应用数学和力学, 第 23 卷 第 9 期(2002 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 09_0903_12

扁球旋转大气阻力对人造卫星运动的影响*

KH. I. 哈里尔

(赫尔文国家天文地球物理研究所, 开罗, 埃及)

(钱伟长推荐)

摘要: 描述了在地球扁率和大气阻力联合作用的人造卫星运动· 导出了系统的哈密顿运动方程, 其中包括直到 J_4 的重力势带调和函数的阻力加速度· 大气模型采用带扁椭球旋转模型, 随着离地距离的增加, 大气旋转滞后于地球旋转· 首先, 借助两次正则变换, 接连消去短期项和长期项求得无阻力问题的解· 然后再定义一个算子, 并利用无阻力问题解中带“ 两撇形式的变量” 给出求解阻力加速度的公式·

关 键 词: 扁率; 哈密顿函数; Lie 变换
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

由于大气阻力对近地卫星的致命作用, 从 1957 年发射第一颗人造地球卫星, Sputnik I 开始就引起人们的极大兴趣· 尽管这样, 大多数工作都只分别考虑了大气阻力或地球扁率对卫星的影响· Kampos(1968) [1], Sehnal(1975) [2], King_Hele(1987) [3] 以及 Milani 等(1987) [4] 等人的工作对此作了很好的评述·

Brouwer 和 Hori(1961) [5] 首次利用非旋转大气球形指数模型综合考虑了大气阻力和地球扁率的影响·

Sehnal(1975) [2] 指出, 由于大气密度可能随太阳活动而突然变化, 也由于离地球表面 400km 以上阻力常数迅速增大, 要得到精确的连续解析解是困难的·

Hoots(1981) [6] 在轨道偏心率比较小 ($e < 0.1$), 且倾角不接近零或临界倾角的情况下发展了地心引力和大气阻力联合作用的理论 ·

Delhase(1991) [7] 利用大气密度随高度线性变化的扁椭球旋转大气模型, 同时考虑了地球扁率(仅包括 J_2) 和大气阻力的影响, 并得到了解析解·

本文的目的是给出地球扁率和大气阻力对人造卫星运动联合作用下的解析解, 我们建立了一个大气指数模型· 假设大气以角速度 $\sigma_a = \sigma R/r$ 旋转, 可见, 当 $r \to \infty$ 时, $\sigma_a \to 0$, 当 $r \to R$ 时, $\sigma_a \to \sigma$· 其中 r 是离地球中心的距离; R 是地球赤道半径, σ 是角速度· 我们分下面几步进行:

1) 构造正则运动方程, 这个方程除了包含阻力的广义分量外, 还应当包括重力势直到 J_4

* 收到日期: 2001_07_24
注: 原稿为英文, 由陈兴芜 译, 吴承平 校.

的带调•

2) 用 Delaunay 变量表示方程•

3) 用 Lie 变换求解无阻力问题, 正如 Deprit(1969)[8] 和 Kamel(1969)[9] 的工作一样•

4) 用无阻力问题的带双撇的变量表示有阻力问题, 与 Brouwer 和 Hori(1961)[5] 的工作类似, 我们定义并使用了算子 D•

1 大气模型

卫星单位质量所受阻力 X 可表示为

$$\boldsymbol{X} = -\frac{1}{2}C_D\frac{A}{m}\rho V\boldsymbol{V}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 是卫星与大气的相对速度, C_D 是无量纲阻力系数, A/m 是卫星的面积与质量比, ρ 是大气密度•

1.1 密度函数

为积分运动方程, 需要知道大气密度的解析表达式• 大气密度是时间和位置的非常不规则的复变量, 而且它还要受太阳活动和大气冷热的很大影响• 因此, 要找到时间相关的解析表达式非常困难• 考虑到大气并不是球对称, 而是一个扁椭球, 有必要引入扁率来描述大气密度• 假设大气密度随高度按指数规律变化:

$$\rho = \rho_p\exp\left[\frac{r-r_p}{H}\right], \tag{2}$$

其中脚标 p 表示近地点, H 是大气标高•

考虑到大气扁率, 我们用卫星离开地球表面的距离与近地点的距离之差 $(z-z_p)$ 来代替 $(r-r_p)$, 于是

$$\frac{z-z_p}{H} = c'\frac{I-\cos f}{I+\cos f} + \kappa s^2\left\{\sin^2(f-g)-\sin^2 g\right\}, \tag{3}$$

其中

$$c' = \frac{a(1-e)}{H}, \quad \kappa = R\varepsilon\frac{s^2}{H}, \quad s = \sin I, \quad c = \cos I,$$

而 I、f 和 g 分别是倾角、真近点角和近地角, 且 $u = f+g$, R 是地球赤道半径, ε 是偏心率• 当高度为 150km 时, H 大约是 34km• 如果取单位长度 $R = 1$, 那么, $\kappa = 0.0001\, s^2$• 高度越高, 它的值越小• 因此, 我们可以将密度函数按 κ 的幂级数展开• 由方程(3), 密度函数(2) 可表示为

$$\rho = \rho_1\rho_2\rho_p,$$

其中

$$\rho_1 = \exp\left[\frac{ae}{H}(1-\cos u)\right], \tag{4a}$$

$$\rho_2 = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{s_1=0}^{n}\sum_{s_2=s_1}(-1)^{n+s_1}\frac{\kappa^n}{n!}2^{1-\delta_2-2n}\binom{n}{s_2}\binom{n}{s_{22}-s_1}s^{2n}\cdot$$
$$\cos[(4s_2-2n)g+2s_1 f]\bullet \tag{4b}$$

