应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0736_07

关于 Skew_Hopf 对的二重交叉积的表示模*

潘庆年[1], 郝志峰[2]

(1. 惠州大学 数学系, 广东惠州 516015; 2. 华南理工大学 应用数学系, 广州 510641)

(吴学谋推荐)

摘要: 研究了 Skew_Hopf 对的二重交叉积 $D(X,A)$ 的表示模, 得到了 M 成为 $D(X,A)$ 的表示模的充要条件; $D(X,A)$_模与量子 Yang_Baxter X_模、A_模之间的联系也被揭示出来•

关 键 词: Skew_Hopf 对; 二重交叉积; 表示模; (量子) Yang_Baxter 模
中图分类号: O153.3 文献标识码: A

1 引言与预备知识

量子 Yang_Baxter 方程(简记为 QYBE) 由著名物理学家杨振宁(Yang C N) 提出, 最早出现在[1~ 2] 中, 它的产生有着深刻的物理背景, 又在 Bethe Ansats 方法、量子反散方法、可解格子模、保守场论、量子群、低维拓扑(Braidings, link 不变式) 等等许多领域中有着重要的应用• 但是, QYBE 的求解是一个极其复杂的问题• Drinfeld 在[3] 中构造了一个有限维 Hopf 代数 H 的量子偶 $D(H)$, 它可以在其任意表示模上给出 QYBE 一种形式的解; Majid 在[4] 中从纯数学构造的角度给出二重交叉积的概念, 它包含量子偶 $D(H)$ 作为一种特殊情况• 由于二重交叉积的结构复杂, 要求的相容性条件较多• 因此, 我们对能够存在二重交叉积的 Hopf 代数类所知甚少• 文献[5] 证明了对于具有某种特殊关系的 Hopf 代数对 (X,A), 文中称之为 Skew_Hopf 对, 它们的二重交叉积 $D(X,A)$ 存在, 并且仍包含量子偶 $D(H)$ 作为一种特殊情况• $D(H)$ 的表示模不但在理论上占有很重要的地位, 而且在许多物理量的计算中起到关键作用• 因此, $D(X,A)$ 的表示模的讨论是一个很有意义的课题• 本文在[5] 的基础上, 讨论 $D(X,A)$_模理论, 揭示了 $D(X,A)$ 模与 X_模、A_模之间的关系, 这些关系是一般的二重交叉积所没有的•

设所讨论的内容限定在一个域 **k** 上, 假设读者熟悉基本的 Hopf 代数知识[6~ 7]•

定义 1[8] 一对 Hopf 代数 (X,A) 称为 Hopf 对, 假如在 $X\times A$ 上存在一个非退化的双线性形式 $\langle , \rangle$ 满足:

$$\langle x, ab\rangle = \sum_{(x)}\langle x_{(1)}, a\rangle\langle x_{(2)}, b\rangle, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2000_09_13; 修订日期: 2002_01_06
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(000463); 惠州大学自然科学基金资助项目(010201)
作者简介: 潘庆年(1958—), 男, 安徽省阜阳人, 副教授(E_mail: Panqn@21cn.com);
郝志峰(1967—), 男, 江苏省苏州人, 教授, 博士.

$$\langle x, 1_A \rangle = \varepsilon(x), \tag{2}$$

$$\langle xy, a \rangle = \sum_{(a)} \langle x, a_{(1)} \rangle \langle y, a_{(2)} \rangle, \tag{3}$$

$$\langle 1_A, a \rangle = \varepsilon(a), \tag{4}$$

$$\langle S_X(x), a \rangle = \langle x, S_A(a) \rangle, \tag{5}$$

这里 $x, y \in X$, $a, b \in A$, S_X 及 S_A 分别为 X 及 A 的 antipode。

定义 2[5]　(X, A) 称为 Skew_Hopf 对, 假如 (2)、(3)、(4) 及下面的等式成立

$$\langle x, ab \rangle = \sum_{(x)} \langle x_{(1)}, b \rangle \langle x_{(2)}, a \rangle, \tag{1$'$}$$

$$\langle S_X(x), a \rangle = \langle x, S_A^{-1}(a) \rangle, \tag{5$'$}$$

设 (X, A) 是 Skew_Hopf 对, X 和 A 分别有可逆的 antipode S_X 和 S_A, 定义 X 与 A 的交叉作用如下:

$A \otimes X \xrightarrow{\text{“}\rightharpoonup\text{”}} X$, $a \rightharpoonup x$ 由如下等式唯一确定:

$$\langle a \rightharpoonup x, b \rangle = \sum_{(a)} \langle x, S_A^{-1}(a_{(2)}) b a_{(1)} \rangle, \ \forall b \in A, \tag{6}$$

$A \otimes X \xrightarrow{\text{“}\leftharpoonup\text{”}} A$, $a \leftharpoonup x$ 由如下等式唯一确定:

$$\langle y, a \leftharpoonup x \rangle = \sum_{(x)} \langle x_{(1)} y S_X(x_{(2)}), a \rangle, \ \forall y \in X. \tag{7}$$

引理 1[5]　1) X 在作用“$\rightharpoonup$”之下是左 A 模余代数, 同时 A 在作用“$\leftharpoonup$”之下是右 X 模余代数。

2) 设 A 有可逆的 antipode S_A, (X, A) 是 Skew_Hopf 对, 那么在交叉作用“$\rightharpoonup$”及“$\leftharpoonup$”之下, X 与 A 的二重交叉积 $X \bowtie A$ 一定存在, 记为 $D(X, A)$, 或简记为 D. D 的 Hopf 代数结构定义在集合 $X \otimes A$ 上, 可以直接表达如下:

i a) D 的余代数结构与张量余代数 $\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{A}$ 相一致:

$$\triangle(x \otimes a) = \sum (x_{(1)} \otimes a_{(1)}) \otimes (x_{(2)} \otimes a_{(2)}),$$

$$\varepsilon(x \otimes a) = \varepsilon(x)\varepsilon(a).$$

i b) 代数结构:

$$(x \otimes a) \cdot (y \otimes b) = \sum x(a_{(1)} \rightharpoonup y_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \leftharpoonup y_{(2)}) b, \tag{8}$$

$(1_X \otimes 1_A)$ 为 D 上的单位。

i c) D 的 antipode S_D 为:

$$S_D(x \otimes a) = (1 \otimes S_A(a)) \cdot (S_X(x) \otimes 1) = \sum_{(x)(a)} (S_A(a_{(2)}) \rightharpoonup S_X(x_{(2)})) \otimes (S_A(a_{(1)}) \leftharpoonup S_A(x_{(1)})).$$

2　主要结论

为了讨论 $D(X, A)$ 的表示模, 我们对 $D(X, A)$ 的乘法作进一步描述。

引理 2[5]　1) $$a \rightharpoonup x = \sum_{(x)} \langle x_{(1)} S_X(x_{(3)}), a \rangle x_{(2)}, \tag{9}$$

2) $$a \leftharpoonup x = \sum_{(a)} < x, S_A^{-1}(a_{(3)}) a_{(1)} > a_{(2)}. \tag{10}$$

证　1) $\forall b \in A$, 我们有:

$$\langle a \rightharpoonup x, b \rangle = \sum_{(a)} \langle x, S_A^{-1}(a_{(2)}) b a_{(1)} \rangle =$$

$$\sum_{(a)(x)}\langle x_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle x_{(2)}, b\rangle\langle x_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(2)})\rangle =$$
$$\sum_{(a)(x)}\langle x_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle S_X(x_3), a_2\rangle\langle x_{(2)}, b\rangle =$$
$$\sum_{(x)}\langle x_{(1)} S_X(x_3), a\rangle\langle x_{(2)}, b\rangle =$$
$$\sum_{(x)}\langle\langle x_{(1)} S_X(x_3), a\rangle x_{(2)}, b\rangle,$$

$\langle, \rangle$ 是非退化的, $b \in A$ 是任意的, (9) 得证•

2) 同理可证•

引理 3　$D(X, A)$ 的乘法(9) 式可以更直接表达为

$$(x \bowtie a)(y \bowtie b) = \sum x(a_{(1)} \rightharpoonup y_{(1)}) \bowtie (a_{(2)} \leftharpoonup y_{(2)}) b =$$
$$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)})\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(2)} b =$$
$$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle S_X(y_{(3)}), a_{(3)}\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(2)} b \tag{11}$$

