应用数学和力学, 第 23 卷 第 8 期(2002 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 08_0771_07

对带有微结构的弹性固体理论的再研究*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊编委戴天民来稿)

摘要: 对现有的带有微结构的弹性固体理论进行了再研究, 并指出由于引进许多记号而使诸基本方程的推导过程复杂化的原因• 针对该理论中存在的问题, 提出更为普遍的功率能率原理, 并借助此原理和广义 Piola 定理即可自然地推导出局部和非局部理论的运动方程、能率和能量的均衡方程、本构方程和边界条件• 这些基本方程和边界条件连同初始条件一起即可用来解决带有微结构的弹性固体动力学理论的混合问题•

关 键 词: 弹性固体; 微结构; 功率能率原理; 混合问题

中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

至今已发表大量有关变形不只由向量位移场, 而且还由其它的向量场或张量场来描述的广义连续统理论方面的文献• 在 E. 和 F. Cosserat 的名著[1] 中建立起每一个物质点具有 6 个刚体自由体的连续介质力学• 这类介质的给定点的指向由 J. Ericksen 和 C. Truesdell[2] 称之为方向子的三个互相垂直的单位向量值加以表述•

在文献[3] 中, R. D. Mindlin 于 1964 年提出带有微结构的弹性固体理论• 该理论的每一个物质点本身是一个可变形介质的弹性固体作为研究对象• 同年, A. C. Eringen 和 E. S. Suhubi[4] 建立了非线性微弹性固体理论, A. E. Green 和 R. S. Rivlin[5] 建立了多极连续统力学理论•

Green 和 Rivlin 曾经研究过有关多极连续统力学理论与其它理论之间的联系• 由 Mindlin 建立的微结构理论基本上与 Green 和 Rivlin 的双极理论一致• 在线性情况下, 简单微弹性固体理论[4] 和双极弹性连续统理论[5] 与 Mindlin 的带有微结构的弹性固体理论一致• M. Ciarletta 和 D. Iesan[6] 给出带有微结构的弹性固体理论的初边值问题的若干结果•

最近, 我们已对现有的微极和微态连续统理论进行了再研究, 并已提出了相应理论的新的能率和能量均衡方程和 C_D 不等式, 请参阅文献[7, 8]•

本文的目的是要对由 Ciarletta 和 Iesan 在专著[6] 中阐述的带有微结构的弹性固体理论进行再研究, 提出更为普遍的功率和能率原理, 并借助于该原理和广义 Piola 定理推导出这类理

* 收稿日期: 2001_03_13; 修订日期: 2002_04_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024) ;国家自然科学基金委员会(1001130235) 和德意志研究联合会(51520001) 资助的国际合作项目; 辽宁省教育委员会 A 类科研项目(990111001)

作者简介: 戴天民(1931—) , 男, 满族, 教授, 博士, 博士导师, 已发表专著译著 12 部和论文 50 余篇.

论的基本方程和边界条件• 这些基本方程和边界条件连同初始条件一起即可用来求解带有微结构的弹性固体动力学理论的混合问题•

为简单起见,我们假定质量和微惯性守恒定律成立,并略去质量和微惯性的非局部剩余•为比较起见,除另作说明外,本文采用专著[6]中的记法•

1 摘录和评注

Ciarletta 和 Iesan 曾在专著[6]中系统地阐述了由 Mindlin, Green 和 Rivlin 及 Eringen 和 Suhubi 建立的带有微结构的弹性固体理论,并给出有关这类理论的初边值问题的若干结果• 为比较方便起见,我们现摘录[6]中部分结果,并对这类理论给出评注•

1.1 摘录

下面摘录在专著[6]中阐述的由 Mindlin, Green 和 Rivlin 及 Eringen 和 Suhubi 建立的带有微结构的弹性固体理论的推导过程和主要结果•

这类弹性固体的每一个物质点具有 12 个自由度,因此变形需由

$$x_i = x_i(\boldsymbol{X}, t), \quad \chi_{iA} = \chi_{iA}(\boldsymbol{X}, t) \qquad (\boldsymbol{X}, t) \in B \times I \tag{1}$$

