应用数学和力学, 第 23 卷 第 7 期(2002 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0689_08

Navier_Stokes 方程流函数形式两重网格算法的误差分析*

任春风, 马逸尘

(西安交通大学 理学院科学计算系, 西安 710049)

(戴世强推荐)

摘要: 对定常 Navier_Stokes 方程流函数形式两重网格有限元算法进行了误差分析• 此方法包括在粗网格上求解一个非线性问题, 在细网格上求解一个线性问题, 然后再在粗网格上求解一个线性校正问题• 分析了包括校正项和不包括校正项两种方法的误差, 得出对于任意固定的 Reynolds 数, 能达到最优逼近阶•

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 两重网格方法; 流函数
中图分类号: O357. 1; O241. 85 文献标识码: A

引 言

考虑二维定常 Navier_Stokes 方程流函数形式的两重网格算法, 用 Navier_Stokes 方程流函数形式, 不可压条件自动满足, 并且压力项不包含在弱形式中• 两重网格的技巧是在粗网格上求解一个较困难的问题(如, 非线性, 非对称正定的问题), 在细网格上求解一个较容易的问题(线性, 对称正定的问题)•

两重网格求解仅仅当网格尺寸 $h \ll H$ 时才具有重要意义, 因此提高 h 和 H 的比值, H 的阶数越高, 误差估计就越理想• 在[1] 中对于 Clough_Tocher 三角元(自由度为: 顶点的函数值及导数值, 三边中点的法向导数值) 不用 Backtracking 技巧得出的误差估计为

$$|\phi - \phi^h|_2 \leqslant c(h^2 + H^4)• \tag{1}$$

而在[2] 中用了 Backtracking 技巧得出的误差估计为

$$|\phi - \phi^*|_2 \leqslant c(h^2 + H^5)• \tag{2}$$

本文不用 Backtracking 技巧得出如下误差估计:

$$|\phi - \phi^*|_2 \leqslant c(h^2 + H^{5-\epsilon}), \tag{3}$$

其中 ϵ 为任意小的正常数•

本文用 Backtracking 技巧时, 只在细网格上求解一个相对[2] 中更容易的线性问题, 同样能得到误差估计(3)• 显然(3) 比(1) 好, 只比(2) 稍微差, 但是为了得到(2) 除了在细网格上求解一

---

* 收稿日期: 2001_01_15; 修订日期: 2001_11_28
基金项目: 国家自然科学基金资助(10001028)
作者简介: 任春风(1972—), 女, 河南人, 博士. (E_mail: chferen@sina.com);
马逸尘(1943—), 男, 河南人, 博导.

次外,还必须再在粗网格上求解一个线性非对称问题,这是本文与技巧[2]的区别之处·

考虑不可压定常 Navier_Stokes 方程

$$\begin{cases} -\lambda\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = f & (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \\ \nabla\cdot u = 0 & (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \\ u = 0 & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上}), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是有界集,且具有连续的 Lipschitz 边界条件,$\lambda = Re^{-1}$,Re 为 Reynolds 数,$u = (u^1, u^2)$ 为速度,p 为压力,f 为体力· 在(4) 的第一个式子两边取旋度,令 $\omega = \mathrm{rot}\,u = u_x^2 - u_y^1$ 得

$$-\lambda\Delta\omega + \omega\nabla\cdot u + u\cdot\nabla\omega = \mathrm{rot}f\cdot$$

由于 $\nabla\cdot u = 0$,则

$$-\lambda\Delta\omega + u\cdot\nabla\omega = \mathrm{rot}f\cdot \tag{5}$$

设 $\psi\in H^4(\Omega)$ 为流函数,则

$$u = \mathrm{rot}\,\psi = (\psi_y, -\psi_x), \tag{6}$$

$$\omega = \mathrm{rot}\,u = \mathrm{rotrot}\,\psi = -\Delta\psi\cdot \tag{7}$$

将(7)代入(5)得

$$-\lambda\Delta^2\psi + \mathrm{rot}\,\psi\cdot\nabla(\Delta\psi) = -\mathrm{rot}f\cdot$$

