应用数学和力学,第 23 卷 第 8 期(2002 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 08_0837_06

Z_C_X 空间中的若干问题*

朱传喜[1,2]

(1. 西安交通大学 应用数学研究中心 信息与系统科学研究所, 西安 710049;
2. 南昌大学(南区) 数学所, 南昌 330029)

(张石生推荐)

摘要: 提出了 **Z_C_X** 空间以及优锥的新概念, 在 **Z_C_X** 空间中研究了随机半闭 1_集压缩算子的若干问题• 首先, 证明了一个重要的不等式• 其次, 利用随机拓扑度理论中的随机不动点指数证明了几个新的结论• 在仿平行四边形律之条件下得到了一类随机算子方程的随机解, 在偏序的 **Z_C_X** 空间中推广了著名的 Altman 定理• 因此, 得到了若干新的结果•

关 键 词: **Z_C_X** 空间; 可分的实 Banach 空间; 随机半闭 1_集压缩算子; 随机解; 随机连续算子
中图分类号: O211.5 文献标识码: A

引 言

本文是作者文献[1]的继续, 是研究随机算子方程随机解的主要内容之一•

全文假设 (E, B) 是一个可测空间, 其中 E 是一个可分的实 Banach 空间, B 表示由 E 中所有开集产生的 σ_代数• 又设 (Ω, U, γ) 表示一个完全的概率测度空间, γ 表示概率测度, 且 $\gamma(\Omega) = 1$, D 是 E 的有界开集, ∂D 表示 D 的边界•

一个随机连续算子 $A: \Omega \times D \to E$ 称为 $(E$ 值$)$ 随机半闭 1_集压缩算子, 如果对几乎所有固定的 $\omega \in \Omega$, $A(\omega, \cdot)$ 是半闭 1_集压缩算子•

本文主要研究形如 $A(\omega, x) = \mu x \ (\mu \geqslant 1)$, $\forall (\omega, x) \in \Omega \times D$ 这一类型的随机算子方程的随机解•

1 几个定义

定义 1 如果可分的实 Banach 空间 E 满足下列条件:

(H_1) E 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的代数, 即有:

$(1°)$ E 对乘法封闭, 即 $\forall x, y \in E$, 则 $x \cdot y \in E$;

$(2°)$ $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall x, y \in E$, $(ax)y = x(ay) = a(xy)$;

(H_2) E 没有幂零元, 即 $\forall x \in E$, $n \in \mathbf{N}$, 若 $x \neq \theta$, 则 $x^n \neq \theta$•

则称 E 为 **Z_C_X** 空间•

* 收稿日期: 2001_03_30; 修订日期: 2002_04_23
基金项目: 江西省自然科学基金资助项目(0011022)
作者简介: 朱传喜(1956—), 男, 江西永新人, 教授, 博士, 主任, 主要从事非线性分析方面的研究.

显然，由 E 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的代数可得：

(3°) $\forall a,\ \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x, y \in E,\ ax \cdot \lambda y = (a\lambda)(x \cdot y)$.

在 Z_C_X 空间中，记 $\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n个} = x^n$，其中 $x \in E$，n 为自然数，即 $n \in \mathbf{N}$.

定义 2　设 X 是 E 中的锥，如果满足下列条件：

(Ⅰ) $\forall x, y \in X$，由 $\theta < x < y \Rightarrow 0 < \|x\| < \|y\|$；

(Ⅱ) X 对乘法封闭，且 X 是 E 的子空间.

则 X 称为优锥.

本文假定在 E 中"$\leqslant$"是由优锥 X 导出的偏序.

由定义 2 同样可以得到：

$$\forall x, y \in X,\ 由\ \theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant \|x\| \leqslant \|y\|.$$

这是因为 $\theta = x = y$ 时，自然有：$\|x\| = \|y\| = 0$.