1.2 大气转动

用一个简单方法就可以证明大气转动的影响很小• 通常都假设大气旋转角速度 σ 与地球一样, 因此, 在 $\boldsymbol{r}$ 处的速度为 $\sigma\wedge\boldsymbol{r}$• 这个假设表明, 在离地球无限远处, 质点与地球的相互

作用方式同地球表面一样• 于是, 我们可以假设大气的旋转角速度为

$$\sigma_a = \sigma \frac{R}{r} \tag{5}$$

可见, 当 $r = R$ 时, $\sigma_a = \sigma$, 而当 $r \to \infty$ 时, $\sigma_a \to 0$•

设卫星在 r 处的瞬时速度为 $\boldsymbol{v}$, 则

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - R\frac{\sigma \wedge \boldsymbol{r}}{r} \tag{6}$$

设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是正交赤道地心坐标系中, 与球坐标 r, λ, δ 相关的基矢, 则

$$\sigma = \sigma \boldsymbol{k}, \quad \sigma \cong 6 \times 10^{-2}•$$

由于 $$x = \frac{r}{a} - 1,$$

所以

$$V = \frac{1}{a}\left[\frac{1-x}{1+x}\right]^{1/2}\left[1 - \sigma R p^{1/2}(1-x)^{-1}\right]• \tag{7}$$

用赤道坐标表示 V, 有

$$\boldsymbol{V} = \left(\frac{\mu}{p}\right)^{1/2}\left[-\sin f\, \boldsymbol{P} + (e + \cos f)\boldsymbol{Q}\right] - \frac{R\sigma}{r}(r_1 \boldsymbol{j} - r_2 \boldsymbol{i}), \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r} = r\left[\cos f\, \boldsymbol{P} + \sin f\, \boldsymbol{Q}\right]•$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是卫星在近地点和与它成 90° 角时, 在 f 增加方向上的单位矢量• 最后, 卫星每单位质量所受到的阻力可表示为

$$\boldsymbol{D} = -\frac{1}{2} c_D \rho_p \frac{A}{m} \rho_1 \rho_2 |\boldsymbol{V}| \boldsymbol{V}• \tag{9}$$

2 运动方程

在地心引力和大气阻力的作用下, 卫星运动方程可表示为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla_r U + \boldsymbol{D}$$

其中 U 是地球的势能, $\boldsymbol{D}$ 是由于大气阻力引起的力矢量• 由此有

$$\frac{\mathrm{d}^2 X_j}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U}{\partial X_j} + X_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{10}$$

其中 X 是沿赤道方向的阻力, 如果我们引入哈密顿函数

$$\mathscr{T} = T + U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} x_j^2 - U• \tag{11}$$

记

$$\eta_j = x_j, \quad \xi_j = \dot{x}_j•$$

则系统的正则方程可表示为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial \eta_j} + X_j, \\ \frac{\mathrm{d}\eta_j}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathscr{T}}{\partial \xi_j}• \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

下一步是将方程(12)用 Delaunay 变量 (l_j, L_j) 表示• 显然, 用正则变换 $(\eta_j, \xi_j) \to (l_j, L_j)$ 就可以作到这点• 为此, 我们引用 Brouwer 和 Hori 在 1961 年提出的定理•

定理

如果

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j} - X_j; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_j} + Y_j \tag{13}$$

是微分方程的正则系统, 其中 $X_j(q, p, t)$ 和 $Y_j(q, p, t)$ 为任意函数• 则正则映象 $q, p \to q', p'$ 下, X_j 和 Y_j 的映象为

$$\left.\begin{aligned} X_j' &= \sum_k \left\{ Y_k \frac{\partial q_k}{\partial p_j} + X_k \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\}, \\ Y_j' &= \sum_k \left\{ Y_k \frac{\partial q_k}{\partial q_j} + X_k \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right\} \bullet \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial l_i} + P_i; \quad \frac{\mathrm{d}l_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial L_i} - Q_i \bullet \tag{15}$$

其中 $\mathscr{H}$是由式(11) 定义的哈密顿函数, 根据式(12) 和(14) 有

$$P_j = \sum_k X_k \frac{\partial x_k}{\partial l_j}; \quad Q_j = \sum_k X_k \frac{\partial x_k}{\partial L_j} \bullet \tag{16}$$

由方程(9) 可得

$$\left.\begin{aligned} P_j &= -\frac{1}{2} c_D \rho_p \frac{A}{m} \rho_1 \rho_2 | \boldsymbol{V} | p_j, \\ Q_j &= -\frac{1}{2} c_D \rho_p \frac{A}{m} \rho_1 \rho_2 | \boldsymbol{V} | q_j \bullet \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