由(4)的第三个式子及(6)得

$$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial x}n_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}n_2 = (-u^2n_1 + u^1n_2)_{\partial\Omega} = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Ω 的外单位法向量,由流函数的物理意义设 $\psi|_{\partial\Omega} = 0$,这样(4) 可化为流函数形式:

$$\begin{cases} -\lambda\Delta^2\psi + \mathrm{rot}\,\psi\cdot\nabla(\Delta\psi) = -\mathrm{rot}f & (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = \psi = 0 & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上})\cdot \end{cases} \tag{8}$$

假定 $X = H_0^2(\Omega)$,$|\cdot|_s$ 为$H^s(\Omega)$ 中的半范,$\|\cdot\|_{0,p}$ 为$L^p(\Omega)$ 中的范数,当 $p = 2$ 时,简记为 $\|\cdot\|$,则(8) 的弱形式为,求 $\psi\in X$,使

$$\delta a_1(\psi, \Phi) + a(\psi, \Phi) + b(\psi, \psi, \Phi) = (f, \mathrm{rot}\,\Phi) \quad (\forall\Phi\in X), \tag{9}$$

其中

$$a(\psi, \Phi) = \lambda\int_\Omega(\psi_{xx}\Phi_{xx} + 2\psi_{xy}\Phi_{xy} + \psi_{yy}\Phi_{yy})\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$b(\psi, \eta, \Phi) = \int_\Omega\Delta\psi(\Phi_x\eta_y - \Phi_y\eta_x)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\forall\Phi\in H_0^1(\Omega)),$$

$$a_1(\psi, \Phi) = (\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\psi, \nabla\cdot\mathrm{rot}\,\Phi),$$

δ 由引理 1 确定·

在连续情况下,由 $\nabla\cdot u = 0$ 知 $a_1(\psi, \Phi) = 0$,如果用协调元离散(9),必须寻求$H_0^2(\Omega)$ 的有限维子空间X^h,由[1] 知选用 Clough_Tocher 三角元生成的子空间就满足要求,通常的有限元方法为:求 $\psi_h\in X^h$,使

$$a(\psi_h, \Phi) + b(\psi_h, \psi_h, \Phi) = (f, \mathrm{rot}\,\Phi) \quad (\forall\Phi\in X^h)\cdot \tag{10}$$

由[2]知对于任意 $\psi\in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ 成立下面的误差估计:

$$\|\psi - \psi_h\|_0 + h|\psi - \psi_h|_1 + h^2|\psi - \psi_h|_2 \leqslant ch^4|\psi|_4\cdot \tag{11}$$

1 两重网格算法

选取由 Clough_Tocher 元生成的子空间 $X^h, X^H (h \ll H)$·

算法 1　1) 求 $\psi^H \in X^H$, 使

$$a(\psi^H, \phi) + b(\psi^H, \psi^H, \phi) = (f, \mathrm{rot}\,\phi) \quad (\forall \phi \in X^H)\bullet \tag{12}$$

2) 求 $\psi^h \in X^h$, 使

$$a(\psi^h, \phi) + b(\psi^H, \psi^h, \phi) + b(\psi^h, \psi^H, \phi) = (f, \mathrm{rot}\,\phi) + b(\psi^H, \psi^H, \phi) \quad (\forall \phi \in X^h), \tag{13}$$

则(10)的逼近解为 ψ^h•

算法 2　1) 求 $\psi^H \in X^H$, 使

$$\delta a_1(\psi^H, \phi) + a(\psi^H, \phi) + b(\psi^H, \psi^H, \phi) = (f, \mathrm{rot}\,\phi) \quad (\forall \phi \in X^H)\bullet \tag{14}$$

2) 求 $\psi^h \in X^h$, 使

$$a(\psi^h, \phi) + b(\psi^h, \psi^H, \phi) = (f, \mathrm{rot}\,\phi) \quad (\forall \phi \in X^h)\bullet \tag{15}$$