2 主要结果

引理 1　当 $t > 1$，$n > 2$ 且 $n \in \mathbf{N}$，则下列不等式成立：

$$(t+1)^n + (t-1)^n > 2(t^n + 1).$$

证明　令 $f(t) = (t+1)^n + (t-1)^n - 2(t^n + 1)$，其中 $n > 2$ 且 $n \in \mathbf{N}$，$t \geqslant 1$.

则

$$\begin{aligned} f'(t) = {} & n(t+1)^{n-1} + n(t-1)^{n-1} - 2nt^{n-1} = \\ & n[(t+1)^{n-1} + (t-1)^{n-1} - 2t^{n-1}] = \\ & n\Big[t^{n-1} + (n-1)t^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}t^{n-3} + \cdots + 1 + \\ & t^{n-1} - (n-1)t^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}t^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} - 2t^{n-1}\Big] = \\ & n\Big\{(n-1)(n-2)t^{n-3} + \cdots + [1 + (-1)^{n-1}]\Big\} > 0, \end{aligned}$$

所以 $f'(t) > 0$，因此 $f(t)$ 是在 $[1, +\infty)$ 内的严格单调递增函数.　于是当 $t > 1$ 时，$f(t) > f(1)$.　而 $f(1) = 2^n - 4 > 0(n > 2)$，

即有

$$f(t) > f(1) > 0,\ 即 f(t) > 0,$$

即有

$$(t+1)^n + (t-1)^n - 2(t^n + 1) > 0,$$

即有

$$(t+1)^n + (t-1)^n > 2(t^n + 1).$$

故不等式得证.

定理 1　设 E 是一个 Z_C_X 空间，X 是 E 中的优锥，D 是 X 中有界开子集，且 $\theta \in D$，假设 $A: \Omega \times D \to X$ 是随机半闭 1_集压缩算子，并且 $A(\omega, x) \neq \mu x$，$\forall \omega \in \Omega$，$\forall x \in \partial D$，$\mu \geqslant 1$.

同时使得

(Z_1) $[A(\omega, x) + \mu x]^n + [A(\omega, x) - \mu x]^n \leqslant 2[(A(\omega, x))^n + (\mu x)^n]$，$\forall (\omega, x) \in \Omega \times D$，$\mu \geqslant 1$，$n > 2$，且 $n \in \mathbf{N}$.

则随机算子方程 $A(\omega, x) = \mu x (\mu \geqslant 1)$ 在 D 中必有随机解.

证明　由已知条件可知 $A(\omega, x) = \mu x$ 在 ∂D 上没有随机解。

令　$H_t(\omega, x) = \frac{t}{\mu}A(\omega, x)$,

其中 $t \in [0, 1]$, $\forall(\omega, x) \in \Omega \times D$, 则 $H_t: \Omega \times D \to X$ 是一个随机半闭 1_集压缩算子, 事实上, 我们有:

$$\alpha[H_t(\cdot, D)] = \alpha\left[\frac{t}{\mu}A(\cdot, D)\right] = t\alpha\left[\frac{1}{\mu}A(\cdot, D)\right] =$$

$$\frac{t}{\mu}\alpha[A(\cdot, D)] \leqslant \frac{t}{\mu}\alpha(D) \leqslant \alpha(D),$$

其中 α 表示非紧性测度。

所以, $H_t: \Omega \times D \to X$ 是一个随机 1_集压缩算子。

因为

$$I - H_t = I - \left(\frac{t}{\mu}A\right) = I - \frac{t}{\mu}A + \frac{t}{\mu}I - \frac{t}{\mu}I =$$

$$\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)I + \frac{t}{\mu}(I - A) = (1 - \beta)I + \beta(I - A),$$

其中　$\beta = t/\mu$。

根据已知条件可知: $H_t: \Omega \times D \to X$ 是一个随机半闭算子。

综合上述可知: $H_t: \Omega \times D \to X$ 是随机半闭 1_集压缩算子。

下面我们证明:

$$x \neq H_t(\omega, x) \qquad \forall(\omega, x) \in \Omega \times \partial D,\ t \in [0, 1]. \tag{1}$$