加以描述,其中变量 χ_{iA} 被 Mindlin 称为微变形,而 Green 和 Rivlin 及 Eringen 和 Suhubi 则分别称之为双极位移及微位移•

速度和双极速度则定义为

$$v_i = \dot{x}_i, \qquad \nu_{iK} = \dot{\chi}_{iK}• \tag{2}$$

应用 Green 和 Rivlin 的方法,在附加刚性运动的不变性要求下,从下列对 B 上每一部分 P 和每一时刻都适用的能率均衡定律

$$\int_P \rho_0(v_i \dot{v}_i + J_{KL} \nu_{iK} \dot{\nu}_{iL} + \dot{e}) \mathrm{d}V = \int_P \rho_0(f_i v_i + F_{iK} \nu_{iK}) \mathrm{d}V + \int_{\partial P} (T_i v_i + P_{iK} \nu_{iK}) \mathrm{d}A \tag{3}$$

推导带有微结构的弹性固体理论的基本方程• 这里 f_i, F_{iK}, T_i, P_{iK} 和 $J_{KL}(= J_{LK})$ 分别为体力,双极体力,面力,双极面力和惯性系数•

由式(3)可写出

$$\int_P \Big\{ [\rho_0(\dot{v}_i - f_i) - T_{Ki,K}] v_i + [\rho_0(J_{KL} \dot{\nu}_{iL} - F_{iK}) - S_{LiK,L}] \nu_{iK} + [\rho_0 \dot{e} - T_{Ki} \nu_{iK} - S_{LiK} \nu_{iK,L}] \Big\} \mathrm{d}V = 0, \tag{4}$$

这里用到关系式

$$T_i = T_{Ai} N_A, \tag{5}$$

$$P_{iK} = S_{LiK} N_L• \tag{6}$$

此处 T_{Ai} 和 S_{LiK} 分别为应力张量和双极应力张量•

对于一个给定的运动,速度 v_i 和双极速度 ν_{iK} 可以任意选定,故从式(4)得到

1) 动量方程

$$\rho_0(\ddot{x}_i - f_i) - T_{Ki,K} = 0; \tag{7}$$

2) 动量矩方程

$$\rho_0(J_{KL} \ddot{\chi}_{iL} - F_{iK}) - S_{LiK,L} = - S_{iK}; \tag{8}$$

3) 能率均衡方程

$$\rho_0 \dot{e} = S_{iK} \dot{\chi}_{iK} + T_{Ki} \dot{x}_{i,K} + S_{LiK} \dot{\chi}_{iK,L}• \tag{9}$$

取能量均衡方程

$$\rho_0 e = U = S_{iK}\chi_{iK} + T_{Ki}x_{i,K} + S_{LiK}\chi_{iK,L}, \tag{10}$$

则本构方程可写成下列形式

$$T_{Ki} = \partial U/\partial x_{i,K},\ S_{iK} = \partial U/\partial \chi_{iK},\ S_{LiK} = \partial U/\partial \chi_{iK,L}. \tag{11}$$

初始条件为

$$x_i(\boldsymbol{X},0) = \alpha_i(\boldsymbol{X}),\ \dot{x}_i(\boldsymbol{X},0) = \beta_i(\boldsymbol{X}), \tag{12}$$

$$\chi_{iA}(\boldsymbol{X},0) = \zeta_{iA}(\boldsymbol{X}),\ \dot{\chi}_{iA}(\boldsymbol{X},0) = \xi_{iA}(\boldsymbol{X}). \tag{13}$$

边界条件为

$$x_i = x_i,\ \chi_{iA} = \chi_{iA}; \tag{14}$$

$$T_{Ki}N_K = T_i,\ S_{LiK}N_L = P_{iK}. \tag{15}$$

这里 α_i, β_i, ζ_{iA}, ξ_{iA} 和x_i, χ_{iA}, T_i, P_{iK} 均系事先给定的函数和值.

带有微结构的弹性固体动力学理论的混合问题在于寻求函数 x_i 和 χ_{iA} 使之满足基本方程及边界条件和初始条件.