现在, 需要用 Delaunay 变量来表示阻力 $\boldsymbol{D} = \beta \rho_1 \rho_2 | \boldsymbol{V} | \boldsymbol{V}$, 其中 $\beta = -\frac{c_D}{2} \frac{A}{m} \rho_p$ 可以考虑到二阶•

3 无阻力问题

3.1 哈密顿函数

利用 Delaunay 变量, 可将哈密顿函数表示为:

$$\mathscr{H} = \sum_{i=0}^{2} \frac{J_2^n}{n!} \mathscr{H}_i, \tag{18}$$

及 $\quad \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_{2,3} + \mathscr{H}_{2,4},$

其中 $\quad \mathscr{H}_0 = -\frac{\mu^2}{2L_1^2},$

$$\mathscr{H}_1 = \frac{B_2}{4L_1^6} \Phi^3 [(3s^2 - 2) - 3s^2 \cos 2(f + l_2)],$$

$$\mathscr{H}_{2,3} = \frac{B_3}{8L_1^8} \Phi^4 [(15s^3 - 12s) \sin(f + l_2) - 5s^3 \sin 3(f + l_2)],$$

$$\mathscr{H}_{2,4} = \frac{B_4}{64L_1^{10}} \Phi^5 [(24 - 120s^2 + 105s^4) + (120s^2 - 140s^4) \cos 2(f + l_2) + 35s^4 \cos 4(f + l_2)],$$

此处,

$$B_2 = \mu^4 R_0^2; \quad B_3 = \frac{2\mu^5 R_0^3 J_3}{J_2^2};$$

$$B_4 = \frac{2\mu^6 R_0^4 J_4}{J_2^2}, \quad \Phi = \frac{a}{r} \bullet$$

于是

$$\dot{l}_i = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial L_i}; \quad \dot{L}_i = -\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial l_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \cdot \tag{19}$$

为了不含共振项，需要作两次正则变换，再依次消去短期项和长期项• 第一次正则变换是 $(l_j, L_j) \xrightarrow{w} (l_j', L_j')$ 第二次正则变换是 $(l_j', L_j') \xrightarrow{w^*} (l_j'', L_j'')$•

3.2 消除短期项

借助变换

$$\mathscr{F}(L_1, L_2, L_3, l_1, l_2, -) \xrightarrow{w} \mathscr{F}^*(L_1', L_2', L_3', -, l_2, -)$$

可消去哈密顿函数中的短期项，并导出如下恒等式

$$\mathscr{F}_0^* = \mathscr{F}_0, \tag{20a}$$

$$\mathscr{F}_n^* = \mathscr{F}_n + (\mathscr{F}_0; W_n), \tag{20b}$$

$$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n + \sum_{j=1}^{n-1}\left[\begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix}(\mathscr{F}_{n-j}; W_j) + \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix}(G_j \mathscr{F}^*_{n-j})\right] \cdot \tag{20c}$$

我们记 $\mathscr{F}_n^*$ 为 $\mathscr{F}_n$ 的平均值(相对于 l_1')，即

$$\mathscr{F}_n^* = \langle \mathscr{F} \rangle \cdot \tag{21}$$

则短期项由

$$P_n = \mathscr{F}_n - \mathscr{F}_n^* = (W_n; \mathscr{F}_0) \tag{22}$$

确定，因此

$$W_n = \left(\frac{\partial \mathscr{F}_0}{\partial L_1}\right)^{-1} \int P_n \, \mathrm{d} l_1, \tag{23}$$

结果是

$$\mathscr{F}_0^* = -\frac{\mu^2}{2L_1^2}, \tag{24}$$

$$\mathscr{F}_1^* = \frac{\eta^3}{4}\frac{B_2}{L_1^6}(3s'^2 - 2) \cdot \tag{25}$$

而生成源 W_1 变为

$$W_1 = \frac{B^2 \eta^3}{4\mu^2 L_1'^3}\left\{(3s'^2 - 2)(e\sin f' + f' + l_1') - \frac{3}{2}s'^2\left[\sin 2(f + l_2') + \frac{e'}{3}\sin(3f + 2l_2') + e'\sin(f' + 2l_2')\right]\right\}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_2^* = {} & \frac{15B_2^2}{64\mu^2 L_1^3 L_2^7}(1 - 5c^2 - 7c^4) - \frac{3B_2^2}{16\mu^2 L_1^4 L_2^6}(1 - 3c^2)^2 - \\ & \frac{3B_2^2}{64\mu^2 L_1^5 L_2^5}(5 - 18c^2 + 5c^4) + \frac{12B_4}{128 L_1^3 L_2^7}(3 - 30c^2 + 35c^4) + \\ & \frac{3}{32}\frac{B_2^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{L_1^5 L_2^5} - \frac{1}{L_1^3 L_2^7}\right)(1 - 16c^2 + 15c^4)\cos(2l_2) + \\ & \frac{15}{64}B_4\left(\frac{1}{L_1^3 L_2^7} - \frac{1}{L_1^5 L_2^5}\right)(-1 + 8c^2 - 7c^4)\cos(2l_2) + \\ & \frac{3B_3 e}{8L_1^3 L_2^5}(5s^3 - 4s)\sin(l_2) \cdot\end{aligned} \tag{27}$$

