文章编号: 1000_0887(2002 09_0982_05

二阶非完整力学系统的 Lie 对称性与守恒量*

方建会

(石油大学 应用物理系, 山东东营 257061

(黄小清推荐

摘要: 研究二阶非完整力学系统的 Lie 对称与守恒量• 首先利用系统运动微分方程在无限小变换下的不变性建立 Lie 对称的确定方程和限制方程, 得到 Lie 对称的结构方程和守恒量; 其次研究上述问题的逆问题; 最后举例说明结果的应用•

关 键 词: 二阶非完整系统; Lie 对称; 守恒量
中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统对称性与守恒量的研究是数学、力学、物理学等领域的重要课题• 力学系统对称性与守恒量的近代理论包括 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论• 对完整系统、一阶非完整系统 Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论的研究已取得了一系列成果[1~9]• 文献[10, 11]研究了二阶非完整系统的 Noether 对称性理论• 本文研究二阶非完整系统的 Lie 对称性理论• 首先研究二阶非完整系统 Lie 对称性正问题, 然后研究其 Lie 对称的逆问题, 最后举例说明结果的应用•

1 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, 2, \cdots, n)$ 确定, 系统的运动受到 g 个理想的二阶非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g)• \tag{1}$$

根据二阶 ¶Ä_¶ 定义, 约束(1 加在变分 $\delta \ddot q_s$ 上的条件为[12]

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \ddot q_s} \delta \ddot q_s = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g)• \tag{2}$$

系统的运动微分方程为[12]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \ddot q_s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

其中 λ_β 为不定乘子, 方程(3) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s' + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \ddot q_s}, \tag{4}$$

* 收稿日期: 2000_11_26; 修订日期: 2002_01_31
作者简介: 方建会(1957— ,男, 教授(fangjh@hdpu.edu.cn .

其中 L 为 Lagrange 函数, Q_s' 为非势广义力·

在运动微分方程积分之前, 由约束方程(1) 和运动方程(4) 可求出 λ_β 为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数, 于是方程(4) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s'+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

其中 $$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \ddot{q}_s}· \tag{6}$$

假设系统是非奇异的, 则由方程(5) 可解出所有的广义加速度, 记为

$$\ddot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,2,\cdots,n)· \tag{7}$$

称方程(7) 为与非完整系统(1)、(4) 相应的完整系统的运动微分方程· 如果运动条件满足约束方程(1), 则(7) 的解便给出二阶非完整系统的运动·

2 Lie 对称正问题

2.1 Lie 对称及其确定方程

取无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,\ q_s^*=q_s+\Delta q_s· \tag{8}$$

在一级近似下, 其展开式为

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad q_s^*=q_s+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{9}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元· 取无限小变换生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{10}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}· \tag{11}$$

二次扩展

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\sum_{s=1}^{n}(\ddot{\xi}_s-2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}· \tag{12}$$

根据微分方程不变性的判据, 在变换(9) 下运动微分方程(7) 的不变性由下式表示

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s-g_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0· \tag{13}$$

展开式(13) 可得到如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0 g_s=X^{(1)}(g_s)· \tag{14}$$

非完整约束(1) 在变换(9) 下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(2)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}))=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g)· \tag{15}$$

定义 1 如果无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程(14) 和(15), 则称变换为二阶非完整系统的 Lie 对称变换·

定义 2 如果无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(14), 则称变换为相应完整系统的 Lie 对称变换·

2.2 结构方程和守恒量

定理 对满足确定方程(14) 和限制方程(15) 的无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在满足方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(Q_s' + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{16}$$

的函数 $G = G(t, q, \dot{q})$, 则二阶非完整系统存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const}. \tag{17}$$

证明

$$\frac{dI}{dt} = \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \dot{G}$$

将式(16) 代入上式, 整理得

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s' - \Lambda_s\right] = 0.$$

称方程(16) 为 Lie 对称的结构方程, 称函数 $G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为规范函数.

3 Lie 对称逆问题

设系统存在积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const}, \tag{18}$$

则

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0. \tag{19}$$

将方程(4) 两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{20}$$

并对 s 求和, 得

$$\sum_{s=1}^{n}\bar{\xi}_s\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s' - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \ddot{q}_s}\right] = 0. \tag{21}$$

将式(19)、(21) 合并, 分出含 $\ddot{q}_k$ 的项, 其系数应为零, 则有

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0. \tag{22}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_s = \sum_{k=1}^{n}\omega_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{23}$$

其中

$$\omega_{sk}\omega_{kr} = \delta_{sr}, \qquad \omega_{kr} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_r}. \tag{24}$$

令积分(18) 等于守恒量(17) 得

$$L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G = I. \tag{25}$$

这样, 由式(23)、(25) 在给定规范函数 G 下可求出无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s, 如果 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(14) 和限制方程(15), 则变换是二阶非完整系统的 Lie 对称变换. 如果 ξ_0、ξ_s 仅满足确定方程(14), 则变换是相应完整系统的 Lie 对称变换.

4 算 例

二阶非完整系统的 Lagrange 函数为

$$L = (\dot q_1^2 + \dot q_2^2)/2 - q_2, \tag{26}$$

非完整约束为

$$f = \ddot q_2 - t\ddot q_1 = 0. \tag{27}$$

非势力不存在, 试研究系统的 Lie 对称与守恒量.