专著[6]还研究了具有初始应力的弹性固体的线性理论, 带有微结构的弹性固体的经典理论和 Cosserat 连续统理论.

1.2 评注

评注 1 在专著[6]中, 为了能从非耦合的能率均衡定律(3)导出基本方程, 就必须引进包括几何关系和动量矩方程在内的许多记号和采取在附加刚体运动下的不变性要求.

事实上, 对一给定的变形速度 v_i 和双极速度 $\nu_{iA}(=-\nu_{Ai})$ 是可以任意选取的, 因此, 从式(4)我们只能得到下列基本方程:

$$\rho_0(\ddot{x}_i - f_i) - T_{Ki,K} = 0, \tag{16}$$

$$\rho_0(J_{KL}\ddot{\chi}_{iL} - F_{iK}) - S_{LiK,L} = -A_{iK}, \tag{17}$$

$$\rho_0\dot{e} = T_{Ki}\dot{x}_{i,K} + S_{LiK}\dot{\chi}_{iK,L}, \tag{18}$$

这里 A_{iK} 应是一个 2 阶对称张量, 并可像 Eringen[9] 对微态连续统那样称之为平均应力张量. 需要指出的是 A_{iK} 与 S_{iK} 并不相同, 前者是一个对称张量, 而后者是一个反称张量. 在专著[6]中由于引进了记号 S_{iK} 而使能率均衡方程变成为式(9). 这种作法, 在力学中是不自然的. 由此可见, 在专著[6]中提出的能率均衡定律应该说是不完整的.

评注 2 显然, 由式(3)不可能直接得到带有微结构的弹性固体非局部理论的完整的基本方程.

评注 3 这里我们将像在[10]中对极性连续统理论那样把基本方程分为 3 种型式, 并按利用带有微结构的弹性固体理论的应力和双极应力形式称为 Cauchy 型的、Piola 型的和 Kirchhoff 型的基本方程. 因此在专著[6]中的有关带有微结构的弹性固体理论的结果是 Piola 型的, 而且是势能型的.

微结构理论把 Cosserat 连续统理论作为一种特殊情形包括在内. 然而在专著[6]中却又重头开始推导 3 种型式的 Cosserat 连续统的基本方程. 实际上, 这些方程完全可以通过从一般的微结构理论向特殊的 Cosserat 连续统过渡的办法直接给出.

2 带有微结构的弹性固体动力学理论

2.1 更为普遍的功率能率原理

设 δv_i 和 $\delta \nu_{iA}$ 以及 δT_i 和 δP_{iK} 分别为虚速度和虚双极速度以及虚面力和虚双极面力· 现分别公设虚速度和虚双极速度原理以及虚应力和虚双极应力原理如下:

$$\int_P \delta(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{P}} \mathrm{d}V = \int_P \rho_0 (f_i - \dot{v}_i) \delta v_i \mathrm{d}V + \int_{\partial P_F} T_i \delta v_i \mathrm{d}A + \int_P \rho_0 [(F_{iK} - J_{KL} \dot{\nu}_{iL}) + X_K (f_i - \dot{v}_i)] \delta v_{iK} \mathrm{d}V + \int_{\partial P_F} (P_{iK} + X_K T_i) \delta \nu_{iK} \mathrm{d}A \tag{19}$$

以及

$$\int_P \delta(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{C}} \mathrm{d}V = \int_P v_i \rho_0 \delta(f_i - \dot{v}_i) \mathrm{d}V + \int_{\partial P_D} v_i \delta T_i \mathrm{d}A + \int_P \nu_{iK} [\rho_0 [(F_{iK} - J_{KL} \dot{\nu}_{iL}) + X_K (f_i - \dot{v}_i)]] \mathrm{d}V + \int_{\partial P_D} \nu_{iK} \delta(P_{iK} + X_K T_i) \mathrm{d}A \cdot \tag{20}$$

这里 $(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{P}}$ 和 $(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{C}}$ 表示势能率和余能率, 而 v_i 和 ν_{iK} 以及 T_i 和 P_{iK} 则分别为在 ∂P_D 上给定的速度和双极速度以及在 ∂P_F 上给定的面力和双极面力·