3) 求 $\mathrm{e}^H \in X^H$, 使

$$a(\mathrm{e}^H, \phi) + b(\mathrm{e}^H, \psi^H, \phi) + b(\psi^H, \mathrm{e}^H, \phi) = - b(\psi^H, \psi^h - \psi^H, \phi) \quad (\forall \phi \in X^H), \tag{16}$$

则(10)的逼近解为

$$\psi^* = \psi^h + \mathrm{e}^H\bullet \tag{17}$$

定义

$$N := \sup_{\psi, \phi, \eta \in X} \frac{|b(\psi, \phi, \eta)|}{|\psi|_2 |\phi|_2 |\eta|_2}, \tag{18}$$

$$|f|_* := \sup_{\phi \in X} \frac{|(f, \mathrm{rot}\,\phi)|}{|\phi|_2}\bullet \tag{19}$$

引理 1.1　三线性形式 $b(\bullet, \bullet, \bullet)$ 满足下列不等式:

a) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 |\eta|_2 |\phi|_2 \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X)$,

b) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 |\phi|_2 |\eta|_1^{1-\epsilon} |\eta|_2^{\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X)$,

c) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 |\phi|_1^{1/2} |\phi|_2^{1/2} |\eta|_1^{1/2} |\eta|_2^{1/2} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X)$,

d) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_4 |\eta|_1 |\phi|_2 \quad (\forall \psi \in H^4(\Omega), \eta, \phi \in X)$,

e) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 |\eta|_2 |\phi|_1^{1-\epsilon} |\phi|_2^{\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X)$,

f) $|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 |\eta|_1^{1-\epsilon} |\eta|_2^{\epsilon} |\phi|_2^{1-\epsilon} |\phi|_1^{\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X)$,

证明　由于

$$|b(\psi, \eta, \phi)| = \left|\int_\Omega \Delta\psi(\nabla\phi \bullet \mathrm{rot}\,\eta)\,\mathrm{d}\Omega\right| \leqslant$$
$$\|\Delta\psi\|_{0,p} \|\nabla\phi\|_{0,q} \|\mathrm{rot}\,\eta\|_{0,r} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

令 $p = 2, q = r = 4$, 由 $H^1(\Omega) \quad L^4(\Omega)$ 得 a)•

由 $\|\nabla\phi\|_0 \leqslant c|\phi|_1^{1/2} |\phi|_2^{1/2}$ 得 c)•

令 $p = \infty, q = r = 2$, 由 $|\phi|_{0,\infty} \rightarrow H^2(\Omega)$ 得 d)•

下面证明 e)•

对 $\forall 0 < \epsilon < 1$, 令 $p = 2, q = \dfrac{2}{1-\epsilon}\ r = \dfrac{2}{\epsilon}$, 由 Sobolev 嵌入定理 $H^{\epsilon,2}(\Omega) \rightarrow L^{2/1-\epsilon}(\Omega)$, $H^1(\Omega) \quad L^r(\Omega)$ 得

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2 \|\nabla\phi\|_{0,2/(1-\epsilon)} \|\mathrm{rot}\,\eta\|_{0,2/\epsilon} \leqslant$$
$$c|\psi|_2 |\nabla\phi|_\epsilon |\mathrm{rot}\,\eta|_1 \leqslant$$

$$c|\psi|_2\|\nabla\varphi\|_0^{1-\epsilon}|\nabla\varphi|_1^{\epsilon}|\eta|_2 =$$
$$c|\psi|_2|\varphi|_1^{1-\epsilon}|\varphi|_2^{\epsilon}|\eta|_2,$$

