应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 09_0915_06

自治 Birkhoff 系统的广义正则变换和辛算法研究

张兴武， 武际可， 朱海平， 黄克服

(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: 研究了自治 Birkhoff 系统的广义正则变换, 将 Hamilton 系统的辛算法推广到 Birkhoff 系统, 通过引入凯莱变换和生成函数法构造 Birkhoff 方程的 Birkhoff 的辛差分格式, 同时讨论了 Birkhoff 差分格式的辛算法

关 键 词: Birkhoff 系统; 辛算法; 正则变换
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

1978 年, Santilli[1] 定义并研究了 Birkhoff 方程的插值问题, 随后 Sarlet(1978) 和 Cantrijn (1979) 研究了自治系统的问题, 他们还定义了 Hamilton_Jacobi 方程的 Birkhoff 推广 Kobussen (1978 和 1979) 对 Brikhoff 方程的变换理论进行了研究

Birkhoff 方程在航空力学方面的应用是由 Broucke(1979) 完成的, 同时 Lumsden 和 Trainor (1979) 将它运用到生物物理学领域, 在 1978 年, Santilli 建议, 在相似理论的基础上研究量子力学的 Heisenberg 方程并将其 Birkhoff 化

Santilli 同时尝试对局部非保守力作用下的 Birkhoff 方程作了研究 在这种方式下, 由 Hamilton 方法所得结果将不再适宜, 但局部条件仍成立

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的推广 微分方法是解决非线性动力方程的有效方法 由于 Birkhoff 方程比 Hamilton 方程复杂, 所以其计算方法的研究比较困难 在过去, Birkhoff 方程的计算方法的研究几乎没有任何结论可言, 由于, 我们所了解的微分方法不能广泛的运用于 Birkhoff 方程 对此我们研究了自治 Birkhoff 系统的广义正则变换, 并且运用辛几何和李代数等数学工具, 将冯康[2] 等提出的 Hamilton 系统的辛算法推广到自治 Birkhoff 系统, 通过引入凯莱变换和生成函数法构造 Birkhoff 方程的 Birkhoff 的辛差分格式

1 Birkhoff 动力系统的微分框架[1]、[3]

设 M^{2n} 为一 $2n$_维流形, 且 Birkhoff 函数组 $\boldsymbol{R} = \left\{R_1, \quad, R_{2n}\right\}$ M^{2n} 是 C^r 函数, 在 M^{2n} 上

收稿日期: 2001_03_13; 修订日期: 2002_05_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990510); 教育部骨干教师基金资助项目
作者简介: 张兴武(1974) , 男, 山西忻州人, 博士. (E_mail: outcast2002@ sina. com)

定义一辛结构　，在图$(U,\{a\})$ 上可表为:

$$= \frac{1}{2}\quad \mathrm{d}a\quad \mathrm{d}a,\qquad = \left(\frac{R}{a} - \frac{R}{a}\right) \tag{1}$$

显然，　是 1_形式　$= R\ \mathrm{d}a$　的外微分，也即　$= \mathrm{d}$

辛流形　定义了从切丛TM 到余切丛$T^* M$ 的微分同胚(Diffeomorphism):

$$: TM \quad T^* M; x \qquad (x) = i_x \tag{2}$$

与 Hamilton 系统相类似，我们可证明在辛图 $(U,\{a\})$ 下

$$\left(f \quad \frac{}{a}\right) = \frac{1}{2}\quad (f\ \mathrm{d}a - f\ \mathrm{d}a) = \quad f\ \mathrm{d}a,$$