把式(19)和式(20)组合起来,则可得到带有微结构的弹性固体理论的更为普遍的功率能率原理:

$$\int_P \rho_0 \dot{e} \mathrm{d}V = \int_P \rho_0 \left\{ (f_i - \dot{v}_i) v_i + [(F_{iK} - J_{KL} \dot{\nu}_{iL}) + X_K (f_i - \dot{v}_i)] \nu_{iK} \right\} \mathrm{d}V + \int_{\partial P} [T_i v_i + (P_{iK} + X_K T_i) \nu_{iK}] \mathrm{d}A \cdot \tag{21}$$

我们在上面建立的功率能率原理与专著[6]中提出的能率均衡定律不同之处,在于前者考虑了由于惯性力引起的惯性力矩和由于面力引起的面矩以及由于体力引起的体矩所产生的附加功率· 显然,如果略去式(21)中的耦合项即得式(3)·

2.2 基本方程

我们现从更为普遍的功率能率原理(21)出发推导运动方程及能率和能量均衡方程·

考虑到

$$\int_{\partial P} T_i v_i \mathrm{d}A = \int_{\partial P} N_A (T_{Ai} v_i) \mathrm{d}A = \int_P (T_{Ai} v_i)_{,A} \mathrm{d}V = \int_P (T_{Ai,A} v_i + T_{Ai} v_{i,A}) \mathrm{d}V, \tag{22}$$

$$\int_{\partial P} P_{iK} \nu_{iK} \mathrm{d}A = \int_{\partial P} N_L (S_{LiK} \nu_{iK}) \mathrm{d}A = \int_P (S_{LiK} \nu_{iK})_{,L} \mathrm{d}V = \int_P (S_{LiK,L} \nu_{iK} + S_{LiK} \nu_{iK,L}) \mathrm{d}V, \tag{23}$$

$$\int_{\partial P} T_i X_K \nu_{iK} \mathrm{d}A = \int_{\partial P} N_A (T_{Ai} X_K \nu_{iK}) \mathrm{d}A = \int_P (T_{Ai} X_K \nu_{iK})_{,A} \mathrm{d}V = \int_P (T_{Ai,A} X_K \nu_{iK} + T_{Ki} \nu_{iK} + T_{Ai} X_K \nu_{iK,A}) \mathrm{d}V, \tag{24}$$

并把它们代入式(21),则有

$$\int_P \Big\{ (\rho_0 \dot{v}_i - T_{Ai,A} - \rho_0 f_i) v_i + [X_K (\rho_0 \dot{v}_i - T_{Ai,A} - \rho_0 f_i) + (\rho_0 J_{KL} \dot{\nu}_{iL} - S_{LiK} - T_{Ki} - \rho_0 F_{iK})] \nu_{iK} \Big\} \mathrm{d}V +$$

$$\int_P [\rho_0 \dot{e} - T_{Ai} v_{i,A} - (S_{LiK} + X_K T_{Li}) \nu_{iK,L}] \mathrm{d}V = 0. \tag{25}$$

因为对于一个给定的变形速度 v_i 和双极速度 ν_{iK} 是任意选定的, 又因 v_i 和 ν_{iK} 的系数式分别等价于动量方程和动量矩方程, 于是由式(25) 可自然地而且直接写出带有微结构的弹性固体局部理论的基本方程如下:

1) 运动方程

$$\rho_0 \dot{v}_i - T_{Ai,A} - \rho_0 f_i = 0, \tag{26}$$

$$\rho_0 J_{KL} \dot{\nu}_{iL} - S_{LiK,L} - T_{Ki} - \rho_0 F_{iK} = - A_{iK}; \tag{27}$$