事实上, 假设(1) 式不真, 即存在 $t_0 \in [0, 1]$, $\omega_0 \in \Omega$ 和 $x_0 \in \partial D$, 使得 $x_0 = H_{t_0}(\omega_0, x_0)$, 即:

$$x_0 = \frac{t_0}{\mu}A(\omega_0, x_0) \qquad (\text{其中 } \mu \geqslant 1), \tag{2}$$

则 $t_0 \neq 0$(否则 $t_0 = 0$, 我们有 $x_0 = \theta \in \partial D$, 矛盾于 $\theta \in D$), 且 $t_0 \neq 1$(否则 $t_0 = 1$, 我们有 $x_0 = A(\omega_0, x_0)/\mu$, 即 $A(\omega_0, x_0) = \mu x_0$ 与已知条件 $A(\omega, x) \neq \mu x$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in \partial D$, $\mu \geqslant 1$, 矛盾)。

所以 $t_0 \in (0, 1)$, 由(2) 式可得:

$$A(\omega_0, x_0) = \frac{\mu}{t_0}x_0.$$

把 $A(\omega_0, x_0) = \mu x_0/t_0$ 代入(Z_1) 式可得:

$$\left(\frac{\mu}{t_0}x_0 + \mu x_0\right)^n + \left(\frac{\mu}{t_0}x_0 - \mu x_0\right)^n \leqslant 2\left[\left(\frac{\mu}{t_0}x_0\right)^n + (\mu x_0)^n\right], \tag{3}$$

其中 $\omega_0 \in \Omega$, $x_0 \in \partial D$, $\mu \geqslant 1$, $t_0 \in (0, 1)$, $n > 2$, 且 $n \in \mathbf{N}$。

由(3) 式可得:

$$\left(\frac{1}{t_0} + 1\right)^n (\mu x_0)^n + \left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n (\mu x_0)^n \leqslant 2\left[\left(\frac{1}{t_0}\right)^n + 1\right](\mu x_0)^n.$$

由 X 是优锥, 根据定义 2 得到:

$$\left\|\left[\left(\frac{1}{t_0} + 1\right)^n (\mu x_0)^n + \left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n (\mu x_0)^n\right]\right\| \leqslant 2\left[\left(\frac{1}{t_0}\right)^n + 1\right] \|(\mu x_0)^n\|,$$

即

$$\left|\left(\frac{1}{t_0} + 1\right)^n + \left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n\right| \|(\mu x_0)^n\| \leqslant 2\left[\left(\frac{1}{t_0}\right)^n + 1\right] \|(\mu x_0)^n\|. \tag{4}$$

由于 $x_0 \neq \theta$, 所以 $\mu x_0 \neq \theta$, $(\mu \geqslant 1)$•

因为 E 是 **Z_C_**X 空间, 无幂零元素, 故 $(\mu x_0)^n \neq \theta$, 即 $\|(\mu x_0)^n\| \neq 0$, 由(4) 式可得:

$$\left|\left(\frac{1}{t_0}+1\right)^n+\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^n\right| \leqslant 2\left[\left(\frac{1}{t_0}\right)^n+1\right]• \tag{5}$$

由于 $\left(\frac{1}{t_0}+1\right)^n+\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^n > 0$,

由(5) 式可得:

$$\left(\frac{1}{t_0}+1\right)^n+\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^n \leqslant 2\left[\left(\frac{1}{t_0}\right)^n+1\right]• \tag{6}$$

令 $t = 1/t_0$, 由于 $t_0 \in (0, 1)$, 所以 $t > 1$, 由(6) 式得到:

$$(t+1)^n+(t-1)^n \leqslant 2(t^n+1)• \tag{7}$$

因此(7) 式与引理 1 矛盾•

于是

$$x \neq \mathrm{H}_t(\omega, x), \qquad t \in [0, 1], \ \forall \omega \in \Omega, \ \forall x \in D•$$

