

文章编号: 1000-0887(2002) 09-0951-10

# 输液管道流固耦合非线性动力稳定分析<sup>\*</sup>

张立翔<sup>1</sup>, 黄文虎<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学 工程力学系, 昆明 650051; 2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

(李继彬推荐)

**摘要:** 将弱约束输流管道非定常流液固耦合运动按波流振动系统建模成由 4 个非线性微分方程组成的分析模型, 按模态进行分解研究系统在多种耦合状态下具有的运动稳定特性。以悬臂梁管道为例分析了耦合系统奇点的属性, 得到了前四阶模态运动的相图。结果说明, 多种耦合条件下输流管道的稳定性变得更为复杂, 各阶模态运动具有不同的稳定特性。

**关键词:** 管道流; 流固耦合; 非线性振动; 分岔

**中图分类号:** VO353.1;U137 **文献标识码:** A

## 1 引言及预备知识

有压输流管道由于控制操作引起的流动状态突变会在管道中形成非定常流动, 严重时形成沿管道运动的所谓水击或水锤波, 并通过流固间的耦合作用诱发(弱约束)管道非线性振动, 这一问题不仅是有压非定常流研究的重要课题, 也是现代非线性动力学研究的重要内容。

约束条件和流动状态的不同, 输流管道具有不同的失稳分岔形式, 按大类可分为屈曲失稳和颤振失稳, 相应的分岔形式为叉形分岔、倍频分岔及 Hopf 分岔等。研究管道稳定特性一般以流速为参数, 随着流速的增加, 哥氏力使系统有效刚度降低, 自振频率减小, 当流速增加到一定值时, 有效刚度“趋于零”, 系统失稳出现分岔, 对应的流速称为临界流速。已有研究表明, 一般情况下两端支承约束管道的失稳形式为屈曲叉形分岔<sup>[1,2]</sup>, 而悬臂梁管道则为 Hopf 分岔<sup>[3]</sup>。

### 1.1 简支管道

Thuman 和 Mote<sup>[4]</sup>是较早研究输流管道非线性动力稳定性的研究者, 他们导出考虑管道横向和轴向运动耦合, 但未包含流固耦合的控制方程, 并使用 Lindstedt 法和 Krylov\_Bogoliulov 法联合求解, 以此研究系统的稳定特性。

Paidoussis<sup>[5,6]</sup>研究了非保守系统的稳定性, 发现系统除具有一般的叉形分岔外, 还具有与模态耦合颤振(flutter)有关的其它分岔形式, 称为 Paidoussis 后失稳(post\_divergence)。

\* 收稿日期: 2000\_11\_22; 修订日期: 2002\_05\_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50079007); 水利部重点水利科技资助项目(SZ9830); 云南省自然科学基金资助项目(97E003G)

作者简介: 张立翔(1959—), 男, 云南石屏人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: zhanglx@public.km.yn.cn);

黄文虎(1926—), 男, 教授, 中国工程院院士。

Holmes<sup>[1,2]</sup>研究了两端支承的管道失稳形式,认为“两端支承的管道不会发生颤振失稳”。在奇点的附近有可能存在局部分岔现象,但极限环不存在,运动总是随时间的延续趋于某种非平凡平衡状态。并采用中心流形理论研究了由 Paidoussis<sup>[7]</sup>方程得到的四维系统,发现在临界点邻域内的分岔特性,证明4维系统不存在极限环。

## 1.2 悬臂梁管道

Bajaj<sup>[3]</sup>改进了 Paidoussis<sup>[7]</sup>和 Lundgren<sup>[8]</sup>模型,研究了轴向、横向耦合运动的二维系统在一端固定,另一端自由条件下的分岔现象。研究表明,系统的稳定特性取决于三个参数,即:定常流速  $v_0$ ; 质量比  $\beta$ ; 流动能量损失系数  $\sigma$ 。当流速较小时(小于分岔临界流速),稳定是渐近的;随流速增加到某一值(临界流速),系统出现失稳分岔;证明在临界流速处分岔满足 Hopf 分岔条件,并用中心流形法研究了分岔后周期解的特性。

Bajaj 和 Sethna<sup>[9,10]</sup>将几何二维问题扩展到几何三维问题,研究发现,在任何情况下系统均有两个超临界分岔存在,且当流速超过临界值后,运动在平面内分为两支。随质量比  $\beta$  的不同,运动由驻波通过叉形分岔成为行波,也可能通过鞍结分岔后驻波和行波共存。

Rousselet 和 Hermann<sup>[11]</sup>采用 Krylov\_Bogoliubov 平均法求解,研究了垂直悬臂管道在临界流速邻域内运动的极限环,发现在  $S$ -型临界线邻域内极限环的幅值是质量比  $\beta$  的函数。Li 和 Paidoussis<sup>[12]</sup>发现,存在亚临界的叉形分岔和超临界的 Hopf 分岔。

