uniform ultimate boundedness of the solutions of certain third order differential equa-

tions[J]. J Math Anal Appl, 1981, **80**(5): 533—544.

[8] WANG Lian, WANG Mu_qiu. On periodic solution of higher order nonlinear periodical system[J]. Ann Differential Equations, 1987, **3**(1): 15—26.

[9] Lasall J, Lefscht S. Stability by Liapunov's Direct Method With Application[M]. New York: Academic Press, 1961, 121—123.

Research of the Periodic Motion and Stability of Two_Degree_of_Freedom Nonlinear Oscillating Systems

LIU Jun

(Department of Mathematics, Qujing Normal College, Qujing, unnan 655000, P R China)

Abstract: The periodic motion and stability for a class of two_degree_of_freedom nonlinear oscilating systems are studied by using the method of Liapunov function. The sufficient conditions which guarantee the existence, uniqueness and asymptotic stability of the periodic solutions are obtained.

Key words: nonlinear oscillation; periodic motion; Liapunov function; periodic system