由三线性形式 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 关于后两项的反对称性, 同理可得b)•

由Sobolev 嵌入定理 $H^{1-\epsilon,2}(\Omega)\to L^{2/\epsilon}(\Omega)$ 得

$$|b(\psi,\eta,\varphi)|\leqslant c|\psi|_2|\nabla\varphi|_{\epsilon}|\mathrm{rot}\,\eta|_{1-\epsilon}\leqslant$$
$$c|\psi|_2\|\nabla\varphi\|_0^{1-\epsilon}|\nabla\varphi|_1^{\epsilon}|\mathrm{rot}\,\eta|_0^{\epsilon}|\mathrm{rot}\,\eta|_1^{1-\epsilon}\leqslant$$
$$c|\psi|_2|\varphi|_1^{1-\epsilon}|\varphi|_2^{\epsilon}|\eta|_2^{1-\epsilon}|\eta|_1^{\epsilon},$$

f) 得证•

根据 Riesz 表示定理, 将(9) 写成算子形式

$$(A\psi,\varphi)+(B(\psi,\psi),\varphi)=(f,\mathrm{rot}\,\varphi),$$

令 $F(\psi)=A\psi+B(\psi,\psi)+\mathrm{rot}f$ 得

$$(D_\psi F(\psi)\varphi,w)=(A\varphi,w)+(B(\varphi,\psi),w)+(B(\psi,\varphi),w)=$$
$$a(\varphi,w)+b(\psi,\varphi,w)+b(\psi,\varphi,w),$$

并将(10) 写成算子形式

$$F(\psi_h)=A\psi_h+B(\psi_h,\psi_h)+\mathrm{rot}f,$$
$$(D_{\psi_h}F(\psi_h)\varphi,w)=a(\varphi,w)+b(\varphi,\psi_h,w)+b(\psi_h,\varphi,w)\quad(\forall\varphi,w\in X^h)\text{•}$$

如果 ψ 为(9) 的非奇异解, 即 $DF(\psi):X\to X^*$ 是同构映射, 则

$$\inf_{w\in X}\sup_{\varphi\in X}\frac{(D_\psi F(\psi)\varphi,w)}{|\varphi|_2|w|_2}\geqslant\alpha_0>0,$$
$$\inf_{\varphi\in X}\sup_{w\in X}\frac{(D_\psi F(\psi)\varphi,w)}{|\varphi|_2|w|_2}\geqslant\alpha_0>0\text{•}$$

引理 1.2 若 ψ 为(9) 的非奇异解, 则当 h 足够小满足 $ch^2|\psi|_4\alpha_0^{-1}\leqslant 1$ 时, ψ_h 为(10) 的非奇异解•

证明 令

$$\sigma(\psi)=\|(D_\psi F(\psi))^{-1}\|,$$
$$\mu(\psi_h,\psi)=\|D_\psi F(\psi)-D_{\psi_h}F(\psi_h)\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为算子范数•

易知 $\sigma\leqslant\alpha_0^{-1}$, 如果令 $\psi-\psi_h=e$, 则

$$((D_\psi F(\psi)-D_{\psi_h}F(\psi_h))\varphi,w)=b(e,\varphi,w)+b(\psi,e,w)$$
$$\mu(\psi_h,\psi)=\sup_{\varphi,w\in X^h}\frac{b(e,\varphi,w)+b(\varphi,e,w)}{|\varphi|_2|w|_2}\leqslant$$
$$c|\psi-\psi_h|_2=c|e|_2\leqslant ch^2|\psi|_4,$$

故由已知得

$$\sigma(\psi)\cdot\mu(\psi_h,\psi)=c\alpha_0^{-1}h^2|\psi|_4<1,$$

由[3], [4]知 ψ_h 为(10) 的非奇异解•

由此容易得到下面的结论•

推论 1.1 a) 若 ψ 为(9) 的非奇异解, 则当 $c\alpha_0^{-1}H^2|\psi|_4<1$ 时, ψ^H 为(12) 的非奇异解•

b) 若 ψ_h 为(10) 的非奇异解, 则 $D_{\psi_h}F(\psi^H):X^h\to(X^h)^*$ 是同构映射, 即

$$\left.\begin{aligned}\inf_{w\in X^h}\sup_{v\in X^h}\frac{a(w,v)+b(\psi^h,w,v)+b(w,\psi^H,v)}{|v|_2|w|_2}\geqslant\gamma>0,\\ \inf_{v\in X^h}\sup_{w\in X^h}\frac{a(w,v)+b(\psi^h,w,v)+b(w,\psi^H,v)}{|v|_2|w|_2}\geqslant\gamma>0\cdot\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