## 1.3 分岔\_混沌特性

Paidoussis 和 Moon<sup>[13]</sup>研究了线性自治系统由于约束非线性引起的分岔-混沌关系。发现当非线性作用力达到一定值时,系统出现倍频分岔而导致运动混沌。Paidoussis 和 Li<sup>[14]</sup>发现管道从逐级分岔到混沌的过程,即随流速的增加,系统依次出现 Hopf 分岔、叉形分岔、倍频分岔,最后进入混沌状态。

Heinsbroek 和 Tijsseling<sup>[15]</sup>通过从大到小改变系统的约束刚度,考察其运动特性的变化,发现随约束刚度变小,系统从倍频分岔发展成混沌的过程。

Paidoussis 和 Cusumano<sup>[16]</sup>研究了分形(fractal dimension)与分岔、混沌的关系。对于同一管道,分形数  $d_c = 1.03$  的运动对应第一次倍频分岔;  $d_c = 1.53$  对应第二次倍频分岔;而当分形数  $d_c = 3.20$  时,运动进入混沌状态。

## 1.4 本文的研究内容

以往,输流管道非线性动力稳定性研究,以考虑流体作用下管道轴向、横向运动耦合非线性性为主,即考虑流体运动对系统稳定性的影响,但未考虑管道振动对流动状态的影响,耦合是不完全的;本文以非线性全耦合方程为对象,采用模态分解的方式研究由非定常流诱发的输流管道系统非线性运动的稳定性问题。

# 2 管道运动方程

利用 Hamilton 变分原理和变形体内流体的连续方程和动量方程建立了可描述输流管全固耦合(Poisson, Junction 及 Friction 耦合等<sup>[1]</sup>)条件下波振动系统的非线性方程<sup>[18]</sup>:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + m_f v \dot{v} + m_f [v \dot{v}' + 2v_f \dot{u}' + v_f^2 \dot{u}'' + \dot{u} \dot{u}'] + P(v_f + u) / c_F^2 - \\ [(1 - 2V)P(1 + u')] - g(1 - 2V)u''w - gmf(1 - 2V)(1 + u')w' - \\ EI(7w''w + w'w''') - EA_p(u'' + 3u'u'' + w'w'') = 0, \quad (1) \\ \ddot{w} + m_f(v \dot{v}'w + 2v_f \dot{u}'w + u \dot{v}' + v_f^2 w'') - m_f(1 - 2V)u \dot{v}'w + Pw / c_F^2 - \end{aligned}$$

$$[P(1-2\nu)w']' - gm_f(1-2\nu)(w''w + w'^2) - EI(u''w' + 6u\Theta'' + 9u''w\Theta + 4u'w''') + Ehw'''' - EA_p(u''w' + u'w'') - mg = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c_F}P - m_f[(1-2\nu)(u + v_f)u'' - (u' + v_f')] - m_f(1-2\nu)(u' + u'u' + w'u') = 0, \quad (3)$$

$$P' + m_f(\ddot{u} + v_f) + m_f\dot{w}' + gm_fw' + \frac{1}{2}Df\theta | v | v_f = 0, \quad (4)$$

式中,  $u$  为管道轴向位移;  $w$  为横向位移;  $m$  为单位管长流体质量 + 管道质量;  $m_f$  为单位管长流体质量;  $v_f$  为管内流速;  $P$  为流体压力;  $\nu$  为管材 Poisson 比;  $K$  为流体体积模量;  $\theta$  为流体质量密度;  $f$  为流体粘性摩擦系数;  $D$  为管道内直径;  $E$  为管材弹性模量;  $I$  为管道截面惯性矩;  $g$  为重力加速度;  $A_p$  为管道截面积;  $c_F$  为水击压力波运动的 Korteweg 波速。上述方程除哥氏力项外, 仅保留二次非线性项, 并含有文献[19] 和文献[20] 所具有的主要项。引入无量纲数:

$$u = \frac{u}{L}, \quad w = \frac{w}{L}, \quad D = \frac{D}{L}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \delta = \frac{\delta}{L},$$

$$v_f = \sqrt{\frac{mL^2}{EI}}v_f, \quad c_F = \sqrt{\frac{mL^2}{EI}}c_F, \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}t, \quad P = \frac{L^2}{EI}P,$$

$$g = \frac{mL^3}{EI}, \quad \omega = \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}\omega, \quad \beta = \frac{m_f}{m}.$$

式中,  $\omega$  为固有角频率;  $L$  为管长;  $t$  为时间。注意所研究的管道通常为薄壁管, 即壁厚  $\delta \ll D$ , 可近似取  $EA_p = 64\delta EI/D^3$ 。方程(1) ~ (4) 的无量纲形式为:

轴向运动:

$$\ddot{u} + \beta[v_f u' + 2v_f u' + v_f^2 u'' + \dot{u}u'] + P(v_f + u)/c_F - [(1-2\nu)P(1+u')] - g\beta(1-2\nu)u''w - g\beta(1-2\nu)(1+u')w' - (7w''w\Theta + w'w''') - \frac{64\delta}{D^3}(u'' + 3u'u'' + w'w'') = 0 \quad (5)$$