2) 能率和能量均衡方程

$$\rho_0 \dot{e} = T_{Ai} v_{i,A} + (S_{LiK} + X_K T_{Li}) \nu_{iK,L}, \tag{28}$$

$$\rho_0 e = T_{Ai} x_{i,A} + (S_{LiK} + X_K T_{Li}) \chi_{iK,L}; \tag{29}$$

3) 本构方程

$$T_{Ki} = \partial(\rho_0 \dot{e}) / \partial \overset{*}{v}_{i,K}, \quad \overset{*}{v}_{i,K} = v_{i,K} + X_L \nu_{iL,K}, \tag{30}$$

$$S_{LiK} = \partial(\rho_0 \dot{e}) / \partial \nu_{iK,L}, \tag{31}$$

$$T_{Ki} = \partial(\rho_0 e) / \partial \overset{*}{x}_{i,K}, \quad \overset{*}{x}_{i,K} = x_{i,K} + x_L \chi_{iL,K}, \tag{32}$$

$$S_{LiK} = \partial(\rho_0 e) / \partial \chi_{iK,L}. \tag{33}$$

这里 A_{iK} 是一个 2 阶对称张量, 相当于 Eringen[9] 在研究微态连续统理论时所谓的应力平均张量. 由此可知, Ciarletta 和 Iesan 所提出的记号 S_{iK} 的物理意义相当于一个 2 阶反称张量, 即

$$S_{Ki} = T_{Ki} - A_{Ki}. \tag{34}$$

这样理解后, 专著[6] 给出的运动方程[即式(7) 和式(8)] 与本文的式(26) 和式(27) 一致, 但能率和能量方程[即式(9) 和式(10)] 却与本文的式(28) 之间存在着本质的差异.

2.3 边界条件

考虑到

$$\delta(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{P}} = T_{Ki} \delta v_{i,K} + \overset{*}{S}_{LiK} \delta \nu_{iK,L}, \tag{35}$$

$$\delta(\rho_0 \dot{e})^{\mathrm{C}} = v_{i,K} \delta T_{Ki} + \nu_{iK,L} \delta \overset{*}{S}_{LiK}; \tag{36}$$

而且

$$\int_P T_{Ki} \delta v_{i,K} \mathrm{d}V = \int_{\partial P_F} N_K T_{Ki} \delta v_i \mathrm{d}A - \int_P T_{Ki,K} \delta v_i \mathrm{d}V, \tag{37}$$

$$\int_P \overset{*}{\boldsymbol{S}}_{LiK} \delta \nu_{iK,L} \mathrm{d}V = \int_{\partial P_F} N_L \overset{*}{S}_{LiK} \delta \nu_{iK} \mathrm{d}A - \int_P \overset{*}{S}_{LiK,L} \delta \nu_{iK} \mathrm{d}V, \tag{38}$$

$$\int_P v_{i,K} \delta T_{Ki} \mathrm{d}V = \int_{\partial P_D} v_i \delta(N_K T_{Ki}) \mathrm{d}A - \int_P v_i \delta T_{Ki,K} \mathrm{d}V, \tag{39}$$

$$\int_P \nu_{iK,L} \delta \overset{*}{S}_{LiK} \mathrm{d}V = \int_{\partial P_D} \nu_{iK} \delta(N_L \overset{*}{S}_{LiK}) \mathrm{d}A - \int_P \nu_{iK} \delta \overset{*}{S}_{LiK} \mathrm{d}V, \tag{40}$$

式中

$$\overset{*}{S}_{LiK} = S_{LiK} + X_K T_{Li}, \tag{41}$$

则由虚速度和虚双极速度原理(19) 和虚应力和虚双极应力原理(20) 可分别导出

1) 面力和双极面力边界条件

$$T_{Ki} N_K = T_i, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{S}_{LiK} N_L = P_{iK}; \tag{43}$$

2) 速度和双极速度边界条件

$$v_i = v_i, \tag{44}$$

$$\nu_{iK} = \nu_{iK}\cdot \tag{45}$$

2.4 混合问题

前面给出的基本方程和边界条件, 再加上初始条件即可用来处理带有微结构的弹性固体动力学理论的混合问题•

2.5 非局部理论的基本方程

有关带有微结构的弹性固体非局部理论的基本方程可从功率能率原理(21)通过局部化并利用广义 Piola 定理自然地而且直接写出, 即

1) 运动方程

$$\rho_0 \dot{v}_i - T_{Ai,A} - \rho_0 f_i = \rho_0 \hat{f}_i, \tag{46}$$

$$\rho_0 J_{KL} \dot{\nu}_{iL} - S_{LiK,L} - (T_{Ki} - A_{Ki}) - \rho_0 F_{iK} = \rho_0 (\hat{F}_{iK} - X_K \hat{f}_i); \tag{47}$$