$$^{-1}(g\ \mathrm{d}a) = \quad g\ \frac{}{a}, \tag{3}$$

此处　$= (\qquad ^{-1})$

设 $B \quad C^r(M^{2n})$，在 M^{2n} 定义向量场

$$\boldsymbol{X}_B = - \quad ^{-1}\mathrm{d}B, \tag{4}$$

$\boldsymbol{X}_B$ 称为 Birkhoff 函数向量场，$(M^{2n},\quad ,X_B)$ 称为关于 Birkhoff 函数组 $\boldsymbol{R}$ 的自治 Birkhoff 动力系统　B 称为 Birkhoff 函数　自此，我们建立了 Birkhoff 动力系统的微分几何框架　由(3) 在辛图(Symplectic chart) $(U,\{a\})$ 下的 $\boldsymbol{X}_B$ 的表示:

$$\boldsymbol{X}_B = - \quad ^{-1}\mathrm{d}B = - \quad ^{-1}\left(\frac{B}{a}\mathrm{d}a\right) =$$

$$- \frac{B}{a}(\quad ^{-1}\mathrm{d}a) = - \frac{B}{a}\quad \frac{}{a} \tag{5}$$

因而，向量场 $\boldsymbol{X}_B$ 的积分曲线　$(t)[a, b]\quad M^{2n}; t\quad a(t)$ 是以下微分方程的解:

$$a = \qquad \frac{B}{a}, \tag{6}$$

方程(6) 称为自治 Birkhoff 方程　文献[1]、[4]、[5] 都分别对自治 Birkhoff 系统的广义正则变换进行了研究

2　自治 Birkhoff 系统差分格式的定义和建立[3]

考虑自治 Birkhoff 动力系统 $(M^{2n},\quad ,X_B)$，在辛图$(U,\{a\})$ 下，Birkhoff 方程[1]、[5] 为

$$a = \qquad \frac{B}{a}, \tag{7}$$

现用微分方法分析讨论解动力学方程　Birkhoff 方程的动力学变换为广义正则变换，通常微分格式不能保持 Birkhoff 方程动力解(与不能保持 Hamilton 方程的解类似)　所以解 Birkhoff 方程应用 Birkhoff 格式[4]

定义　　设 $\boldsymbol{a}^k \quad \boldsymbol{a}^{k+1}$ 为一微分格式(正则变换)，$\boldsymbol{J} = (\quad \boldsymbol{a}^{k+1} / \quad \boldsymbol{a}^k)$ 为变换的 Jacobi 矩阵(为辛阵)，　$= (\qquad)$　如果 $\boldsymbol{J} = (\quad \boldsymbol{a}^{k+1} / \quad \boldsymbol{a}^k)$ 满足 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \quad |_{a = a^{k+1}} \boldsymbol{J} = \quad |_{a = a^k}$，则该格式称为关于 Birkhoff 函数 $\boldsymbol{R}$ 的辛格式，或 Birkhoff 格式

Birkhoff 格式是 Hamilton 系统差分格式的推广，对于 Hamilton 系统方程的辛格式可能不是 Birkhoff 方程的辛格式　例如，易证 Euler 中心格式对于 Hamilton 方程是辛的，但对于很少的 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 是辛的　由以上看出 Birkhoff 格式定义只与 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 本身有关，相同的 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 的不同 Birkhoff 方程，有相同的 Birkhoff 格式，实践表明，由

于Birkhoff 张量的非常数性, 以及在非自治情形时, 方程的几何和代数特性有所减弱, 因而, Birkhoff 格式的建立比 Hamilton 系统方程的辛格式的建立更难

命题 1 若 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 的每一函数 R 为线性的, 则 Euler 中心格式为 Birkhoff 方程关于 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 的辛格式

证明 由于 R 为线性函数, 且 为常数, 方程 (7) 的 Euler 中心格式为

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}^{n} + \quad ^{-1}\boldsymbol{P}\left(\frac{\boldsymbol{a}^{n+1}+\boldsymbol{a}^{n}}{2}\right), \quad \boldsymbol{P} = \left(\frac{B}{a^{1}}, \quad , \frac{B}{a^{2n}}\right)^{\mathrm{T}}, \quad ^{-1} = (\quad), \tag{8}$$