横向运动:

$$\ddot{w} + \beta(v_f w' + 2u'v_f + u'v_f + v_f^2 w'') - \beta(1-2\nu)u'w + Pw/c_F - (1-2\nu)(Pw')' - g\beta(1-2\nu)(ww'' + w'^2) + w'' - (u''w' + 6u\Theta'' + 9u''w\Theta + 4u'w''') - \frac{64\delta}{D^3}(u''w' + u'w'') - g = 0 \quad (6)$$

连续方程:

$$P - \beta c_F^2[(1-2\nu)(u + v_f)u'' - (u' + v_f')] - \beta c_F^2(1-2\nu)(u' + u'u' + w'u') = 0 \quad (7)$$

动量方程:

$$P' + \beta(\ddot{u} + v_f) + \beta\dot{w}' + g\beta w' + \frac{2\beta}{D}v_f^2 = 0 \quad (8)$$

对式(8)在区间  $[0, \xi]$  积分, 得:

$$P = -\beta \int_0^\xi [(\ddot{u} + v_f) + \dot{w}' + \frac{2f}{D}v_f^2] d\xi - \beta gw + P_0 + \beta gw_0, \quad (9)$$

式中,  $P_0$  和  $w_0$  分别为管道进口处的压力和横向位移。将式(7) 和式(9) 分别代入式(5) 和式(6), 并略去速度迁移项后得管道非线性运动方程为:

$$[1 + \mu\beta]\ddot{u} + \mu\beta[v_f u' + 2v_f u' + v_f^2 u'' + \dot{u}u'] + \mu\beta(v_f + u)(u'' + v_f u'' +$$

$$\begin{aligned} & u'' + u'u'' + w'u'' + \mu\beta w' + \mu\beta\alpha_f^2 - g\mu\beta(u''w + u'w') - \\ & (7w''w\Theta + w'w''') - \delta(u'' + 3u'u'' + w'w'') = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \beta[vw' + 2u'v + v^2w'' - w\dot{w}'] + \mu\beta(vf + w)u'' + \mu\beta w[u'u' + u'w'] - \\ \mu P_0 w'' - \mu\beta g w_0 w'' + \mu\beta w'[\ddot{u} + v\dot{w} + \dot{w}w' + \alpha_f^2] - \\ (u''w' + 6u\Theta'' + 9u''w\Theta + 4u'w''') + w''' - \delta(u''w' + u'w'') - \\ g + \mu\beta w'' \int_0^\xi [(\ddot{u} + v\dot{w}) + \dot{w}w' + \alpha_f^2] d\xi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $\mu = (1 - 2\nu)$ ,  $\alpha = 2f/D$ ,  $\delta = 64\delta/D^3$ 。设系统由于流动突然受扰诱发出的非定常流的流速可表示为:

$$w = v_0 + v, \quad (12)$$

式中,  $v_0$  表示未受扰运动的稳态流速;  $v$  为由于扰动引起的脉动流速。将式(12)代入式(10)和式(11), 并设管道进口端为全约束, 即取  $w_0 = 0$ , 整理得:

$$\begin{aligned} [1 + \mu\beta]\ddot{u} + \beta(2 + \mu)v_0\dot{u}' + \beta(1 + \mu)v_0^2u'' - \delta u'' + \beta(1 + \mu)v\dot{w} + \\ \beta[v\dot{w}' + 2v\dot{u}' + (2v_0v + v^2)u'' + \dot{u}u'] + \mu\beta v_0(u'' + v u'' + \\ u'u' + w'w') + \mu\beta(v + w)[u'' + (v_0 + v)u'' + u' + u'u' + w'w'] + \\ \alpha\mu\beta(v_0^2 + 2v_0v + v^2) - g\mu\beta(u''w + u'w') - (7w''w\Theta + w'w''') - \\ \delta(3u'u'' + w'w'') = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + 2\beta v_0\dot{u}' + \mu\beta\alpha_0^2w' + (\beta_0^2 - \mu P_0 + \mu P_0 + \mu\beta\alpha_0^2\xi)w'' + w''' + \\ \mu\beta v_0\dot{u}'' + \beta[v\dot{w}' + 2u'v + (2v_0v + v^2)w'' - w\dot{w}'] + \\ \mu\beta(v + w)u'' + \mu\beta w(u'u' + u'w') + \mu\beta w'[\ddot{u} + v\dot{w} + \dot{w}w' + \\ \alpha(2v_0v + v^2)] - (u''w' + 6u\Theta'' + 9u''w\Theta + 4u'w''') - \delta(u''w' + u'w'') + \\ \mu\beta w'' \int_0^\xi [(\ddot{u} + v\dot{w}) + \dot{w}w' + \alpha(2v_0v + v^2)] d\xi - g = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