短周期变换元为

$$l_i = l_i' + J_2 \frac{\partial W_1}{\partial L_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{28a}$$

$$L_i = L_i' - \frac{\partial W_1}{\partial l_i'}, \tag{28b}$$

$$l_i' = l_i - J_2 \frac{\partial W_1}{\partial L_i}, \tag{28c}$$

$$L_i' = L_i + \frac{\partial W_1}{\partial l_i}. \tag{28d}$$

3.3 消除长期项

作变换

$$\mathscr{F}(L_1', L_2', L_3', -, l_2', -) \xrightarrow{w} \mathscr{F}^*(L_1'', L_2'', L_3'', -, -, -)$$

可将哈密顿函数简化为

$$\mathscr{F}_0^{**} = \mathscr{F}_0^* \mid_{L_1' = L_1''}, \tag{29a}$$

$$\mathscr{F}_1^{**} = \frac{1}{4}\frac{B_2}{L_1''^3 L_2''^3}(1 - 3c''^2), \tag{29b}$$

$$\mathscr{F}_2^{**} = \frac{15}{64}\frac{B_2^2(1 - 2c''^2 - 7c''^4)}{\mu^2 L_1''^2 L_2''^7} - \frac{3}{16}\frac{B_2^2(1 - 3c''^2)^2}{\mu^2 L_1''^4 L_2''^6} - \frac{3}{64}\frac{B_2^2(5 - 18c''^2 + 5c''^4)}{\mu^2 L_1''^5 L_2''^5} + \frac{3B_4}{128}(3 - 30c''^2 + 5c''^4)\left(\frac{5}{L_1''^3 L_2''^7} - \frac{3}{L_1''^5 L_2''^5}\right) \tag{29c}$$

和

$$W_1^* = \frac{1}{32}\frac{B_2(1 - 16c''^2 + 15c''^4)}{\mu^2(1 - 5c''^2)}\left(\frac{1}{L_1''^2 L_2''} - \frac{1}{L_2''^3}\right)\sin(2l''_2) + \frac{3}{64}\frac{B_4}{B_2}\frac{(-1 + 8c''^2 - 7c'')^4}{(1 - 5c''^5)}\left(\frac{1}{L_2''^3} - \frac{1}{L_1''^2 L_2''}\right)\sin(2l_2'') - \frac{1}{4}\frac{B_3}{B_2}\frac{e''S''}{G''}\cos(l_2''). \tag{30}$$

变换元

下面公式给出了变换元

$$\left.\begin{aligned} l_j' &= l_j'' + J_2\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial L_j''} + \frac{\partial W_1}{\partial L_j''}\right), \\ L_j' &= L_j'' - J_2\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial l_i''} + \frac{\partial W_1}{\partial l_j''}\right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

由逆变换得

$$\left.\begin{aligned} l_j'' &= l_j + J_2\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial L_j} + \frac{\partial W_1}{\partial L_j}\right), \\ L_j'' &= L_j - J_2\left(\frac{\partial W_1^*}{\partial l_i} + \frac{\partial W_1}{\partial l_j}\right). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

其中的偏导数是已经得到的。

4 用 l_j'' 和 L_j'' 来表示的公式

现在，我们着手寻找包含阻力分量的关于 l_j'' 和 L_j'' 的运动方程，而后再以变量 p_j 和 q_j 用两撇变量的形式来表示新的变量 δp_j 和 δq_j。 要做到这点，我们参照 Brouwer 和 Hori(1961)[5] 的做

法, 引入算子 D 来简化代数运算• 我们将计算 δp_j 和 δq_j, 而后再按 e'' 和 l''_j 展开, 最后计算阻力分量 P'' 和 Q''•

L''_j 和 l''_j 表示的运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}L''_j}{\mathrm{d}t} = P''_j, \qquad \frac{\mathrm{d}l''_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}^{**}}{\partial L''_j} - Q''_j, \tag{33}$$

$$\mathscr{H}^{**} = \mathscr{H}^{**}(L''_1, L''_2, L''_3), \tag{34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} P''_j &= \sum_k P_k \frac{\partial l_k}{\partial l''_j} + \sum_k Q_k \frac{\partial L_k}{\partial l''_j}, \\ Q''_j &= \sum_k P_k \frac{\partial l_k}{\partial L''_j} + \sum_k Q_k \frac{\partial L_k}{\partial L''_j}• \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

而变量 L''_j, l''_j 和哈密顿函数 $\mathscr{H}^{**}$ 由无阻力理论得到•

假设 P''_j 和 q''^{j} 与 p_j 和 q_j 的关系用 P''_j 和 Q''_j 与 P_j 和 Q_j 的关系类比, 那么

$$\left.\begin{aligned} p''_j &= \sum_k p_k \frac{\partial l_k}{\partial l''_j} + \sum_k q_k \frac{\partial L_k}{\partial l''_j}, \\ q''_j &= \sum_k p_k \frac{\partial l_k}{\partial L''_j} + \sum_k q_k \frac{\partial L_k}{\partial L''_j}• \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

