

文章编号: 1000-0887(2002)09-0961-07

# 一种改进的弧长法及在结构后屈曲分析中的应用\*

朱菊芬, 初晓婷

(大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(吕和祥推荐)

**摘要:** 基于一般的弧长法, 提出了一种高效的改进弧长法。通过对增量弧长作了以考虑结构刚度变化为主的加权修正和利用已知平衡点信息的外插修正, 而大大提高了求解效率; 利用对累加弧长和期望弧长作近似展开的方法使求解能收敛到预定的载荷值, 而拓宽了弧长法的应用范围。两个典型算例表明, 采用改进的弧长法在板/壳结构后屈曲分析中, 无论是追踪后屈曲的全程路径, 还是求得指定载荷点的收敛解都有良好的适应性和较高的效率。

**关键词:** 弧长法; 非线性; 有限元; 板/壳结构; 后屈曲

**中图分类号:** O342; O241.8      **文献标识码:** A

## 引 言

目前, 结构非线性有限元分析中(如求解后屈曲路径)普遍采用的是 1979 年由 Riks 和 Wempner 提出, 后经 Crisfield 的 Roma 等人改进的各种弧长法<sup>[1~5]</sup>, 这一方法为结构载荷\_位移全过程跟踪提出了迄今为止仍然是最有效的方法, 从而满足了工程结构分析和设计中求解结构承载能力的需要, 并可了解结构从初始状态开始, 逐渐加载直至破坏的变形全过程。

随着现代结构朝着大型化、复杂化方向发展, 工程设计给力学分析提出了更多的要求。比如要确定结构某些预定载荷下的变形状态和各种力学响应, 即求解能收敛到某些预定载荷值。但是, 在完成这一任务过程中往往会增加许多增量步, 使求解效率大大降低。因此, 为了扩大弧长法的适用范围, 必须合理地选择增量步和加快迭代速度, 提高求解的效率仍然是关键。以至于近二十年来, 改进弧长法的研究一直异常活跃。

本文在 Crisfield 弧长法的基础上, 提出了两种修正弧长的策略: 一是根据结构刚度参数的变化去加权修正弧长; 二是利用已知平衡点的信息去外插修正弧长。上述两种修正弧长策略的结合, 形成了一种适用性强、效率高的改进弧长法。同时, 利用改进弧长法实现了对板/壳结构在任一指定载荷下的求解。大量算例说明改进弧长法不仅对结构后屈曲路径全过程的跟踪, 而且对获得指定载荷的收敛解, 在求解效率上都有明显的提高。

\* 收稿日期: 2001\_03\_09; 修订日期: 2002\_05\_16

基金项目: 航空科学基金资助项目(00B01001)

作者简介: 朱菊芬(1942—), 女, 江苏常熟人, 教授(E-mail: cjjzhu@263.net)。

# 1 一种改进弧长法的策略

## 1.1 一般的弧长法

结构非线性静力分析中增量形式的平衡控制方程为:

$$[K_T]\{\Delta\dot{\mathbf{a}}\} = \Delta\lambda\{\mathbf{F}_l\} + \{\mathbf{R}\}, \quad (1)$$

式中:  $[K_T]$  为切线刚度矩阵,  $\{\Delta\dot{\mathbf{a}}\}$  为位移增量向量,  $\Delta\lambda$  为载荷增量控制参数,  $\{\mathbf{F}_l\}$  为参考载荷向量,  $\{\mathbf{R}\}$  为残余力向量。

运用弧长法求解结构非线性有限元方程时, 第  $i$  步内第  $j$  次迭代后的累加位移为:

$$\{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_a\}_i^j = \{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_a\}_i^{j-1} + \Delta\lambda\{\ddot{\mathbf{a}}_l\}_i + \{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_R\}_i, \quad (2)$$

式中:  $\Delta\lambda$  为第  $i$  步第  $j$  次迭代的载荷因子,  $\{\ddot{\mathbf{a}}_l\}_i$  为参考载荷下的切线位移,  $\{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_R\}_i$  为由残余力引起的位移增量。

载荷因子  $\Delta\lambda$  的变化受第  $i$  步弧长  $l_i$  控制, 一般采用 Crisfield<sup>[1]</sup> 提出的迭代控制方程:

$$\{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_a\}_i^T \{\Delta\ddot{\mathbf{a}}_a\}_i = l_i^2. \quad (3)$$