### 3 运动稳定分析

引入小参数  $\varepsilon > 0$  将变量在扰动方程零解对应的平衡位置, 即原点  $u = 0, w = 0$  及  $v = 0$  的邻域内展开, 即在上述方程中将  $u, w$  及  $v$  分别换成  $\varepsilon u, \varepsilon w$  及  $\varepsilon v$  (仍用原变量表示), 可得零解系统方程为:

$$\begin{aligned} [1 + \mu\beta]\ddot{u} + \beta(2 + \mu)v_0\dot{u}' + \beta(1 + \mu)v_0^2u'' - \delta u'' = \\ - \beta(1 + \mu)v\dot{w} - 2\alpha\mu\beta v_0v - \varepsilon\beta(v\dot{w}' + 2v\dot{u}' + 2v_0vu'' + \dot{u}u') - \\ \varepsilon\mu\beta(v\dot{w}' + \dot{u}u') - \varepsilon\mu\beta v_0(2u'' + 2vu'' + u'u' + w'w') + \varepsilon\alpha\mu\beta v^2 + \\ \varepsilon g\mu\beta(u''w + u'w') + \varepsilon(7w''w\Theta + w'w''') + \varepsilon\delta(3u'u'' + w'w'') + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + 2\beta v_0\dot{u}' + \mu\beta\alpha_0^2w' + (\beta_0^2 - \mu P_0 + \mu\beta\alpha_0^2\xi)w'' + w''' = \\ - \varepsilon\beta[v\dot{w}' + 2u'v + 2v_0vw'' - w\dot{w}'] - \varepsilon\mu\beta v_0\dot{u}'' - \varepsilon\mu\beta w'(\ddot{u} + v\dot{w} + 2\alpha_0v) + \\ \varepsilon(u''w' + 6u\Theta'' + 9u''w\Theta + 4u'w''') + \varepsilon\delta(u''w' + u'w'') - \\ \varepsilon\mu\beta w'' \int_0^\xi [(\ddot{u} + v\dot{w}) + 2\alpha_0v] d\xi + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (16)$$

相应的线性化系统为:

$$[1 + \mu\beta]\ddot{u} + \beta(2 + \mu)v_0\dot{u}' + \beta(1 + \mu)v_0^2u'' - \delta u'' = 0, \quad (17)$$

$$\ddot{w} + 2\beta v_0\dot{u}' + \mu\beta\alpha_0^2w' + (\beta_0^2 - \mu P_0 + \mu\beta\alpha_0^2\xi)w'' + w''' = 0, \quad (18)$$

$$(1 + \mu)v_0 + 2\alpha\mu v_0 v = 0 \tag{19}$$

从方程(19)很容易得到脉动流速为:

$$v = v_{0\Delta} \exp\left[-\frac{2\alpha\mu v_0}{1 + \mu} \tau\right] \tag{20}$$

式中,  $v_{0\Delta}$  为  $\tau = 0$  时诱发的扰动流速, 即管道中流速的突变量。利用式(17)和式(18)表示的线性化系统, 可分别研究系统轴向、横向运动的在不同条件及不同流动状态下的稳定性, 确定系统的临界流速  $v_c$ 。很显然, 在线性化系统中管道轴向和横向运动无耦合作用, 这就为分析带来了方便。

对于悬臂梁管道, 当无量纲流速  $v_0$  为一小数值时(一般情况下是这样), 利用文献[3]的可解性条件, 可求得式(17)表示的系统的一阶摄动特征值为:

$$\lambda_n = \lambda_{0,n} - [v_0 \beta (2 + \mu) \eta_{0,n}^2(1)] \sqrt{4 \int_0^1 \eta_{0,n}^2(\xi) d\xi} \tag{21}$$

式中,  $\lambda_{0,n} = i\omega_n$  为管道中流体不流动时管道轴向振动的特征值,  $\omega_n = (2n - 1)\pi c_p/2$  为轴向振动无量纲角频率,  $i$  为虚数单位;  $\eta_{0,n}(\xi) = \sin[(2n - 1)\pi\xi/2]$  为相应于  $\omega_n$  的轴向振动模式函数。为分析轴向运动的稳定性, 引入状态变量:

$$u_2 = u, u_1 = u' + \frac{\beta(2 + \mu)}{1 + \mu\beta} v_0 u' \tag{22}$$

可得系统状态方程为:

$$\left. \begin{aligned} i\lambda + \frac{(\beta + \mu)v_0^2 - \delta}{1 + \mu} u_2' &= 0, \\ i\lambda + \frac{2\beta + \mu}{1 + \mu} v_0 u_2' - u_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

则在状态空间中相应的模态函数满足如下方程:

$$\eta_{k2}''(\xi) + \frac{\beta(2 + \mu)v_0 \lambda_n}{\beta(1 + \mu)v_0^2 - \delta} \eta_{k2}'(\xi) + \frac{(1 + \mu\beta)\lambda_n^2}{\beta(1 + \mu)v_0^2 - \delta} \eta_{k2}(\xi) = 0, \tag{24a}$$

$$\eta_{k1}(\xi) = \frac{\beta(2 + \mu)v_0 \lambda_n}{1 + \mu\beta} \eta_{k2}'(\xi) - \lambda_n^2 \eta_{k2}(\xi) \tag{24b}$$