则 p''_j 和 q''_j 可表示为

$$p''_j = p_j + \delta p_j; \qquad q''_j = q_j + \delta q_j• \tag{37}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \delta p_j &= \sum_k p_k \frac{\partial (l_k - l''_k)}{\partial l''_j} + \sum_k q_k \frac{\partial L_k}{\partial l''_j}, \\ \delta q_j &= \sum_k p_k \frac{\partial l_k}{\partial L''_j} + \sum_k q_k \frac{\partial (L_k - L''_k)}{\partial L''_j} \end{aligned}\right\}, \tag{38}$$

为扁扰动, 可视为一阶小量• 考虑到阻力的影响也最多是一阶小量, 方程(38) 中的 p_j, q_j 就可以用前面得到的结果来表示, 只需用(L''_j, l''_j) 代替(L_j, l_j) 即可• 这样做是允许的, 因为我们只考虑到二阶•

δp_j 和 δq_j 的关系式:

如果用 L''_j, l''_j 来代替L_j, l_j, p_j 和 q_j 就可用 p''_j, q''_j 表示, 即

$$p''_k = \sum_i \xi''_i \frac{\partial \eta''_i}{\partial l''_k}, \qquad q''_k = \sum_i \xi''_i \frac{\partial \eta''_i}{\partial L''_k}• \tag{39}$$

无阻力理论中的生成源 W_1, W_1^*

令

$$\gamma''_j = \frac{\partial W_1}{\partial l''_j} + \frac{\partial W_1^*}{\partial l''_j}, \qquad \Gamma''_j = \frac{\partial W_1}{\partial L''_j} + \frac{\partial W_1^*}{\partial L''_j}• \tag{40}$$

则有

$$\delta p_j = \sum_i \xi''_i \frac{\partial \gamma''_j}{\partial \xi''_i}, \qquad \delta q_j = \sum_i \xi''_i \frac{\partial \Gamma''_j}{\partial \xi''_i}• \tag{41}$$

4.1 算子 D

我们引入算子

$$
\mathrm{D} = \sum_i \xi_i'' \frac{\partial}{\partial \xi_i''}, \tag{42}
$$

则 δp_j 和 δq_j 的表达式变为

$$
\delta p_j = \mathrm{D}\gamma_j''; \quad \delta q_j = \mathrm{D}\Gamma_j''. \tag{43}
$$

如果假设有限变换

$$
\left.\begin{aligned}
&(L'', l'') \xrightarrow{s_2(\xi'', l'')} (\xi'', \eta''), \\
&(L'', l'') \xrightarrow{s_4(L'', \xi'')} (\xi'', \eta'').
\end{aligned}\right\} \tag{44}
$$

则有

$$
L_j'' = \frac{\partial s_2}{\partial l_j''}, \quad \eta_k'' = \frac{\partial s_2}{\partial \xi_k''}, \tag{44$'$}
$$

$$
l_j'' = \frac{\partial s_4}{\partial L_j''}, \quad \eta_k'' = \frac{\partial s_4}{\partial \xi_k''}. \tag{44$''$}
$$

于是

$$
\frac{\partial L_j''}{\partial \xi_k''} = \frac{\partial^2 s_2}{\partial \xi_k'' \partial l_j''} = \frac{\partial \eta_k''}{\partial l_j''}, \tag{45a}
$$

$$
\frac{\partial l_j''}{\partial \xi_k''} = -\frac{\partial^2 W_4}{\partial \xi_k'' \partial L_j''} = -\frac{\partial \eta_k''}{\partial L_j''}. \tag{45b}
$$

且

$$
\mathrm{D}L_j'' = \sum_k \xi_k'' \frac{\partial L_j''}{\partial \xi_k''} = \sum_k \xi_k'' \frac{\partial \eta_k''}{\partial l_j''} = p_j \tag{46a}
$$

$$
\mathrm{D}l_j'' = \sum_k \xi_k'' \frac{\partial l_j''}{\partial \xi_k''} = -\sum_k \xi_k'' \frac{\partial \eta_k''}{\partial L_j''} = -q_j'' \tag{46b}
$$

方程(46a)和(46b)可用来计算方程(43)中的量,而且我们首次得到更一般的关系式,其推导非常简单.

注意到任意可微函数 $\Psi(l_j'', L_j'')$. 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\Psi &= \sum_k \xi_k'' \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_k''} = \sum_k \sum_i \xi_k'' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial l_j''} \frac{\partial l_j''}{\partial \xi_k''} + \frac{\partial \Psi}{\partial L_j''} \frac{\partial L_j''}{\partial \xi_k''} \right) = \\
&\sum_j \sum_k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial l_j''} \xi_k'' \frac{\partial l_j''}{\partial \xi_k''} + \frac{\partial \Psi}{\partial L_j''} \xi_k'' \frac{\partial L_j''}{\partial \xi_k''} \right),
\end{aligned} \tag{47}
$$

于是有

$$
\mathrm{D}\Psi = \sum_i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial l_j''} \mathrm{D}l_j'' + \frac{\partial \Psi}{\partial L_j''} \mathrm{D}L_j'' \right). \tag{48}
$$

显然,由方程(42)定义的算子与 Brouwer 和 Hori(1961)[5] 定义的算子类似,但是由于我们利用的是 Lie_Deprit 变换而不是 Von Zeipel 方法,结果符号刚好相反.