而弧长  $l_i$  一般由 Bellini 提出的方法计算:

$$l_i = l_{i-1}(J_d/J_{i-1})^{1/2}, \quad (4)$$

式中:  $l_i$  为第  $i$  增量步的弧长,  $J_d$  为期望迭代次数,  $J_{i-1}$  为第  $i-1$  增量步满足收敛时的迭代次数。

## 1.2 加权修正弧长

为了提高计算效率, 需要针对具体问题(如结构形状、载荷作用方式、大小等)合理地选择步长( $\Delta\lambda$ 和 $\Delta\lambda$ ), 根据公式(4), 首先要合理地控制弧长  $l_i$  和  $l_d$ 。即仅仅考虑上一增量步的迭代次数  $J_{i-1}$  和人为主观上的期望迭代应次数  $J_d$ 。而可以反应结构当前非线性变形状态的参数还有其他, 如 Bergan 提出的用结构刚度参数的变化值来描述结构当前所处的非线性状态。于是我们对公式(4)作用一个权系数  $\alpha$ ,

$$l_{i0} = \alpha l_{i-1} \sqrt{J_d/J_{i-1}}, \quad (5)$$

$\alpha$  是以结构刚度参数变化为主的权系数。

令  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ , 其中  $\alpha_2 = \Delta S / |S_{i-1} - S_{i-2}|$ , 为结构刚度参数的变化,  $S_i$  为第  $i$  增量步的无量纲刚度参数,  $\Delta S$  为预定的刚度参数增量;  $\alpha_1$  为可反映其他因素影响的权系数, 一般可根据经验确定。

通过大量算例可知,  $\Delta S$  和  $\alpha_1$  的建议数据范围要根据经验选取, 本文两道例题中均取为 0.05 和 2.0。

## 1.3 外插修正弧长

采用弧长法求解时能够实现跟踪结构非线性变形的平衡路径, 一般情况下(除分支屈曲外)结构变形的平衡路径随载荷步的增加是逐渐地缓慢地向前延伸的, 因此有可能通过对平衡路径上最近一些点的插值, 外推出下一个平衡点的大致的位置, 然后在新的位置上开始迭代, 往往能很快收敛到真正的平衡点, 根据这一思想提出了外插弧长法。

如图 1,  $O$  点为上一步(第  $i-1$  步)收敛点, 我们利用已知的前  $m+1$  个点的位置进行插值, 外推到  $O'$  点作为下一步的初始位置, 很显然  $O'$  要比  $O$  点能更靠近平衡点  $A$ 。它的插值表达式是:

$$\{\mathbf{G}(\delta, \lambda)\}_i^0 =$$

$$\sum_{k=i-m-1}^{i-1} \left\{ \prod_{l=i-m-1, l \neq k}^{i-1} \frac{x - x_l}{x_k - x_l} \right\} \{G(\delta, \lambda)\}_k, \quad (6)$$

式中:  $\{G(\delta, \lambda)\}_k$ ,  $\{G(\delta, \lambda)\}_i^0$  分别是已知第  $k$  个增量步的收敛值向量和第  $i$  步预测点的初值向量 ( $N+1$  维, 包括节点位移及载荷因子) ( $k = i - m - 1, \dots, i - 1$ ), 以下简写作  $\{G\}_k$ ,  $\{G\}_i^0$ .

$x_k$ ,  $x$  为分别表示路径上已知平衡点  $k$  和预测点  $i$  的  $N+1$  维空间位置坐标, 将第  $i - m - 1$  步平衡点作为计算始点 ( $x_{i-m-1} = 0.0$ ), 则后面  $m$  个点 ( $i - m, \dots, i - 1$ ) 以及预测点的位置坐标可由已知平衡点的  $\{G\}_k$  ( $k = i - m - 1, \dots, i - 1$ ) 算得, 外插弧长修正中通常采用三点抛物线插值.

$$x_k = x_{k-1} + \|\{G\}_k - \{G\}_{k-1}\| \quad (k = i - m, i - 1),$$

$$x = x_{i-1} + l_i.$$

式中:  $l_i$  为给定的弧长值, 其计算方法见式(5).

然后利用  $\{G\}_i^0$  计算预测点  $i'$  (图 1) 的切线刚度矩阵, 并重新计算弧长,

$$l_i' = \|\{G\}_i^0 - \{G\}_{i-1}\|. \quad (7)$$

作为以后迭代过程中的弧长约束, 迭代步骤和一般的弧长法相同.

## 2 可收敛于指定载荷值的弧长法

### 2.1 累加弧长的概念

Teng 和 Luo<sup>[6]</sup> 在用一般的弧长法分析非线性分支型问题时曾提出过累加弧长的概念, 设第  $i$  增量步的累加弧长  $L_i$  是前面所有增量步内弧长之和, 其中包括第  $i$  步, 即

$$L_i = \sum_{k=1}^i l_k, \quad (8)$$

式中:  $l_k$  为第  $k$  增量步的弧长.