证明　$(x \bowtie a)(y \bowtie b) = \sum x(a_{(1)} \rightharpoonup y_{(1)}) \bowtie (a_{(2)} \leftharpoonup y_{(2)}) b =$

$\sum\langle y_{(1)} S_X(y_{(3)}), a_{(1)}\rangle x y_2 \bowtie \langle y_{(4)}, S_A^{-1}(a_{(4)}) a_{(2)}\rangle a_{(3)} b =$ (根据(8)、(9) 式)

$\sum\langle y_{(1)} S_X(y_{(3)}), a_{(1)}\rangle\langle y_4, S_A^{-1}(a_{(4)}) a_{(2)}\rangle x y_2 \bowtie a_{(3)} b =$ (根据(3) 式)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle S_X(y_{(3)}), a_{(2)}\rangle\langle y_{(4)}, S_A^{-1}(a_{(5)}) a_{(3)}\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(4)} b =$ (根据(5′) 式)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(2)})\rangle\langle y_{(4)}, S_A^{-1}(a_{(5)}) a_{(3)}\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(4)} b =$ (根据(1′) 式)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(5)}) a_{(3)} S_A^{-1}(a_{(2)})\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(4)} b =$ (S_A^{-1} 是 Skew_antipode)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(4)}) \varepsilon(a_{(2)})\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(3)} b =$

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(4)})\rangle x y_{(2)} \bowtie (\varepsilon(a_2) a_{(3)}) b =$ (ε 是余单位)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_3, S_A^{-1}(a_{(3)})\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(2)} b =$ (根据(5′) 式)

$\sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle S_X(y_{(3)}), a_{(3)}\rangle x y_{(2)} \bowtie a_{(2)} b$

设 M 是 $D(X, A)$_模, 根据标准的二重交叉积理论[4], 有两个单同态 $i: X \to D(X, A)$, $i(y) = y \bowtie 1$, 及 $j: A \to D(X, A)$, $j(a) = 1 \bowtie a$• 这样可诱导 M 成为 X_模及 A_模

$$y \cdot m = (y \bowtie 1) \cdot m, \quad a \cdot m = (1 \bowtie a) \cdot m,$$

注意到 $(y \bowtie 1)(1 \bowtie a) = (y \bowtie a)$

但是, $(1 \bowtie a)(y \bowtie 1) = \sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S^{-1}(a_{(3)})\rangle(y_{(2)} \bowtie 1)(1 \bowtie a_{(2)})$,

因此, M 的 X_模及 A_模结构满足下列交换条件

$$a \cdot (y \cdot m) = \sum\langle y_{(1)}, a_{(1)}\rangle\langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)})\rangle y_{(2)} \cdot (a_{(2)} \cdot m) \tag{12}$$

反之, 如果 M 是 X_模及 A_模, 而且两模结构满足交换条件(12), 那么, 定义 $D(X, A)$ 在 M 上的作用:

$$(x \bowtie a) \cdot m = x \cdot (a \cdot m),$$

M 可成为 $D(X, A)$_模, 事实上:

$$1_D \cdot m = (1_x \otimes 1_A) = 1_X \cdot (1_A \cdot m) = m,$$

一方面: $(x \otimes a)[(y \otimes b) \cdot m] = x \cdot (a \cdot (y \cdot (b \cdot m))),$ (13)

另一方面

$$[(x \otimes a)(y \otimes b)] \cdot m = \sum \langle y_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle (xy_2 \otimes a_2 b) \cdot m =$$

$$\sum \langle y_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)} \rangle x \cdot (y_2 \cdot (a_{(2)} \cdot (b \cdot m))) \tag{14}$$