根据[2] 的同伦不变性可知:

$$i_R\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{A}(\omega, \cdot), D, E\right) = i_R(\theta, D, E) = 1,$$

又根据[2] 中的随机可解性可知:

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{A}(\omega, x) = x,$$

即 $\mathrm{A}(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有随机解•

当 E 只是可分的 Banach 空间时, 利用引理 1, 类似可证下列定理 2 成立•

定理 2 设 X 是可分实 Banach 空间 E 的闭凸子集, D 是 X 中有界开子集, 且 $\theta \in D$, 假设 $\mathrm{A}: \Omega \times D \to X$ 是随机半闭 1_集压缩算子, 使得下列条件满足:

(Z_2) $\|\mathrm{A}(\omega, x)+\mu x\|^n+\|\mathrm{A}(\omega, x)-\mu x\|^n \leqslant 2[\|\mathrm{A}(\omega, x)\|^n+\|\mu x\|^n]$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in \partial D$, $n > 2$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu \geqslant 1$•

(Z_3) $\mathrm{A}(\omega, x) \neq \mu x$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in \partial D$, $\mu \geqslant 1$, 则 $\mathrm{A}(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有随机解•

定理 3 设 E 是一个 **Z_C_**X 空间, X 是 E 中的优锥, D 是 X 中有界开子集, 且 $\theta \in D$• 同时, 假设 $\mathrm{A}: \Omega \times D \to X$ 是随机半闭 1_集压缩算子, 使得

(Z_4) $(\mathrm{A}(\omega, x)-\mu x)^n > (\mathrm{A}(\omega, x))^n-(\mu x)^n$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in \partial D$, $\mu \geqslant 1$, $n \geqslant 2$ 且 $n \in \mathbf{N}$, 则 $\mathrm{A}(\omega, x) = \mu x$ 在 D 中必有随机解•

证明 由条件(Z_4) 可知:

$$\mathrm{A}(\omega, x) = \mu x$$

在 ∂D 上没有随机解(否则, 由(Z_4) 可得: $\theta > \theta$, 矛盾•)•

令 $$\mathrm{H}_t(\omega, x) = \frac{t}{\mu}\mathrm{A}(\omega, x),$$

其中 $t \in [0, 1]$, $\forall (\omega, x) \in \Omega \times D$, 与定理 1 一样, 可证:

$$\mathrm{H}_t: \Omega \times D \to X$$

是一个随机半闭 1_集压缩算子•

下面我们证明:

$$x \neq \mathrm{H}_t(\omega, x) \qquad \forall (\omega, x) \in \Omega \times \partial D, \ t \in [0, 1]• \tag{8}$$

事实上, 假设(8) 式不真, 即存在 $t_0 \in [0, 1]$, $\omega_0 \in \Omega$, 和 $x_0 \in \partial D$, 使得:

$$x_0 = H_{t_0}(\omega_0, x_0),$$

即
$$x_0 = \frac{t_0}{\mu}A(\omega_0, x_0) \qquad (\text{其中 } \mu \geqslant 1), \tag{9}$$

则 $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq 1$(否则 $t_0 = 1$, 则有: $x_0 = A(\omega_0, x_0)/\mu$, 即 $A(\omega_0, x_0) = \mu x_0$. 代入($Z_4$) 式得: $\theta > \theta$, 矛盾), 所以 $t_0 \in (0, 1)$. 由(9) 式可得:

$$A(\omega_0, x_0) = \frac{\mu}{t_0}x_0.$$

把 $A(\omega_0, x_0) = \mu x_0/t_0$ 代入(Z_4) 式得:

$$\left(\frac{\mu}{t_0}x_0 - \mu x_0\right)^n > \left(\frac{\mu}{t_0}x_0\right)^n - (\mu x_0)^n.$$

因 X 是优锥, 故由

$$\left(\frac{\mu}{t_0}x_0 - \mu x_0\right)^n + (\mu x_0)^n > \left(\frac{\mu}{t_0}x_0\right)^n > \theta$$