2) 能率和能量均衡方程

$$\rho_0 \dot{e} - T_{Ai} v_{i,A} - (S_{LiK} + X_K T_{Li}) \nu_{iK,L} = -\rho_0 [\hat{f}_i v_i + (\hat{F}_{iK} - X_K \hat{f}_i) \nu_{iK}], \tag{48}$$

$$\rho_0 e - T_{Ai} x_{i,A} - (S_{LiK} + X_K T_{Li}) \chi_{iK,L} = -\rho_0 [\hat{f}_i x_i + (\hat{F}_{iK} - X_K \hat{f}_i) \chi_{iK}], \tag{49}$$

式中 $\rho_0 \hat{f}_i$ 和 $\rho_0 \hat{F}_{iK}$ 分别为体力和双极体力的非局部剩余, 并应满足下列条件:

$$\int_P \rho_0 \hat{f}_i \mathrm{d}V = 0, \tag{50}$$

$$\int_P \rho_0 \hat{F}_{iK} \mathrm{d}V = 0\cdot \tag{51}$$

3 结 束 语

对于由 Ciarletta 和 Iesan 在专著[6]中阐述的带有微结构的弹性固体动力学理论进行了再研究• 提出了更为普遍的功率能率原理, 并借此原理和广义 Piola 定理自然地推导出了带有微结构的弹性固体的局部和非局部理论的运动方程、能率和能量均衡方程和所有边界条件•

本文与专著[6]之间在考虑问题的出发点, 推导过程, 能率和能量均衡方程都存在着本质的差异• 只有当由于惯性力、面力和体力分别引起的惯性力矩、面矩和体矩所产生的附加功率可以忽略时, 专著[6]中的结果才能成立•

从本文提出的 Piola 型的弹性固体微结构理论的结果可易于得到 Cauchy 型和 Kirchhoff 型的相应结果• 有关 Cosserat 连续统理论的 3 种型式, 可直接由微结构理论推出•

[参 考 文 献]

[1] Cosserat E, Cosserat F. Theorie des Corps Deformables[M]. Paris: Hermann, 1909.

[2] Ericksen J, Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells [J]. Arch Rational Mech Anal, 1958, **1**: 295—323.

[3] Mindlin R D. Microstructure in linear elasticity [J]. Arch Rational Mech Anal, 1964, **16**: 51—77.

[4] Eringen A C, Suhubi E S. Nonlinear theory of simple microelastic solids [J]. Int J Engng Sci, 1964, **2**: I. 198—203, II. 389—404.

[5] Green A E, Rivlin R S. Multipolar continuum mechanics [J]. Arch Rational Mech Anal, 1964, **17**: 113—147.

[6] Ciarletta M, Iesan D. Non_Classical Elastic Solids [M]. Boston, London, Melbourne: Longman Scientific & Technical, 1993.

[7] 戴天民. 带有微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C_D 不等式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(2): 119—126.
[8] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.
[9] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited [J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(6): 805—810.
[10] 戴天民. 三组非局部极性热力连续统的均衡方程和跳变条件[J]. 中国科学(A辑), 1997, **27**(12): 1106—1110.

Restudy of Theories for Elastic Solids With Microstructure

DAI Tian_min
(Department of Mathematics and Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: The dynamical theories of elastic solids with microstructure are restudied and the reason why so many notations have been introduced for derivation of basic equations for such theories is given. In view of the existing problems in those theories the rather general principle of power and energy rate is postulated and the equations of motion, the balance equations of energy rate and energy and the boundary conditions for local and nonlocal theories are naturally derived with help of that principle and the generalized Piola's theorem. These basic equations and the boundary conditions together with the initial conditions may be used to solve the mixed problems of the dynamical theory of elastic solids with microstructure.

Key words: elastic solid; microstructure; principle of power and energy rate; mixed problem