引理 1.3 (12) 的解存在且满足 $|\psi^H|_2\leqslant\lambda^{-1}|f|_*$, 若 $\lambda^{-2}N|f|_*<1$, 则(12) 的解唯一, 其中 N, $|f|_*$ 如(18), (19) 定义·

引理 1.4 假定 ψ^H 为(12) 的解, 若 $\lambda^{-2}N|f|_*<1$, 则(13) 的解存在唯一且满足

$$|\psi^h|_2\leqslant(\lambda-N\lambda^{-1}|f|_*)^{-1}(1+N\lambda^{-2}|f|_*)|f|_*,$$

利用 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的三线性性, 容易得到

引理 1.5 $b(\psi,\psi,\phi)=b(\psi,\psi^H,\phi)+b(\psi^H,\psi,\phi)+b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\phi)-b(\psi^H,\psi^H,\phi)\cdot$ 定义 $C_H(\psi,\phi):=a(\psi,\phi)+b(\psi,\psi^H,\phi)+b(\psi^H,\psi,\phi)$, 引入投影算子 $P_H:X\to X^H$ 满足

$$C_H(\psi,P_H\phi)=C_H(\psi,\phi),$$

由引理1.2, 知 $P_H\phi$ 是存在的·

引理 1.6 $\forall\phi\in X$ 成立下列不等式

$$|\phi-P_H\phi|_2\leqslant\inf_{\phi\in X}|\phi-\phi^H|_2,$$

$$|\phi-P_H\phi|_1\leqslant cH^2|\phi-P_H\phi|_2\cdot$$

证明 由(20) 知 $\forall\phi\in X$

$$c|P_H\phi-\phi|_2\leqslant\sup_{\phi^H\in X^H}\frac{C_H(\phi^H,P_H\phi-\phi^H)}{|\phi^H|_2}=$$

$$\sup_{\phi^H\in X^H}\frac{C_H(\phi^H,\phi-\phi^H)}{|\phi^H|_2}\leqslant c|\phi-\phi^H|_2,$$

$$|\phi-P_H\phi|_2\leqslant c\inf_{\phi\in X}|\phi-\phi^H|_2\cdot$$

考虑(13) 的对偶问题: $\forall g\in L^2(\Omega)$, 求 $\xi\in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$ 使得

$$C_H(\xi,\phi)=(\mathrm{rot}\,\phi,g)\quad(\forall\phi\in H_0^2(\Omega)),$$

并且假定其解满足正则性条件 $|\xi|_4\leqslant c\,\|g\|_0$, 则

$$|\phi-P_H\phi|_1=\sup_g\frac{\int_\Omega\nabla(P_H\phi-\phi)g\,\mathrm{d}x}{\|g\|_0}=\sup_g\frac{\int_\Omega\mathrm{rot}(P_H\phi-\phi)g\,\mathrm{d}x}{\|g\|_0}=$$

$$\sup_g\frac{(\mathrm{rot}(P_H\phi-\phi),g)}{\|g\|_0}=\sup_g\frac{C_H(\xi,P_H\phi-\phi)}{\|g\|_0}=$$

$$\sup_g\frac{C_H(\xi-P_H\xi,P_H\phi-\phi)}{\|g\|_0}\leqslant cH^2|P_H\phi-\phi|_2\cdot$$

引理 1.7 选取 $\delta\geqslant2c\lambda^{-1}|f|_*$, 则 ψ^h 为(15) 的非奇异解·

证明

$$b(\psi^h,\psi^H,\phi)=\int_\Omega\Delta\psi^h,\nabla\phi\cdot\mathrm{rot}\,\psi^H\mathrm{d}\,\Omega,$$