4.2 δp_j 和 δq_j 的计算

由方程(40)和(43)有

$$
\delta p_j = \mathrm{D}\left(\frac{\partial W_1}{\partial l_j''} + \frac{\partial W_1^*}{\partial l_j''} \right); \quad \delta q_j = \mathrm{D}\left(\frac{\partial W_1}{\partial L_j''} + \frac{\partial W_1^*}{\partial L_j''} \right) \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{49}
$$

通过冗长的代数,则有:

$$
\delta p_1 = \frac{B_2}{4\mu^2} \sum_{i=0}^{4} (\xi_{i0} \cos F_{i0} + \xi_{i2} \cos F_{i2}), \tag{50}
$$

$$\delta p_2 = \frac{B_2}{4\mu^2}\left\{\sum_{j=0}^{2}\eta^c_{j0}\cos F_{j0} + \sum_{j=-2}^{5}\eta^c_{j2}\cos F_{j2} + \eta^c_{24}\cos F_{24}\right\} + \frac{5B_4}{32B_2}\left\{\mu^c_{20}\cos F_{20} + \sum_{j=-2}^{2}\mu^c_{j2}\cos F_{j2} + \mu^c_{24}\cos F_{24}\right\} - \frac{B_3}{4B_2}\left\{\sum_{j=-2}^{2}\eta^s_{j1}\sin F_{j1} + \eta^s_{23}\sin F_{23}\right\}\cdot \tag{51}$$

和

$$\delta p_3 = 0, \tag{52}$$

其中 $F_{ji} = jf + il_2$

其中系数是有理变量 (L_i) 的函数, 同样还有

$$\delta p_1 = \frac{B_2}{4\mu^2}\left\{\sum_{j=1}^{3}\psi_{j0}\sin F_{j0} + \sum_{j=-2}^{5}\psi_{j2}\sin F_{j2} + \sum_{j=2}^{5}\psi_{j4}\sin F_{j4}\right\} + \frac{5B_4}{64B_2}\left\{\psi_{20}\sin F_{20} + \sum_{j=-2}^{2}\psi_{j2}\sin F_{j2} + \psi_{24}\sin F_{24}\right\} - \frac{B_3}{4B_2}\left\{\sum_{j=-2}^{2}\psi^c_{j1}\cos F_{j1} + \psi^c_{23}\cos F_{23}\right\}, \tag{53}$$

$$\delta q_2 = -\frac{B_2}{4\mu^2}\left\{\sum_{j=1}^{3}\chi^s_{0}\sin iF + \sum_{j=-2}^{5}\chi^s_{1j2}\sin F_{j2} + \sum_{j=2}^{5}\chi^s_{1j4}\sin F_{j4} + \sum_{j=0}^{1}\chi^c_{12j}\cos F_{2j,2j}\right\} + \frac{5B_4}{64B_2}\left\{\chi^s_{202}\sin F_{02} + \chi^s_{220}\sin F_{20} + \chi^s_{224}\sin F_{24}\right\} + \frac{B_3}{4B_2}\left\{\sum_{j=-2}^{2}\chi^c_{3j1}\cos F_{j1} + \chi^c_{323}\cos F_{23}\right\}\cdot \tag{54}$$

和

$$\delta q_3 = \frac{B_2}{2\mu^2}\left\{\sum_{i=1}^{2}\kappa_{1i0}\sin if + \sum_{j=-2}^{5}\kappa^s_{1i2}\sin F_{i2} + \sum_{i=2}^{5}\kappa^s_{1i2}\sin F_{i4} + \sum_{i=0}^{2}\kappa^c_{12i}\cos F_{2i,2i}\right\} + \frac{5B_4}{32B_2}\left\{\kappa^s_{220}\sin F_{20} + \sum_{i=-2}^{4}\kappa^s_{2i2}\sin F_{i2} + \kappa^s_{224}\sin F_{24}\right\} + \frac{B_3}{4B_2}\left\{\sum_{i=-2}^{2}\kappa^c_{3i2}\cos F_{i1} + \kappa^c_{323}\cos F_{23}\right\}\cdot \tag{55}$$

同样, 这里的系数也是有理变量的函数•

4.3 ρ的计算

对于方程(4), 可写为:

$$\rho_1 = (1 - e\cos E)\exp(c') = \exp(c')\left[1 - c'\cos E + \frac{c'^2}{2!}\cos^2 E - \frac{c'^3}{3!}\cos^3 E + \frac{c'^4}{4!}\cos^4 E - \frac{c'^5}{5!}\cos^5 E\right], \tag{56a}$$

$$\rho_2 = \sum_{n=0}^{10}\sum_{m=3}^{5}\kappa_{nm}\cos(nf + 2ml_2)\cdot \tag{56b}$$