对于水库\_管道\_阀门系统(RPV), 其第  $n$  阶模态对应的解为:

$$\eta_{k2n}(\xi) = \frac{\mathcal{P}_w}{\omega_n \exp[-c\omega_n] (\cos\omega_n - c \sin\omega_n)} \sin\omega_n \xi \tag{25a}$$

$$\eta_{k1n}(\xi) = \frac{\lambda_n \mathcal{P}_w}{\exp[-c\omega_n] (\cos\omega_n - c \sin\omega_n)} \left\{ \frac{\beta(2 + \mu)v_0}{1 + \mu\beta} \cos\omega_n \xi - \frac{\lambda_n}{\omega_n} \sin\omega_n \xi \right\} \tag{25b}$$

其中:

$$\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{(1 + \mu\beta)}{\beta(1 + \mu)v_0^2 - \delta}}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{\beta(2 + \mu)v_0}{\sqrt{[\beta(1 + \mu)v_0^2 - \delta](1 + \mu\beta)}}$$

$$P_w = \beta c P_{0\Delta} \exp\left[-\frac{2\alpha\mu v_0}{1 + \mu} \tau\right]$$

式中,  $\varepsilon$  为水击压力对管道轴向约束力的作用系数。对于横向运动, 同理可以得到其状态方程为:

$$\left. \begin{aligned} i\lambda_1 &= -\mu\omega_0^2 w_2' - (\beta v_0^2 - \mu P_0 + \mu\omega_0^2 \xi) w_2'' - w_2''', \\ i\lambda_2 &= -2\beta v_0 w_2' + w_1 \end{aligned} \right\} \tag{26a, b}$$

相应的模态函数方程为:

$$\begin{aligned} \eta_{w2}''(\xi) + (\beta v_0^2 - \mu P_0 + \mu \beta \alpha v_0^2 \xi) \eta_{w2}''(\xi) + \\ (2\beta v_0 \lambda_w + \mu \beta \alpha v_0^2) \eta_{w2}'(\xi) + \lambda_w^2 \eta_{w2}(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\eta_{w1}(\xi) = \lambda_w \eta_{w2}(\xi) + 2\beta v_0 \eta_{w2}'(\xi), \quad (27b)$$

边界条件为:

$$\eta_{w2}(0) = \eta_{w2}'(0) = \eta_{w2}''(1) = \eta_{w2}'''(1) = 0, \quad (28)$$

特征值为

$$\lambda_{w,n} = \lambda_{w0,n} - [v_0 \beta \eta_{w0,n}^2(1)] \left[ 4 \int_0^1 \eta_{w0,n}^2(\xi) d\xi \right], \quad (29)$$

式中,  $\lambda_{w0,n} = i \omega_{wn}$  为管道中流体不流动时的横向振动特征值, 而  $\omega_{wn}$  为超越方程

$$1 + \cos \sqrt{\omega_{wn}} \cosh \sqrt{\omega_{wn}} = 0$$

的根. 方程(27a)的特征方程为:

$$b^4 - \mu P_0 b^2 + \lambda_w^2 = -(\beta v_0^2 + \mu \alpha \beta v_0^2 \xi) b^2 - (2\beta v_0 \lambda_w + \mu \alpha \beta v_0^2) b \quad (30)$$

考虑到无量纲流速  $v_0$  为小参数, 按一阶摄动,  $b = b_0 + v_0 b^{(1)}$ , 展开可得:

$$b_0^4 - \mu P_0 b_0^2 + \lambda_{w0}^2 = 0, \quad b^{(1)} = \frac{\lambda_{w0} \lambda_{w1} + \beta \lambda_{w0} b_0}{\mu P_0 b_0 - 2b_0^2}. \quad (31a, b)$$

由方程(31a)可确定出  $b_0$  的 4 个根, 同时注意到  $\lambda_{w0} = i \omega_{w0}$  为:

$$\begin{aligned} b_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\mu^2 P_0^2 + 4 \omega_{w0}^2} + \mu P_0}, \quad b_{02} = i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\mu^2 P_0^2 + 4 \omega_{w0}^2} - \mu P_0}, \\ b_{03} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\mu^2 P_0^2 + 4 \omega_{w0}^2} + \mu P_0}, \quad b_{04} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\mu^2 P_0^2 + 4 \omega_{w0}^2} - \mu P_0}. \end{aligned}$$

则利用边界条件(28), 可得对应于形状指数  $b_i = b_{0i} + v_0 b_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的横向运动模态函数为:

$$\eta_w(\xi) = C_1 \exp[b_1 \xi] + C_2 \exp[b_2 \xi] + C_3 \exp[b_3 \xi] + C_4 \exp[b_4 \xi], \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_3} - \frac{b_4 - b_2}{b_2 - b_3} C_4, \quad C_3 = \frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} + \frac{b_4 - b_2}{b_2 - b_3} C_4, \\ C_4 = -\frac{(b_2 - b_3) b_1^2 \exp[b_1] + (b_3 - b_1) b_2^2 \exp[b_2] + (b_1 - b_2) b_3^2 \exp[b_3]}{(b_4 - b_2) b_3^2 \exp[b_3] - (b_4 - b_2) b_2^2 \exp[b_2] + (b_2 - b_3) b_4^2 \exp[b_4]}. \end{aligned}$$

利用模态函数式(25a)或式(32)则可分别考察轴向或横向运动所对应的各阶模态运动的稳定性, 并求出相应的临界流速.