故

$$|b(\psi^h,\psi^H,\psi^h)|\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|(\nabla\psi^y\cdot\nabla\psi^h)(\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\psi^H)|\,\mathrm{d}\Omega\leqslant$$

$$c|\psi^h|_2^2\|\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\psi^H\|_0,$$

$$a(\psi^h,\psi^h)+b(\psi^h,\psi^H,\psi^h)\geqslant \lambda|\psi^h|_2^2(\lambda-c\|\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\psi^H\|_0),$$

由(14), 令 $\Phi=\psi^H$, 则 $\delta\|\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\psi^H\|_0\leqslant|f|_*$, 故

$$a(\psi^h,\psi^h)+b(\psi^h,\psi^H,\psi^h)\geqslant|\psi^h|_2^2(\lambda-c\delta^{-1}|f|_*)\geqslant\frac{\lambda}{2}|\psi^h|_2^2.$$

由 Lax_Milgram 定理知(15) 的解存在唯一, 因为唯一解一定为非奇异解, 证毕.

2 误差估计

首先考虑算法 1 的误差估计

定理 2.1 假定 ψ 为(9) 的解, ψ^h 为算法 1 的解, 则

a) 若唯一性条件 $\lambda^{-2}N|f|_*\leqslant 1$ 成立, 则 ψ,ψ^H,ψ^h 皆存在唯一, 且满足

$$|\psi-\psi^h|_2\leqslant c\inf_{\Phi\in X^h}|\psi-\Phi|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}. \tag{21}$$

b) 若唯一性条件不满足, 假定 ψ 为(9) 的非奇异解, 则当 H 满足 $c\alpha_0^{-1}H^2|\psi|_4<1$ 时

$$|\psi-\psi^h|_2\leqslant c\inf_{\Phi\in X^h}|\psi-\Phi|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}. \tag{22}$$

证明 首先证明 b), 由引理 1.5 知 ψ 满足

$$\begin{aligned}a(\psi,\Phi)+b(\psi,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi,\Phi)&=b(\psi^H,\psi^H,\Phi)-\\&\quad b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\Phi)+(f,\mathrm{rot}\,\Phi)\quad(\forall\Phi\in X),\end{aligned}\tag{23}$$

令 $\Phi\in X^h$, 任取 $w^h\in X^h$, $\eta=\psi-w^h$, $\xi^h=\psi^h-w^h$, 则由(23) 式减去(13) 式得

$$\begin{aligned}a(\xi^h,\Phi)+b(\xi^h,\psi^h,\Phi)+b(\psi^H,\xi^h,\Phi)&=a(\eta,\Phi)+b(\eta,\psi^H,\Phi)+\\&\quad b(\psi^H,\eta,\Phi)+b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\Phi)\quad(\forall\Phi\in X^h).\end{aligned}$$

由(20) 及引理 1.1 知

$$\gamma|\xi^h|_2|\Phi|_2\leqslant\lambda|\eta|_2|\Phi|_2+c|\eta|_2|\Phi|_2|\psi^H|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}|\Phi|_2,$$

故

$$|\xi^h|_2\leqslant c(|\eta|_2+|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}),$$

从而

$$|\psi-\psi^h|_2\leqslant|\eta|_2+|\xi|_2\leqslant c(\inf_{w^h\in X^h}|\psi-w^h|_2+|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}),$$

b) 证毕.

下面证明结论 a).

在(23) 中取 $\Phi=\xi^h$, 由引理 1.1 及(23) 知

$$\begin{aligned}\lambda|\xi^h|_2^2-2N|\xi^h|_2^2|\psi^H|_2&\leqslant\lambda|\eta|_2|\xi^h|_2+c|\psi^H|_2|\xi^h|_2|\eta|_2+\\&\quad c|\psi-\psi^H|_1^{1-\varepsilon}|\psi-\psi^H|_1^{1+\varepsilon}|\xi^h|_2,\end{aligned}$$

由引理 1.4 知

$$(\lambda-2N\lambda^{-1}|f|_*)|\xi^h|_2\leqslant\lambda|\eta|_2+c\lambda^{-1}|f|_*|\eta|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}.$$