首先, 研究正问题. 利用方程(5 可求得

$$\ddot q_1 = -\lambda t, \quad \ddot q_2 = \lambda - 1. \tag{28}$$

将式(28 代入式(27 解得

$$\lambda = 1/(1 + t^2). \tag{29}$$

于是有 $$\ddot q_1 = g_1 = -\frac{t}{1+t^2}, \quad \ddot q_2 = g_2 = -\frac{t^2}{1+t^2}. \tag{30}$$

确定方程(14 给出

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - \dot q_1\xi_0 - 2\dot\xi_0\left(-\frac{t}{1+t^2}\right) = -\xi_0\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \\ &\xi_2 - \dot q_2\xi_2 - 2\dot\xi_0\left(-\frac{t^2}{1+t^2}\right) = -\xi_0\frac{2t}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

限制方程(15 给出

$$X^{(2)}(\ddot q_2 - t\ddot q_1) = -\xi_0\ddot q_1 + (\xi_1 - 2\ddot q_1\dot\xi_0 - \dot q_1\xi_0)(-t) + \\ \xi_2 - 2\ddot q_2\dot\xi_0 - \dot q_2\xi_0 = 0. \tag{32}$$

由式(31 、(32 可求得如下解

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0, \tag{33}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \tag{34}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \tag{35}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = t, \tag{36}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = t, \quad \xi_2 = 1. \tag{37}$$

对于生成元(33 , 由结构方程(16 可得到

$$-\frac{t}{1+t^2} + \dot G = 0.$$

于是得规范函数

$$G = 2^{-1}\ln(1 + t^2). \tag{38}$$

由式(17 给出守恒量

$$I = \dot q_1 + 2^{-1}\ln(1 + t^2) = \text{const}. \tag{39}$$

对于生成元(34 、(35 、(36 、(37 也都能找到相应的规范函数, 得到相应的 Lie 对称守恒量, 这里不再一一给出.

其次, 研究逆问题. 设系统有积分(39 , 求相应的 Lie 对称, 式(23 , (25 给出

$$\xi = 1, \quad \xi_2 = 0, \tag{40}$$

$$L\xi_0 + \xi_1\dot q_1 + G = \dot q_1 + 2^{-1}\ln(1 + t^2). \tag{41}$$

由此可解得

$$\xi_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - G\right], \quad \xi_1 = 1 + \dot q_1\xi_0, \quad \xi_2 = \dot q_2\xi_0. \tag{42}$$

将式(42 代入确定方程(14 和限制方程(15 验证, 可知它们满足. 因此, 对任取的规范函数 G, 生成元(42) 对应 Lie 对称变换. 特别是取规范函数为 $G = 2^{-1}\ln(1 + t^2)$ 时, 有

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 0. \tag{43}$$

[参 考 文 献]

[1] 刘端. 非完整非保守力学系统的Noether定理及其逆定理[J]. 中国科学, A辑, 1990, **20**(11): 1189—1197.

[2] LIU Duan. Noether' s theorem and its inverse of nonholonomic nonconservative dynamical systems [J]. Science in China, Series A, 1990, **34**(2): 419—429.

[3] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与守恒量[J]. 力学进展, 1993, **23**(3): 360—372.

[4] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phy A, Math Gen, 1979, **12**(7): 973—981.

[5] 赵跃宇. 非保守力学系统的Lie对称和守恒量[J]. 力学学报, 1994, **26**(3): 380—384.

[6] WU Run_heng, MEI Feng_xiang. On the Lie symmetries of the nonholonomic mechanical systems [J]. J of BIT, 1997, **6**(3): 229—235.

[7] 梅凤翔, 吴润衡, 张永发. 非 ¶Ä±P 型非完整系统的Lie对称性与守恒量[J]. 力学学报, 1998, **30**(4: 468—474.

[8] 梅凤翔. 变质量完整力学系统的Lie对称与守恒量[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(6: 592—596.

[9] 刘荣万, 傅景礼. 非完整非保守力学系统在相空间的Lie对称性与守恒量. 应用数学和力学, 1999, **20**(6: 597—601.

[10] 梅凤翔. 利用Jourdain原理研究二阶非完整系统的守恒律[J]. 北京理工大学学报, 1998, **18**(1: 17—21.

[11] 方建会. 二阶非 ¶Ä±P 型非完整系统的守恒律[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(7: 755—758.

[12] 梅凤翔. 非完整动力学研究[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1987, 50—51.

Lie Symmetries and Conserved Quantities of Second_Order Nonholonomic Mechanical System

FANG Jian_hui

(Department of Applied Physics, University of Petroleum. Dongying, Shandong 257061, P R China

Abstract: The Lie symmetries and the conserved quantities of the second_order nonholonomic mechanical system are studied. Firstly, by using the invariance of the differential equation of motion under the infinitesimal transformations, the determining equations and the restriction equations of the Lie symmetries of the system are established, and the structure equation and the conservative quantities of the Lie symmetries are obtained. Secondly, the inverse problems of the Lie symmetries are studied. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Key words: second_order nonholonomic system; Lie symmetry; conserved quantity