在(12)式以 $b \cdot m$ 代 m, 即知(13)、(14) 两式是相等•

总结上述结果, 得到

定理 1　M 是 $D(X, A)$_模的充要条件是 M 是 X_模及 A_模, 而且两个模作用满足交换关系式(12)•

所谓(量子) Yang_Baxter H_模 M(参考[9]) 是一个左 H_模及右 H_余模, 记模作用为 $h \cdot m$, 余模作用为:

$$\rho: M \to M \otimes H, \quad \rho(m) = \sum m^{(1)} \otimes m^{(2)},$$

两者满足下列相容性条件:

$$\sum h_{(1)} \cdot m^{(1)} \otimes h_{(2)} \cdot m^{(2)} = \sum (h_{(2)} \cdot m)^{(1)} \otimes (h_{(2)} \cdot m)^{(2)} h_{(1)}, \tag{15}$$

下面的定理描述了量子 Yang_Baxter A_模与 $D(X, A)$_模之间的关系•

定理 2　如果 M 是一个量子 Yang_Baxter A_模, 那么 M 可成为 $D(X, A)$_模•

证　设 $(M, \cdot, \rho)$ 为量子 Yang_Baxter A_模, 由定理 1, 我们还需构造 M 的 X_模结构且使它与 A_模结构满足(12) 式•

定义:　$$y \cdot m = \sum_{(m)} \langle y, m^{(2)} \rangle m^{(1)}, \ y \in X, \ m \in M \tag{16}$$

这里 $\rho(m) = \sum m^{(1)} \otimes m^{(2)} \in M \otimes A$ 是 M 的右 A_余模结构映射•

易证: (16) 定义了 M 成为 X_模, 且

$$\sum \langle y_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle y_{(2)} \cdot (a_{(2)} \cdot m) =$$

$$\sum \langle y_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle y_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle y_{(2)}, (a_{(2)} \cdot m)^{(2)} \rangle (a_{(2)} \cdot m)^{(1)} =$$

$$\sum \langle y_{(2)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle y_{(1)}, (a_{(2)} m)^{(2)} a_{(1)} \rangle (a_{(2)} \cdot m)^{(1)} = \text{(由(15) 式)}$$

$$\sum \langle y_{(2)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle y_{(1)}, a_{(2)} m^{(2)} \rangle a_{(1)} \cdot m^{(1)} =$$

$$\sum \langle y, S_A^{-1}(a_{(3)}) a_{(2)} m^{(2)} \rangle a_{(1)} \cdot m^{(1)} =$$

$$\sum \langle y, m^{(2)} \rangle (\varepsilon a_{(2)}) a_{(1)}) m^{(1)} =$$

$$\sum \langle y, m^{(2)} \rangle a \cdot m^{(1)} = a \cdot (y \cdot m)$$

(12) 式成立, 由定理 1, M 是 $D(X, A)$_模•

类似地, 我们有:

定理 3　如果 M 是量子 Yang_Baxter　X_模, 则 M 可以成为 $D(X, A)$_模•

一般情况下, 定理 2~ 3 的逆命题是否成立, 目前尚不知道•　这是一个很值得研究的问题•　但在有限维情况下, 我们已经解决了这个问题•

定理 4　设 M 是 $D(X, A)$_模•　如果 A 是有限维的, 那么 M 可以成为量子 Yang_Baxter A_模•

证　分三步进行•

1) 取 A 的基为 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, 选择 X 中 n 个元素 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 设得

$$\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \tag{17}$$

可以证明下面等式:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\alpha_i)\beta_i = 1_A, \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\beta_i)\alpha_i = 1_X, \tag{18}$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, \beta_j \rangle \alpha_j \qquad (\forall x \in X), \tag{19}$$

$$a = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j, a \rangle \beta_j \qquad (\forall a \in A). \tag{20}$$

2) M 是 $D(X, A)$_模, 由定理 1, M 是左 A_模和右 X_模, 而且模作用满足相容性条件(12). 为了将 M 作成量子 Yang_Baxter A_模, 定义余作用 ρ 如下:

$$\rho: M \to M \otimes A$$

$$\rho(m) = \sum_{(m)} m^{(1)} \otimes m^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m \otimes \beta_i \tag{21}$$

现证 ρ 满足余单位性和余结合性.

$$(1 \otimes \varepsilon)\rho(m) \cong \sum \alpha_i m\, \varepsilon(\beta_i) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\beta_i)\alpha_i\Big) m = 1_X \cdot m = m \qquad (\text{根据(18) 式})$$

余单位性得证.