故

$$\begin{aligned}|\xi^h|_2&\leqslant(1-2N\lambda^{-2}|f|_*)^{-1}(1+c\lambda^{-2}|f|_*)|\eta|_2+\\&\quad c(1-2N\lambda^{-2}|f|_*)^{-1}\lambda^{-1}|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon},\end{aligned}$$

从而

$$|\psi-\psi^h|_2\leqslant|\xi^h|_2+|\eta|_2\leqslant c|\eta|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon},$$

故 $$|\psi-\psi^h|_2\leqslant c\inf_{w^h\in X^h}|\psi-w^h|_2+c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}.$$ 证毕.

由有限元空间的插值理论和定理 2.1 知 $|\psi-\psi^h|_2\leqslant c(h^2+H^{5-\epsilon})$. 即当 $h=O(H^{(5-\epsilon)/2})$ 时, 利用两重网格求解 Navier_Stokes 方程流函数形式与通常的有限元求解具有相同的精度, 但是两重网格求解只在粗网格上求解非线性问题, 在细网格上求解的是线性问题, 所以能节省计算量.

下面考虑带有 Backtracking 技巧的算法 2 的误差估计.

定理 2.2 假定 ψ 为(9) 的非奇异解, ψ^h 为(15) 的非奇异解, 则成立如下的误差估计

$$|\psi-\psi^h|_2\leqslant cH^3|\psi|_4^2.$$

证明 取 $\Phi\in X^h$, 由(9) 式减去(15) 式得

$$a(\psi-\psi^h,\Phi)+b(\psi-\psi^h,\psi^H,\Phi)=-b(\psi,\psi-\psi^H,\Phi),\tag{24}$$

令(24) 中的 $\Phi=\psi-\psi^h$, 由引理 1.7 得

$$|\psi-\psi^h|_2^2\leqslant c|\psi|_4|\psi-\psi^H|_1|\psi-\psi^h|_2,$$

故 $$|\psi-\psi^h|_2\leqslant c|\psi-\psi^H|_1|\psi|_4\leqslant cH^3|\psi|_4^2.$$ 证毕.

定理 2.3 假定 ψ 为(9) 的非奇异解, ψ^* 满足(17), 则成立如下的误差估计

$$|\psi-\psi^*|_2\leqslant c\inf_{\eta^h\in X^h}|\psi-\eta^h|_2+cH^{5-\epsilon}.$$

证明 由(16) 知

$$a(e^H,\Phi)+b(e^H,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,e^H,\Phi)=-b(\psi^H,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi)\quad(\forall\Phi\in X^h),\tag{25}$$

令(25) 式减去(24) 式, 由(17) 得

$$\begin{aligned}&a(\psi-\psi^*,\Phi)+b(\psi-\psi^*,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi-\psi^*,\Phi)=\\&\quad b(\psi^H,\psi-\psi^*,\Phi)-b(\psi,\psi-\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,e^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi)=\\&\quad b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi-\Phi),\end{aligned}\tag{26}$$

令 $\Phi^h=\psi^*-\eta^h$, $\eta=\psi-\eta^h$, 则

$$\begin{aligned}&a(\psi^h,\Phi)+b(\Phi^h,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi^h,\Phi)=a(\eta,\Phi)+b(\eta,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\eta,\Phi)+\\&\quad b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi-\Phi).\end{aligned}\tag{27}$$

下面逐项估计(27) 的右端项.

$$\begin{aligned}&|a(\eta,\Phi)+b(\eta,\psi^H,\Phi)+b(\psi^H,\eta,\Phi)|\leqslant\lambda|\eta|_2|\Phi|_2+c|\psi^H|_2|\eta|_2|\Phi|_2\leqslant\\&\quad c\inf_{\eta^h\in X^h}|\psi-\eta^h|_2|\Phi|_2,\end{aligned}$$

$$|b(\psi-\psi^H,\psi-\psi^H,\Phi)|\leqslant c|\psi-\psi^H|_1^{1-\epsilon}|\psi-\psi^H|_2^{1+\epsilon}|\Phi|_2\leqslant cH^{5-\epsilon}|\Phi|_2,$$