得
$$\left\|\left(\frac{\mu}{t_0}x_0 - \mu x_0\right)^n + (\mu x_0)^n\right\| > \left\|\left(\frac{\mu}{t_0}x_0\right)^n\right\|,$$

即
$$\left\|\left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n (\mu x_0)^n + (\mu x_0)^n\right\| > \left(\frac{1}{t_0}\right)^n \|(\mu x_0)^n\|,$$

即
$$\left[\left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n + 1\right] \|(\mu x_0)^n\| > \left(\frac{1}{t_0}\right)^n \|(\mu x_0)^n\|.$$

由于 $x_0 \in X$, $\mu x_0 \in X$, X 无幂零元, 所以 $(\mu x_0)^n \neq \theta$, 故 $\|(\mu x_0)^n\| \neq 0$. 于是

$$\left(\frac{1}{t_0} - 1\right)^n + 1 > \left(\frac{1}{t_0}\right)^n. \tag{10}$$

因为 $t_0 \in (0, 1)$, 所以 $1/t_0 > 1$.

令 $t = 1/t_0 > 1$, 由(10) 式得:

$$(t - 1)^n + 1 > t^n,$$

即 $(t - 1)^n > t^n - 1$, 此不等式与[3] 中引理 2 矛盾. 因而 $x \neq H_t(\omega, x)$.

根据[2] 中同伦不变性与随机可解性可知:

$$i_R\left(\frac{1}{\mu}A(\omega, \cdot), D, X\right) = i_R(\theta, D, X) = 1,$$

即
$$\frac{1}{\mu}A(\omega, x) = x$$

有随机解, 即

$$A(\omega, x) = \mu x$$

在 D 中有随机解.

注 1　定理 1 的条件(Z_1) 称为仿平行四边形律之条件. 定理 3 是在偏序 **Z_C_**X 空间中推广 Altman 定理.

[参　考　文　献]

[1] 朱传喜. 随机半闭 1_集压缩算子的几个定理[J]. 数学学报, 1999, **42**(3): 501—504.

[2] 李国桢. 随机 1_集压缩算子的随机不动点指数和随机不动点定理[J]. 应用数学学报, 1996, **19**(2): 203—212.

[3] 朱传喜. 关于随机算子方程的随机解[J]. 数学进展, 1997, **26**(5): 429—434.

[4] 王梓坤. 随机泛函分析引论[J]. 数学进展, 1962, **5**(1): 45—71.

[5] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

[7] LI Guo_zhen. The fixed point index and the fixed point theorems of 1_set_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, **104**(4): 1163—1170.

[8] 朱传喜. 概率度量空间中若干新的不动点定理[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(2): 165—171.

[9] 朱传喜. X_M_PN 空间中的若干定理[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(2): 161—163.

[10] 朱传喜. 1_集压缩型随机算子方程的若干定理[J]. 数学进展, 1998, **27**(5): 464—468.

[11] Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces[J]. J Funct Anal, 1972, **11**(2): 346—384.

[12] LIU Li_shan. Some random approximations and random fixed point theorems for 1_set_contractive random operators[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**(2): 512—521.

Some Problems in the Z_C_*X* Space

ZHU Chuan_xi[1, 2]

(1. Research Center for Applied Mathematics and Institute of Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China;
2. Institute of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China)

Abstract: The new concepts of the **Z_C**_*X* space and excellent cone are introduced. Some problems of random semiclosed 1_set_contractive operator are investigated in the **Z_C**_*X* space. At first, an important inequality is proved. Secondly, several new conclusions are proved by means of random fixed point index in the theory of random topological degree. A random solution of a class of random operator equations under conditions of imitating the parallelogram law is obtained, famous Altman's theorem is generalized in partially ordered **Z_C**_*X* space. Therefore, some new results are obtained.

Key words: **Z_C**_*X* space; separable real Banach space; random semiclosed 1_set_contractive operator; random solution; random continuous operator