参数  $L$  代表结构当前的状态, 它不仅取决于结构本身的几何、物理性质和载荷作用方式, 还依赖于载荷的施加过程.

### 2.2 期望弧长的控制

为了计算期望弧长  $l_d$ , 首先定义累加弧长是载荷因子的函数,

$$L = L(\lambda).$$

在第  $i - 1$  步收敛时, 将对应于  $\lambda_{i-1}$  的期望累加弧长  $L_d$  在  $L_{i-1}$  处展开,

$$L_d = L(\lambda_d) = L(\lambda_{i-1} + \Delta\lambda_d) = L_{i-1} + \frac{dL_{i-1}}{d\lambda} \Delta\lambda_d + \frac{1}{2} \frac{d^2L_{i-1}}{d\lambda^2} \Delta\lambda_d^2 + \dots \quad (9)$$

式中:  $\Delta\lambda_d = \lambda_d - \lambda_{i-1}$ .

如果只保留(9)式中的一阶和二阶项就可得到第  $i$  步期望弧长的二次近似表达式:

$$l_d = |L_d - L_{i-1}| = \left| \frac{dL_{i-1}}{d\lambda} \Delta\lambda_d + \frac{1}{2} \frac{d^2L_{i-1}}{d\lambda^2} \Delta\lambda_d^2 \right|, \quad (10)$$

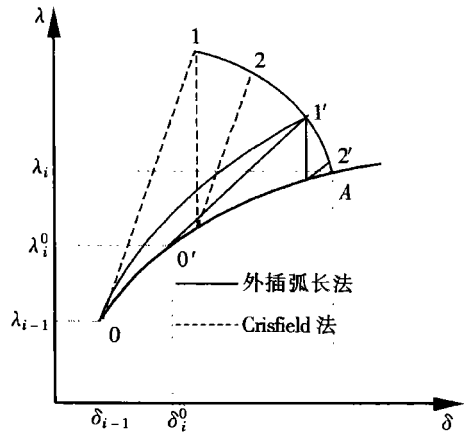


图 1 外插修正弧长

式中:  $L$  对  $\lambda$  的导数可以通过以下的有限差分公式得到,

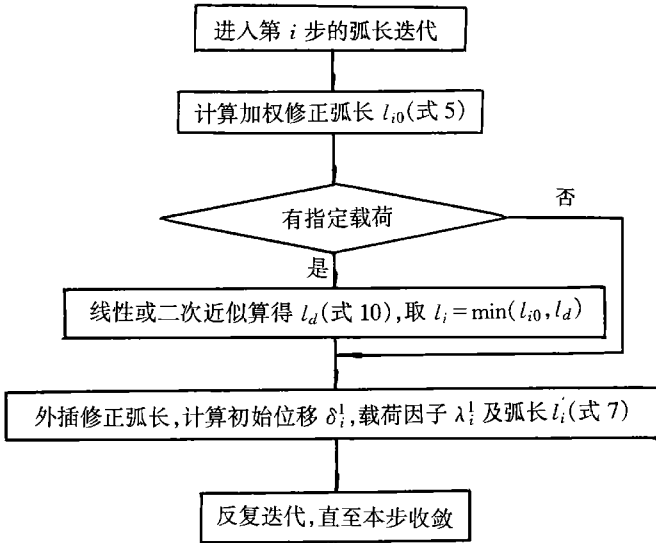
$$\frac{dL_{i-1}}{d\lambda} = \frac{L_{i-1} - L_{i-2}}{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}} \tag{11a}$$

$$\frac{d^2L_{i-1}}{d\lambda^2} = \frac{dL_{i-1}/d\lambda - dL_{i-2}/d\lambda}{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}} \tag{11b}$$

如果只考虑线性项, 则可得线性近似的结果。

在计算过程中, 要将式(7)和式(10)算得的弧长进行比较, 取其较小者作为迭代需要的弧长, 大量算例说明, 对期望弧长一般可采用线性近似, 复杂的非线性问题可采用二次近似。

### 3 程序实现框图



### 4 数值算例及讨论

例 1 四边简支各向同性方板, 受面内单向均布压力, 如图 2 所示。几何尺寸为  $a = b = 100 \text{ mm}$ , 板厚  $h = 1 \text{ mm}$ , 材料性质为:  $E = 1.106 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , 指定收敛的载荷因子为 1.50。由结构一阶波形的对称性, 取 1/4 板, 按  $4 \times 4$  网格进行非线性屈曲分析。