## 4 分析算例

为了具体说明上述方法的应用以及在多种耦合条件下输流管道的稳定特性, 以一端固定, 另一端自由的 RPV 悬臂梁管道为例, 分析其稳定状态及奇点的属性, 管道特性如表 1. 1~ 4 阶模态函数随流速变化的运动曲线及相应相轨迹如图 1~ 图 4 所示.

表 1 RPV 管道系统特性参数

管 道		水	
管 长	$L = 1.0 \text{ m}$	体弹模量	$K = 2.1 \text{ GPa}$
内 径	$R = 0.026 \text{ m}$	质量密度	$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$
壁 厚	$\delta = 0.003 \text{ m}$	动力粘性系数	$\mu_d = 0.001 \text{ Pas}$
弹性模量	$E = 210 \text{ GPa}$	静水头	$H_0 = 10 \text{ m}$
质量密度	$\rho_p = 7900 \text{ kg/m}^3$		
泊松比	$\nu = 0.3$		
阻尼比	$\zeta = 0.002$		

情况 1 第一阶模态运动

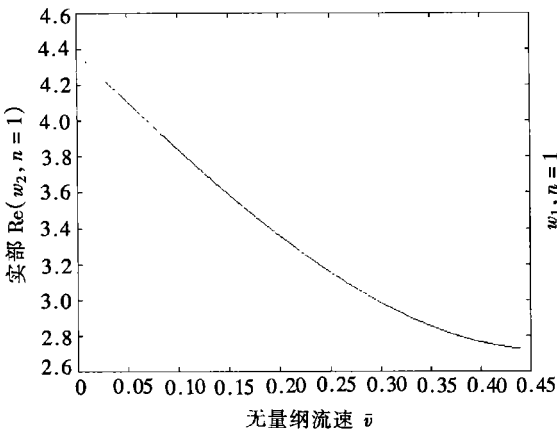


图 1(a) 模态函数实部随无量纲流速变化曲线

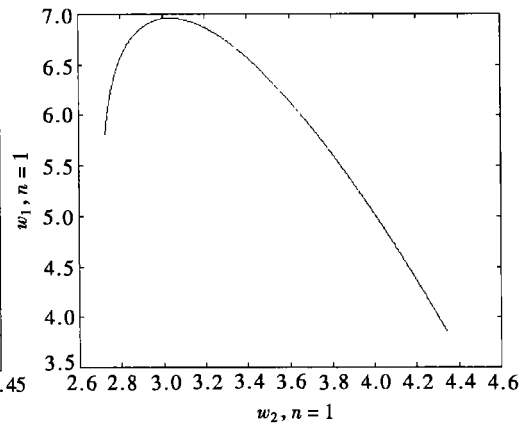


图 1(b) 运动相轨迹

情况 2 第二阶模态运动

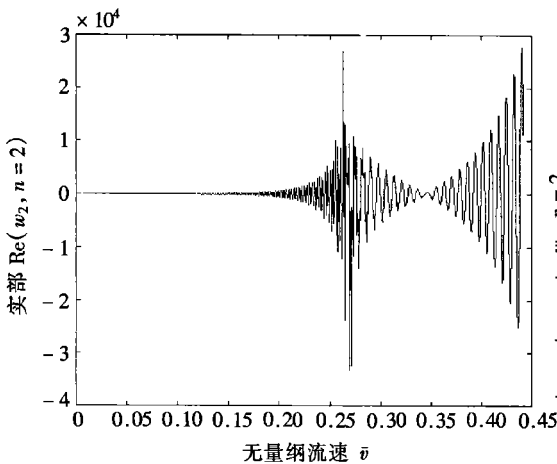


图 2(a) 模态函数随无量纲流速变化曲线

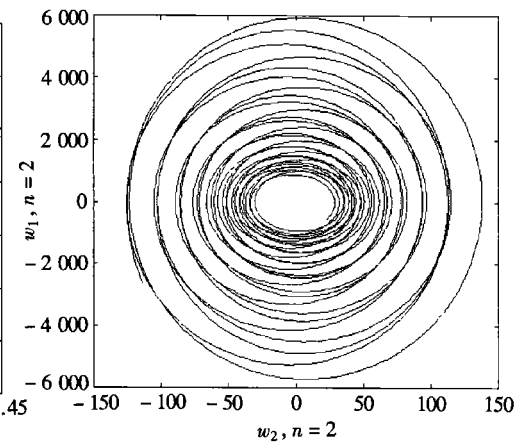


图 2(b) 运动相轨迹

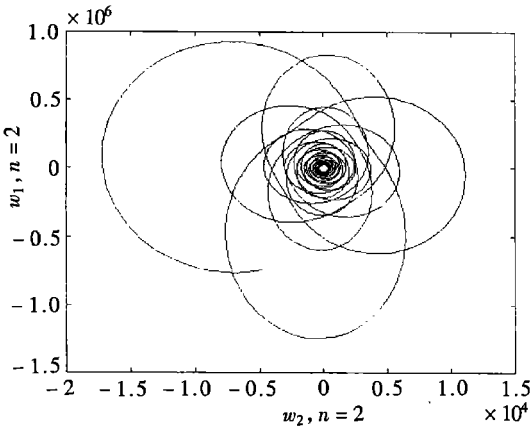


图 2(c) 运动相轨迹, 向不稳定状态过渡

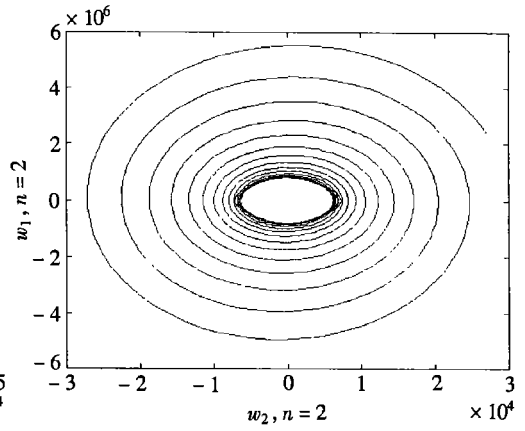


图 2(d) 运动相轨迹

情况 3 第三阶模态运动

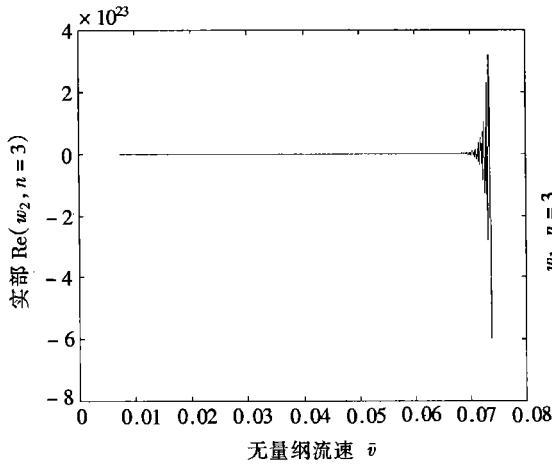


图 3(a) 模态函数随无量纲流速变化曲线

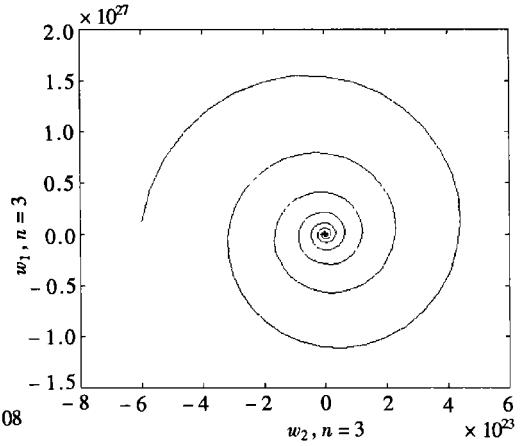


图 3(b) 运动相轨迹

情况 4 第四阶模态运动

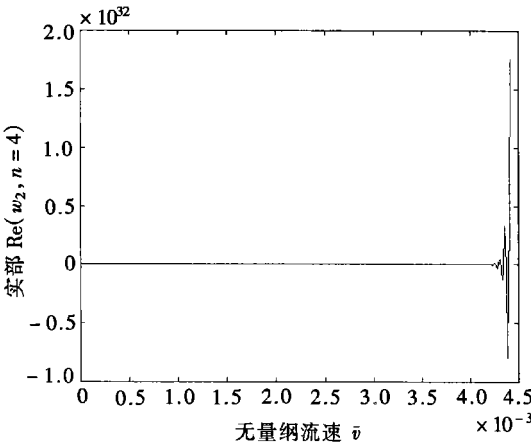


图 4(a) 模态函数随无量纲流速变化曲线

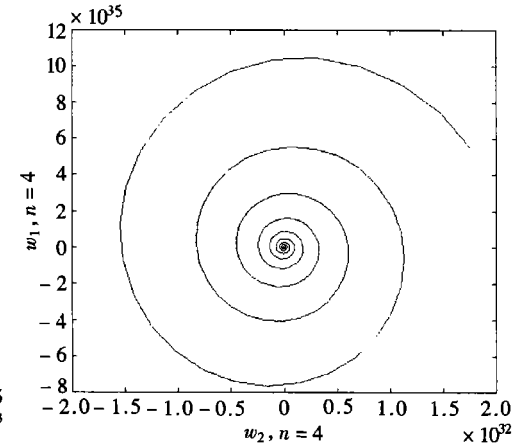


图 4(b) 运动相轨迹



## 5 结 论

输流管道在多种耦合条件下的稳定特性十分复杂,除边界条件及初始条件外,流动状态、压力波动特性等也是影响系统稳定性的重要因素。系统各阶模态运动具有不同的奇点类型,稳定特性不同。算例中的悬臂梁管在考察的流速范围内,第一阶模态运动无奇点;第三阶以上模态运动具有相同的稳定特性(但临界流速不同),奇点为焦点;第二阶模态运动具有较复杂的运动特性,随流速增加相继出现稳定和不安定的极限环。

### [参 考 文 献]

- [1] Holmes P J. Pipes supported at both ends cannot flutter[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, **45**(3): 619—622.
- [2] Holmes P J. Bifurcation to divergence and flutter in flow induced oscillations: a finite dimensional analysis[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, **53**(4): 471—503.
- [3] Bajaj A K, Sethna P R. Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid[J]. *SIAM J Appl Math*, 1980, **39**(2): 213—230.
- [4] Thurman A L, Mote C D Jr. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving trip[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1969, **36**(1): 83—91.