利用 1 类 Tschbyscheff 多项式(Bell, 1968)[10]的表达式, 可得 ρ_2 的表达式:

$$\rho_2 = \sum_{n=-3}^{15}\left\{\cos(2ml_2)\sum_{s=0}^{10}\Phi^s F^{(1)}_{s,m} - \sin(2ml_2)\sum_{s=0}^{9}\Phi^s F^{(2)}_{s,m}\sin f\right\}\cdot \tag{57}$$

此处:

$$F_{s,m}^{(1)} = \sum_{n=s}^{10} F'_{n,s} \chi_{n,m},$$

$$F_{s,m}^{(2)} = \sum_{r=s+1}^{10} \sum_{j=0}^{\left[\frac{(r-s-1)}{2}\right]} \chi_{r,m} \vartheta_j^{(r)} e^{-r-2j-1} (1)^{r-2j+1s} \begin{pmatrix} r-2j1 \\ s \end{pmatrix} \eta^{2s},$$

$$\vartheta = (-1)^j \begin{pmatrix} n-j-1 \\ j \end{pmatrix} 2^{n-2j-1}\bullet$$

4.4 V 的计算

我们有:

$$V = \frac{(1-x)^{1/2}}{L_1}[\mu^{1/2}(1-x) - \sigma c L_2]\bullet$$

上式可展开为:

$$V = \sum_{i=0}^{4} v_i x^i + O(e^5), \tag{58}$$

此处:

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{L_1}(\mu^{1/2} - \sigma c L_2); \quad v_1 = -\frac{1}{L_1}\mu^{1/2}, \\ v_2 &= \frac{1}{2}v_0; \quad v_3 = \frac{1}{2}v_1, \\ v_4 &= \frac{3}{8}v_0; \quad v_5 = \frac{3}{8}v_1, \\ v_6 &= \frac{5}{16}v_0; \quad x = -e\cos E\bullet \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

或者将它展开成

$$V = \sum_{i=0} (-1)^i v_i e^i \cos^i E\bullet \tag{60}$$

4.5 ρ_{p_j} 和 ρ_{vq_j} 的计算

考虑下列两个方程

$$\left.\begin{aligned} \cos 2f &= \frac{2}{e^2}[1 - 2\eta^2\Phi + \eta^4\Phi^2] - 1, \\ \sin 2f &= \frac{2}{e}[-1 + \eta^2\Phi]\sin f\bullet \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

p_j 和 $q_j (j = 1, 2, 3)$ 的表达式可写成:

$$p_j = \sum_{m=0}^{1} \sum_{n=-1}^{1} \Phi^n (P_{j,1}^{m,n} \cos(2ml_2) + P_{j,2}^{m,n} \sin(2ml_2)\sin f), \tag{62a}$$

$$q_j = \sum_{n=-1}^{1} \sum_{m=0}^{1} \Phi^n q_{j,1}^{m,n} \sin f \cos(2ml_2) + q_{j,2}^{m,n} \sin(2ml_2) + q_{j,0}], \tag{62b}$$

这里的系数是有理元素的函数•

利用方程式(62), (63) 和(64), 且稍微简化则有:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}vp_j = &\sum_{m=-4}^{6}\sum_{n=-5}^{13}\Phi'\Big\{F_{1,nm}^{p_j}\cos(2ml_2) + F_{2,mn}^{p_j}\sin(2ml_2) + \\
&F_{3,nm}^{p_j}\sin(2ml_2)\sin f\Big\}, \\
\mathrm{P}vq_j = &\sum_{m=-4}^{6}\sum_{n=-5}^{13}\Phi'\Big\{F_{4,nm}^{q_j}\cos(2ml_2)\sin f + F_{2,nm}^{q_j}\sin(2ml_2) + \\
&F_{1,nm}^{q_j}\sin(2ml_2) + F_{3,nm}^{q_j}\cos(2ml_2)\sin f\Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

其中

$$F_{1,n,m}^{p_j} = \frac{1}{2}\sum_{m'=0}^{1}\sum_{n'=-1}^{1}\Big\{(F^{(4)}_{n-n',m-m'} + F^{(4)}_{n-n',m+m'})P_{j,1}^{m',n'} - \sum_{i=0}^{2}(F^{(5)}_{n-n'-i,m+m'} + F^{(5)}_{n-n'-i,m-m'})P_{j,2}^{m',n'}R_{0,i}\Big\},$$

$$F_{2,n,m}^{p_j} = \frac{1}{2}\sum_{m'=0}^{1}\sum_{n'=-1}^{1}\Big\{(-F^{(4)}_{n-n',m+m'} + F^{(4)}_{n-n',m-m'})P_{j,2}^{m',n'}\Big\},$$

$$F_{3,n,m}^{p_j} = -\frac{1}{2}\sum_{m'=0}^{1}\sum_{n'=-1}^{1}\Big\{(F^{(5)}_{n-n',m+m'} + F^{(5)}_{n-n',m-m'})P_{j,1}^{m',n'}\Big\},$$

$$R_{0,0} = 1 - \frac{1}{e^2},\quad R_{0,1} = \frac{2\eta^2}{e},\quad R_{0,2} = -\frac{\eta^4}{e^2},$$