则可得

$$\frac{\boldsymbol{a}^{n+1}}{\boldsymbol{a}^{n}} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{}{2}\ ^{-1}D\boldsymbol{P}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{}{2}\ D\boldsymbol{P}\right),$$

此处 $D\boldsymbol{P}$ 为辛阵 易得:

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{}{2}\ ^{-1}D\boldsymbol{P}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{}{2}D\boldsymbol{P}\ ^{-1}\right) = \left(\boldsymbol{I} + \frac{}{2}\ ^{-1}D\boldsymbol{P}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{}{2}D\boldsymbol{P}\ ^{-1}\right),$$

则

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}^{n+1}}{\boldsymbol{a}^{n}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\boldsymbol{a}^{n+1}}{\boldsymbol{a}^{n}}\right) =$$

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{}{2}D\boldsymbol{P}\ ^{-1}\right)\left(\boldsymbol{I} + \frac{}{2}D\boldsymbol{P}\ ^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I} - \frac{}{2}\ ^{-1}D\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{I} + \frac{}{2}\ ^{-1}D\boldsymbol{P}\right) = \quad ,$$

因此 Euler 中心格式为 Birkhoff 方程关于 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 的辛格式

从命题的证明可知, 如果 Birkhoff 方程函数组 $\boldsymbol{R}$ 线性的, 对于关于 $\boldsymbol{R}$ 的 Birkhoff 方程的 Euler 中心格式, 只有中心 Euler 格式的Birkhoff 格式 同时由 Darboux 定理[6], 在局部坐标 $\boldsymbol{a} = (a^{1}, \quad , a^{2n})^{T} \quad M^{2n}$, 定义解析且正则的辛结构

$$= \frac{1}{2}\quad \mathrm{d}a \quad \mathrm{d}a, \tag{9}$$

则总存在保正则且保光滑的局部变换

$$\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}),$$

在该变换下的辛结构 变为

$$= \frac{1}{2}\quad \mathrm{d}a \quad \mathrm{d}a, \quad (\quad) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

以上表明存在一变换使得 Birkhoff 方程(7) 化为 Hamilton 方程[4]

$$a = \frac{B}{a}, \quad B = B(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a})), \quad B = H, \tag{11}$$

若函数组为 $\boldsymbol{R} = \{R_1, \quad , R_n, 0, \quad , 0\}$ (或 $\boldsymbol{R} = \{0, \quad , 0, R_1, \quad , R_n\}$)

3 线性 Birkhoff 系统的辛 Eular 差分格式构造[2]、[3]

对于方程(7) 称为线性的, 如果 Birkhoff 函数是 $\boldsymbol{a}$ 的二次形

$$B(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P},$$

则方程(7) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \quad \boldsymbol{a}, \quad = \quad \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}, \tag{12}$$

其中 B 为 Birkhoff 函数, 为无穷小辛阵, 即 $Sp(2n)$[1]

方程(7) 的解

$$\boldsymbol{a}(t) = g^{t}\boldsymbol{a}(0), \quad g^{t} = \exp(t\ \ ),$$

即相流是无穷小辛阵指数变换,不难验证它是辛阵 对方程(7)最简单的辛格式[1]

$$\boldsymbol{a}^{n+1} - \boldsymbol{a}^{n} = \left(\frac{\boldsymbol{a}^{n+1} + \boldsymbol{a}^{n}}{2}\right), \tag{13}$$

$\boldsymbol{a}^{n}$ 到 $\boldsymbol{a}^{n+1}$ 变换可以由下式得到

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = F\,\boldsymbol{a}^{n}, \quad F = \left(- \frac{}{2}\right), \quad (\ ) = \frac{1-}{1+},$$

其中 F 为推广凯莱变换[2],易证凯莱变换为保辛的[2]

可写出二阶精度格式:

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}^{n} + \frac{T}{2}(\boldsymbol{a}^{n} + \boldsymbol{a}^{n+1}), \tag{14}$$

可写出四阶精度格式:

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}^{n} + \frac{}{2}(\boldsymbol{a}^{n} + \boldsymbol{a}^{n+1}) + \frac{{}^{2}\ {}^{2}}{12}(\boldsymbol{a}^{n} - \boldsymbol{a}^{n+1}) \tag{15}$$

其中(15)取推广凯莱变换[2] $F^{(2,2)} = {}^{(2,2)}(\ ),\ {}^{(2,2)}(\ ) = \dfrac{1+ \ /2 + \ {}^{2}/12}{1- \ /2 + \ {}^{2}/12}$

算例 1

对于 Van der Pol 方程

$$x + x - (1 - x^{2})x = 0 \quad (\ \text{为小参数}) \tag{16}$$

令 $B = \dfrac{1}{2}[(a^{1})^{2} + (a^{2})^{2}]$ 由 Santilli 第一方法[4] 得

$$\boldsymbol{R} = \left\{a^{2} + \frac{(a^{2})^{2}}{2a^{1}}[1 - (a^{1})^{2}],\ 0\right\},$$

$${}_{11} = {}_{22} = 0, \quad {}_{12} = - {}_{21} = 1 + \frac{a^{2}}{a^{1}}[1 - (a^{1})^{2} - a^{1}a^{2}],$$

所以 $\quad {}^{11} = {}^{22} = 0, \quad {}^{12} = - {}^{21} = \dfrac{a^{l}}{a^{1} + a^{2}[1 - (a^{1})^{2} - a^{1}a^{2}]}$

由(3)、(7)可得 $\quad {}^{12} = - {}^{21} = \dfrac{a^{1}}{a^{1} + a^{2}[1 - (a^{1})^{2} - a^{1}a^{2}]}$

将 代入(9)式即得四阶辛差分格式:

$$\begin{pmatrix} a^{1} \\ a^{2} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{1} \\ a^{2} \end{pmatrix}^{n} + \frac{}{2(1+\ )}\begin{pmatrix} a^{2} \\ -a^{1} \end{pmatrix}^{n} + \frac{{}^{2}}{12(1+\ )^{2}}\begin{pmatrix} a^{1} \\ a^{2} \end{pmatrix}^{n+1}$$

算例 2

对 Duffing 方程

$$y + y + y^{2} = 0 \quad (\ \text{为小参数}), \tag{17}$$

设 $B = \dfrac{1}{2}[(a^{1})^{2} + (a^{2})^{2}]$ 由 Santilli 第一方法[1] 得

$$\boldsymbol{R} = \left\{a^{2} + \frac{a^{2}}{(a^{1})^{2}},\ 0\right\},$$

$${}_{11} = {}_{22} = 0, \quad {}_{12} = - {}_{21} = 1 + \frac{}{(a^{1})^{2}} \quad \text{所以}$$

$${}^{11} = {}^{22} = 0, \quad {}^{12} = - {}^{21} = \frac{(a^{1})^{2}}{(a^{1})^{2} +}$$

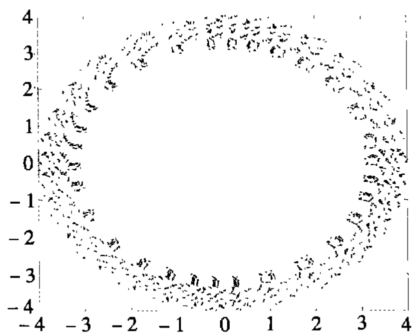

图 1

由(12)可得 $^{12} = - \quad ^{21} = \frac{(a^1)^2}{(a^2)^2 +} =$ 由于 $P = I$ 将 代入(14)式得