- [5] Paidoussis M P, Issid N T. Dynamics stability of pipes conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, **33**(2): 267—294.
- [6] Paidoussis M P. Flutter of conservative systems of pipes conveying incompressible fluid[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1975, **17**(1): 19—25.
- [7] Paidoussis M P. Fluid induced instabilities of cylindrical structures[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1987, **40**(1): 163—175.
- [8] Lundgren T S, Sethna P R, Bajaj A K. Stability boundaries for flow induced motion of tubes with an inclined terminal nozzle[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, **64**(4): 553—571.
- [9] Bajaj A K, Sethna P R. Flow induced Bifurcation to three dimensional oscillatory motion in continuous tubes[J]. *SIAM J Appl Math*, 1984, **43**(2): 270—286.
- [10] Bajaj A K, Sethna P R. Effect of symmetry breaking perturbation on flow induced oscillations in tubes[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1991, **5**(4): 651—679.
- [11] Rousslete J, Herrmann G. Flutter of articulated pipes at finite amplitude[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1977, **44**(1): 154—158.
- [12] Li G X, Paidoussis P M. Stability, double degeneracy and chaos in cantilevered pipes conveying fluid[J]. *Journal of Non Linear Mechanics*, 1994, **29**(1): 83—107.
- [13] Paidoussis M P, Moon F C. Nonlinear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, **2**(4): 567—591.
- [14] Paidoussis M P, Li G X, Moon F C. Chaotic oscillations of the autonomous system of constrained pipe conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, **135**(1): 1—19.
- [15] Heinsbroek A G T J, Tijsseling A S. The influence of support rigidity on waterhammer pressures and pipe stresses[A]. In: D S Miller Ed. BHRG Proceedings of International Conference on Water Pipeline Systems[C]. London: Mechanical Engineering Publication Ltd, 1994, 17—29.