$$F_{1,n,m}^{q_j} = \frac{1}{2}\sum_{m'=0}^{1}\sum_{n'=-1}^{1}\Big\{(F^{(4)}_{n-n',m-m'} + F^{(4)}_{n-n',m+m'})q_{j,1}^{m',n'} + (-F^{(5)}_{n-n',m+m'} + F^{(5)}_{n-n',m-m'})q_{j,2}^{m',n'}\Big\},$$

$$F_{2,n,m}^{q_j} = \frac{1}{2}\sum_{m'=0}^{1}\sum_{n'=-1}^{1}\Big\{(-F^{(4)}_{n-n',m-m'} + F^{(4)}_{n-n',m+m'})q_{j,2}^{m',n'} + \sum_{i=0}^{2}(-F^{(5)}_{n-n'-i,m+m'} + F^{(5)}_{n-n'-i,m-m'})q_{j,1}^{m',n'}R_{0,i}\Big\},$$

$$F_{1,n,m}^{q_j} = q_{j,0}F^{(4)}_{n,m};\quad F_{3,n,m}^{q_j} = -q_{j,0}F^{(5)}_{n,m}.$$

4.5.1 $\mathrm{P}vp_j$ 和 $\mathrm{P}vq_j$ 用两撇变量形式的表达式

为了用两撇变量来表示 $\mathrm{P}vp_j$ 和 $\mathrm{P}vq_j$，我们令 Ψ 是它们的任意函数，于是有

$$\Psi = \Psi'' + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial L_1}\right)''\delta L_1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial l_1}\right)''\delta l_1 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial L_2}\right)''\delta L_2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\right)''\delta l_2. \tag{64}$$

从方程(63)很容易导出 $\mathrm{P}vp_j$ 和 $\mathrm{P}vq_j$ 的导数. 对于增量 δl_1, δl_1, δl_2, δL_2 有

$$\delta l = l_1 - l_1'' = \frac{\partial W_1}{\partial L_1'} - \frac{\partial W_1^*}{\partial L_1''},\qquad \delta L_1 = L_1 - L_1'' = -\frac{\partial W_1}{\partial l_1},$$

$$\delta l_2 = l_2 + l_2'' = \frac{\partial W_1}{\partial L_2'} + \frac{\partial W_1^*}{\partial L_2'},\qquad \delta L_2 = -L_1 - L_2'' = -\frac{\partial W_1}{\partial l_2} - \frac{\partial W^*}{\partial l_2''}.$$

代数化简后就可得到最后结果，因为太长就不再列出. 所有系数都是有理元素的函数.

4.5.2 $\mathrm{P}v\delta p_j$ 和 $\mathrm{P}v\delta q_j$ 的计算

利用 p 和 v 的表达式，和已经用两撇变量直接表示的方程(49)～(55)，就可以直接导出这两个量. 因结果太冗长，这里也不再列出.

[参 考 文 献]

[1] Kampos B. Nasa CR_1008_Guidnace, Flight Mech, and Trajectory Optimization[M]. Vol. IX, Washington, 1968.

[2] Sehnal L. Satellite Dynamics[M]. Giocagolia Ed. New York: Univ of Texas Press, 1975.
[3] King_Hele D G. Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Applications[M]. Glasgow: Blackic and Sons, 1987.
[4] Milani, N, Nobili A, Frainella P. Non Gravitational Perturbations[M]. Bristol: Adam Hilger (IOP), 1987.
[5] Brouwer D, Hori G. Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite[J]. The Astronomical Journal, 1961, **66**(5): 193—225.
[6] Hoots F R. Theory of the motion of an artificial earth satellite[J]. Celestial Mechanics, 1981, **23**(4): 307—336.
[7] Dehlase F. Analytical treatment of air drag and earth oblateness effect upon an artificial satellite[J]. Celestial Mechanics, 1991, **52**(1): 85—103.
[8] Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter[J]. Celestial Mechanics, 1969, **1**(1): 12—30.
[9] Kamel A A. Expansion formulae in canonical transformation depending on a small parameter[J]. Celestial Mechanics, 1969, **1**(2): 190—199.
[10] Bell W W. Special Functions for Scientists and Engineers[M]. London: Van Nostrand, 1968.

The Drag Exerted by an Oblate Rotating Atmosphere on an Artificial Satellite

KH. I. Khalil
(National Research Institute of Astronomy and Geophysics_Helwan, Cairo, Egypt)

Abstract: A theory is formulated for the motion of an artificial satellite under the joint effects of Eearth oblateness and atmospheric drag. The Hamilton's equations of motion are derived including the zonal harmonics of the geopotential up to J_4 and the drag accelerations. The atmospheric model is an oblate rotating model in which the atmospheric rotation lags behind that of the earth as the increasing distance from the Earth. The drag free problem is first solved via two canonical transformations to eliminate in succession the short and long period terms. An operator D is then defined and used to formulate the drag acceleration in terms of the double primed variables expressing the solution of the drag_free problem.

Key words: oblateness; the Hamiltonian; Lie transform