表 1 中将改进前后计算效率进行了比较, 相应的载荷\_中心点挠度曲线见图 3 和图 4。

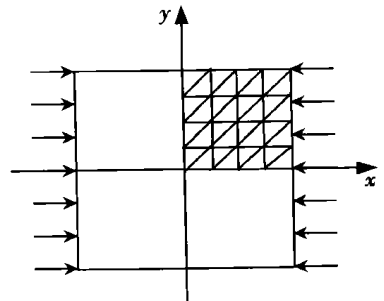


图 2 四边简支单向受压板

表 1 例 1 计算效率的比较

	无指定载荷后屈曲路径	有指定载荷后屈曲路径	
		线性近似	二次近似
一般弧长法	23/3.4/78	30/3.2/96	30/3.3/99
改进弧长法	12/2.5/33	16/2.5/40	17/2.5/43

注: 表中数据·/·/·表示“总增量步数/平均迭代次数/总迭代次数”

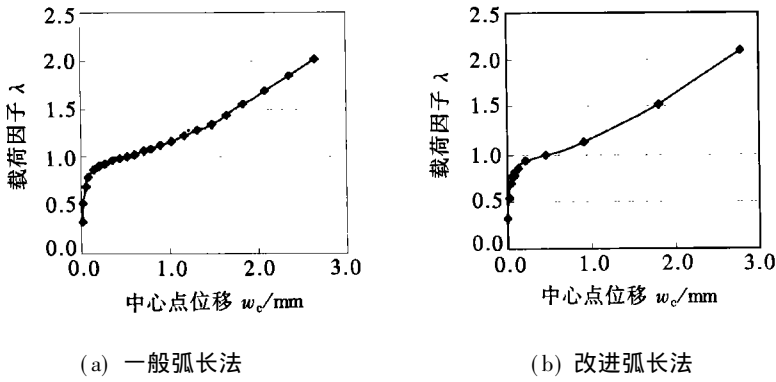


图3 无指定载荷值下的后屈曲路径

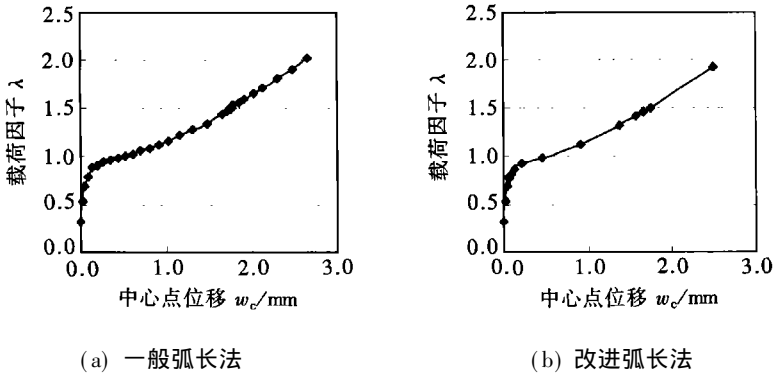


图4 有指定载荷值下的后屈曲路径

例2 如图5所示复合材料层合柱块壳,中心点受集中力 $\cdot$ 直边简支,曲边自由,其几何尺寸为:  $R = 2540\text{ mm}$ ,  $L = 254\text{ mm}$ ,  $\theta = 0.1\text{ rad}$ ; 单层材料性质为:  $E_1 = 3.3\text{ kN/mm}^2$ ,  $E_2 = 1.1\text{ kN/mm}^2$ ,  $G_{12} = 0.66\text{ kN/mm}^2$ ,  $G_{13} = 0.44\text{ kN/mm}^2$ ,  $\nu = 0.25$ 。铺层为 $[0/90/0]$ 正交铺设,指定收敛载荷因子为 $0.17$ 。由对称性,取 $1/4$ 壳体按 $8 \times 8$ 网格进行计算,载荷\_中心点位移曲线如图6所示,可见改进后的弧长法对柱块壳较复杂的后屈曲路径同样适用。