二阶辛_Euler 差分格式:

$$\begin{cases}(a^1)^{n+1} = (a^1)^n + \frac{}{2}((a^2)^n + (a^2)^{n+1}),\\ (a^2)^{n+1} = (a^2)^n - \frac{}{2}((a^1)^n + (a^1)^{n+1})\end{cases} \tag{18}$$

将 代入(15)式得

四阶辛_Euler 差分格式:

$$\begin{cases}(a^1)^{n+1} = (a^1)^n + \frac{}{2}((a^2)^n + (a^2)^{n+1}) - \frac{{}^2\;{}^2}{12}((a^1)^n - (a^1)^{n+1}),\\ (a^2)^{n+1} = (a^2)^n - \frac{}{2}((a^1)^n + (a^1)^{n+1}) - \frac{{}^2\;{}^2}{12}((a^2)^n - (a^2)^{n+1})\end{cases} \tag{19}$$

4 结 论

Birkhoff 方程(1)通过一系列的辛坐标变换和动量变换, 在每一步变换下都保持相应的 Birkhoff 方程成立 Runge_Kutta 方法不是一个辛格式(如图 1), 它是一个耗散格式, 从算例 2 可以看出通过运用二阶辛_Euler 格式和四阶辛_Euler 格式(如图 2, 图 3)用稳定步长计算到 10^8 步时保持了较好的收敛性

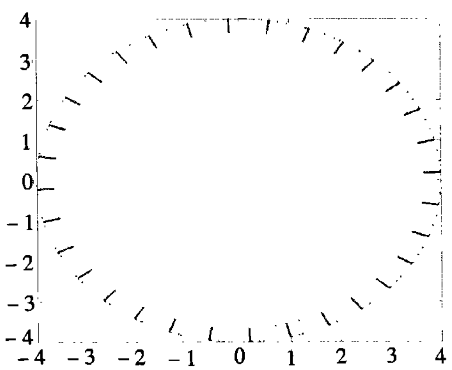

图 2

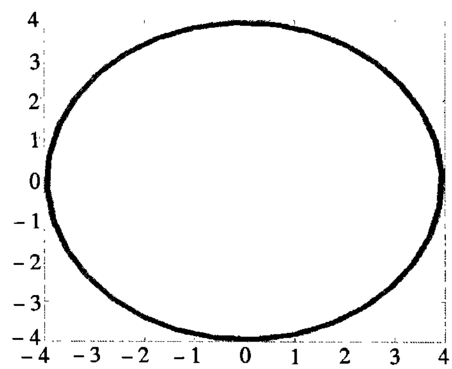

图 3

[参 考 文 献]

[1] Santilli R M. Foundation of Theoretical Mechanics [M]. New York: Spinger_Verlag, 1978.

[2] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: FENG Kang, SHI Zhong_ci Eds. Proc the International Conference Comp Diff Egns Dyna Sys 1984[C]. Beijing: Science Press, 1985, 42.

[3] 秦孟兆. 辛几何及计算 Hamilton 力学[J]. 力学与实践, 1990, **12**(6): 1 20.

[4] ZHU Hai_ping, WU Ji_ke. Generalized canonical transformations and symplectic algorithm of the autonomous Birkhoffian systems[J]. Progress in Natural Science, 1999, **9**(11), 821 828.

[5] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996, 96 134.

[6] Arnold. Mathe_Methods of Classical Mechanics[M]. New York: Springer, 1978.

Generalized Canonical Transformation and Symplectic Algorithm of the Autonomous Birkhoffian Systems

ZHANG Xing_wu, WU Ji_ke, ZHU Hai_ping, HUANG Ke_fu
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The Birkhoff systems are the generalization of the Hamiltonian systems. Generalized canonical transformations are studied. The symplectic algorithm of the Hamiltonian systems is extended into that of the Birkhoffian systems. Symplectic differential scheme of autonomous Birkhoffian systems was structured and discussed by introducing the Kailey Transformation.

Key words: Birkhoffian system; sympletic algorithm; canonical transformation