- [16] Paidoussis M P, Cusumano J P, Copeland G S. Low dimensional chaos in a flexible tube conveying fluid[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, **59**(1): 196—205.
- [17] ZHANG Li\_xiang, Tijsseling A S, Vardy A E. FSI analysis of liquid filled pipes[J]. *Journal of Sound*

- and *Vibration*, 1999, **224**(1): 69—99.
- [18] 张立翔, 黄文虎. 输流管道非线性流固耦合振动的数学建模[J]. *水动力学研究与进展*, 2000, **15**(1): 116—128.
- [19] Gorman D G, Reese J M, Zhang Y L. Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow[J]. *Journal of Sound and Vibration* [J]. 2000, **230**(2): 379—392.
- [20] Lee U, Pak C H, Hong S C. The dynamic of a piping system with internal unsteady flow[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **182**(2): 297—311.

## Analysis of Nonlinear Dynamic Stability of Liquid Conveying Pipes

ZHANG Li\_xiang<sup>1</sup>, HUANG Wen\_hu<sup>2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Kunming University of  
Science and Technology, Kunming 650051, P R China;

2. School of Aeronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China)

**Abstract:** Nonlinearly dynamic stability of flexible liquid conveying pipe in fluid structure interaction was analyzed by using modal disassembling technique. The effect of Poisson, Junction and Friction couplings in the wave flowing vibration system on the pipe dynamic stability were included in the analytical model constituted by 4 nonlinear differential equations. An analyzing example of cantilevered pipe was done to illustrate the dynamic stability characteristics of the pipe in the full coupling mechanisms, and the phase curves related to the first four modal motions were drawn. The results show that the dynamic stable characteristics of the pipe are very complicated in the complete coupling mechanisms, and the kinds of the singularity points corresponding to the various modal motions are different.

**Key words:** piping flow; fluid structure interaction; nonlinear vibration; bifurcation