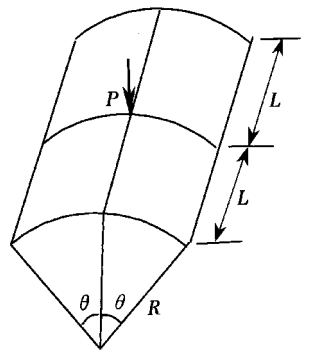
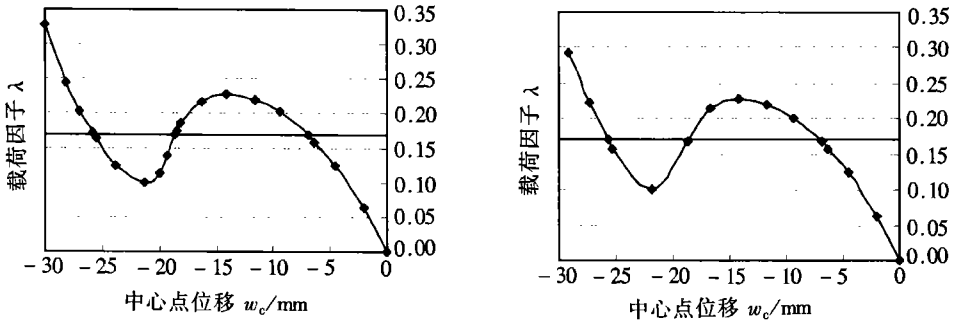


图5 复合材料层合柱块壳

表2 例2 计算效率的比较

	有指定载荷后屈曲路径	
	线性近似	二次近似
无指定载荷后屈曲路径		
一般弧长法	12/3.7/44	20/3.2/64
改进弧长法	11/3.1/34	20/3.1/62

注:表中数据“ $\cdot/\cdot/\cdot$ ”表示“总增量步数/平均迭代次数/总迭代次数”



(a) 一般弧长法

(b) 改进弧长法

图 6 指定载荷值 0.17 的后屈曲路径(线性近似)

## 5 结 论

1. 与 Crisfield 的弧长法相比, 本文提出的弧长法具有两点改进: a) 求解能收敛到预定的载荷值; b) 大大地提高了求解非线性方程组的效率。

2. 本文改进的弧长法中采用了加权修正弧长和外推修正弧长的策略, 前者主要起到合理调整增量步的作用, 后者可加速一个增量步中的迭代收敛。从表 1、表 2 中两算例计算效率的比较可以看出, 对如例 1 受轴压的平板, 其非线性性质比较简单的问题, 本文的高效弧长法较一般弧长法计算效率可提高一倍以上; 而对如例 2 受集中力的柱块壳, 其非线性性质比较复杂的问题, 则计算效率也能提高百分之二十到百分之三十。

3. 本方法不仅可以加速收敛, 而且计算比较简便。首先, 开始迭代时不必将弧长  $l$  转换为载荷增量因子  $\Delta \lambda$ , 从而也避免了确定符号的麻烦; 其次, 切线刚度矩阵可利用预测得到的位移值直接计算, 而不是利用前一增量步最后平衡点处的位移进行计算。更重要的是本文方法能自动确定比例加载的步长, 因为预测点的  $\{G\}_i^0$  值中包含了载荷增量因子。

### [参 考 文 献]

- [1] Crisfield M A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap\_through" [J]. Computers & Structures, 1981, 13(1\_3): 55—62.
- [2] Crisfield M A. An arc\_length method including line searches and accelerations [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, 19(8): 1269—1289.
- [3] Teng J G, Rotter J M. Elastic\_plastic large deflection analysis of axisymmetric shells [J]. Computers & Structures, 1989, 31(2): 211—233.
- [4] Murray J Clarke, Hancock Gregory J. A study of incremental\_iterative strategies for non\_linear analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 29(7): 1365—1391.
- [5] Carrear E. A study on arc\_length\_type methods and their operation failures illustrated by a simple model [J]. Computers & Structures, 1994, 50(2): 217—229.
- [6] Teng J G, Luo Y F. A user\_controlled arc\_length method for convergence to predefined deformation states [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1998, 14(1): 51—58.

# An Improved Arc Length Method and Application in the Post Buckling Analysis for Composite Structures

ZHU Ju\_fen, CHU Xiao\_ting

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of  
Technology, Dalian 116023, P R China)

**Abstract:** Based on the conventional arc\_length method, an improved arc\_length method with high efficiency is proposed. The weighted modifications with respect to the variation of structural stiffness and extra\_interpolation modification by using the information of known equilibrium points are introduced to improve the incremental arc\_length. An approximate expansion method for the accumulated and expected arc\_length is used to ensure the convergence at given load levels in large range of applications. Numerical results show that the improved arc\_length method has well adaptability and higher efficiency in the post\_buckling analysis of plates and shells structures for tracing whole load\_deflection path and obtaining the convergence values at any specified load levels.

**Key words:** non\_linear; finite element analysis; arc\_length method