令
$$\begin{aligned}RHS&=b(\psi^H,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi-\Phi)=\\&b(\psi^H-\psi,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi-\Phi)+b(\psi,\psi^h-\psi^H,P_H\Phi-\Phi)=\\&b(\psi^H-\psi,\psi^h-\psi,P_H\Phi-\Phi)+b(\psi^H-\psi,\psi-\psi^H,P_H\Phi-\Phi)+\\&b((\psi,\psi^h-\psi,P_H\Phi-\Phi)+b(\psi,\psi-\psi^H,P_H\Phi-\Phi)=\\&I_1+I_2+I_3+I_4,\end{aligned}$$

$$|I_1|\leqslant c|\psi^H-\psi|_2|\psi^h-\psi|_2|P_h\Phi-\Phi|_2> cH^6|\Phi|_2,$$

$$|I_2|\leqslant c|\psi-\psi^H|_2|\psi-\psi^H|_1^{1/2}|\psi-\psi^H|_2^{1/2}|P_H\Phi-\Phi|_1^{1/2}|P_h\Phi-\Phi|_2^{1/2}\leqslant$$

$$dH^5|\phi|_2,$$

$$|I_3| \leqslant c|\psi-\psi^h|_2|P_H\phi-\phi|_1|\psi|_4 \leqslant dH^5|\phi|_2,$$

$$|I_4| \leqslant c|\psi|_4|\psi-\psi^H|_1|P_H\phi-\phi|_1 \leqslant dH^5|\phi|_2.$$

由以上估计可得

$$a(\phi^h,\phi)+b(\phi^h,\psi^H,\phi)+b(\psi^H,\phi^h,\phi) \leqslant c\inf_{\eta^h\in X^h}|\psi-\eta^h|_2|\phi|_2+dH^{5-\epsilon}|\phi|_2,$$

故

$$|\phi^h|_2 \leqslant c\inf_{\eta^h\in X^h}|\psi-\eta^h|_2+dH^{5-\epsilon},$$

$$|\psi-\psi^*|_2 \leqslant |\phi^h|_2+|\eta|_2 \leqslant c\inf_{\eta^h\in X^h}|\psi-\psi^h|_2+dH^{5-\epsilon}.$$

证毕.

注: 实际上利用[2]中的算法, 即在细网格上求解一个全线性方程, 再求解一个校正方程时, 可以得到如下误差估计

$$|\psi-\psi^*|_2 \leqslant c(h^2+H^{5.5})$$

[参 考 文 献]

[1] Layton W, Ye X. Two level discretizations of the stream function form of the Navier_Stokes equations [J]. J Numer Function Anal, 1999, **20**(9/10): 909—916.

[2] Ye X. Two_grid discretizations with backtracking of the stream function form of the Navier_Stokes equations[J]. Appl Math Comput, 1999, **100**(2/3): 131—138.

[3] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for the Navier_Stokes Equations: Theory and Algorithms[M]. Berlin: Springer, 1986.

[4] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for the Navier_Stokes equations[M]. Vol **749** Berlin: Springer LNM, 1979.

[5] Xu J. Two_grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J Numer Anual, 1996, **33**(5): 1759—1777.

Two_Grid Error Estimates for the Stream Function Form of Navier_Stokes Equations

REN Chun_feng, MA Yi_chen

(College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P R China)

Abstract: The two_grid finite element approximation to the stream function form of the stationary Navier_Stokes equations was analyzed. The algorithms involve solving one small, nonlinear coarse mesh system, one linear problem on the fine mesh system, and a linear correct problem on the coarse mesh. The algorithms with the correct problem and without the correct problem were discussed. The algorithms produce an approximate solution with the optimal, asymptotic accuracy for any fixed Reynolds number.

Key words: Navier_Stokes equation; two_grid method; stream function