$$(\rho \otimes 1)\rho(m) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\alpha_i m) \otimes \beta_i, \tag{22}$$

$$(1 \otimes \triangle)\rho(m) = \sum \alpha_i m \otimes \triangle(\beta_i). \tag{23}$$

任取 $f \in M^*$, $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
\langle f \otimes x \otimes y, (\rho \otimes 1)\rho(m) \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle f \otimes x, \rho(\alpha_i m) \rangle \langle y, \beta_i \rangle = \\
&\sum_{i,j=1}^{n} f(\alpha_j(\alpha_i m)) \langle x, \beta_j \rangle \langle y, \beta_i \rangle = \\
&\sum_{i=1}^{n} f\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle x, \beta_j \rangle \alpha_j(\alpha_i m)\Big) \langle y, \beta_i \rangle = \quad (\text{根据(19) 式}) \\
&\sum_{i=1}^{n} f(x(\alpha_i m)) \langle y, \beta_i \rangle = \\
&f\Big(x\Big(\sum_{i=1}^{n} \langle y, \beta_i \rangle \alpha_i\Big) m\Big) = f(x(ym)) = f((xy) \cdot m),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f \otimes x \otimes y, (1 \otimes \triangle)\rho(m) \rangle &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i m) \langle x \otimes y, \triangle(\beta_i) \rangle = \quad (\text{根据(3) 式}) \\
&\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i m) \langle xy, \beta_i \rangle = \\
&f\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \langle xy, \beta_i \rangle \alpha_i\Big) \cdot m\Big) = \\
&f((xy) \cdot m).
\end{aligned}$$

$f \otimes x \otimes y \in M^* \otimes X \otimes Y$ 是任意的, 线性形式 $\langle , \rangle$ 是非退化的, 故

$$(\rho \otimes 1)\rho(m) = (1 \otimes \triangle)\rho(m)\bullet$$

余结合性得到证明•

3) 模与余模的相容性条件(15)•

$$\sum a_{(1)} m^{(1)} \otimes a_{(2)} m^{(2)} = \sum a_{(1)} \alpha_i m \otimes a_{(2)} \beta_i, \tag{24}$$

$$\sum (a_{(2)} m)^{(1)} \otimes (a_{(2)} m)^{(2)} a_{(1)} = \sum \alpha_i (a_{(2)} m) \otimes \beta_i a_{(1)}\bullet \tag{25}$$

对任 x, 用 $id_M \otimes \langle x, - \rangle$ 作用于(24) 及(25) 式:

$$id_M \otimes \langle x, - \rangle\Big(\sum_{(a)} a_{(1)} m^{(1)} \otimes a_{(2)} m^{(2)}\Big) = \sum \langle x, a_{(2)} \beta_i \rangle a_{(1)} (\alpha_i m) =$$

$$\sum \langle x_{(2)}, a_{(2)} \rangle \langle x_{(1)}, \beta_i \rangle a_{(1)} (\alpha_i m) =$$

$$\sum \langle x_{(2)}, a_{(2)} \rangle a_{(1)} \Big(\sum_i \langle x_{(1)}, \beta_i \rangle \alpha_i \bullet m\Big) = (\text{根据}(19)\text{式})$$

$$\sum \langle x_{(2)}, a_{(2)} \rangle a_{(1)} (x_{(1)} m) = (\text{根据}(12)\text{式})$$

$$\sum \langle x_{(4)}, a_{(4)} \rangle \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle x_{(3)}, S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle x_{(2)} (a_{(2)} m) = (\text{根据}(1'))$$

$$\sum \langle x_{(3)}, a_{(4)} S_A^{-1}(a_{(3)}) \rangle \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle x_{(2)} (a_{(2)} m) = (S_A^{-1}\text{是 Skew\_antipode})$$

$$\sum \langle x_{(3)}, 1_A \rangle \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle x_{(2)} (\varepsilon(a_{(3)}) a_{(2)} m) =$$

$$\sum \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle \varepsilon(x_{(3)}) x_{(2)} (a_{(2)} m) = \sum \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle x_{(2)} (a_{(2)} m)\bullet \tag{26}$$

$$id_M \otimes \langle x, - \rangle\Big(\sum (a_{(2)} m)^{(1)} \otimes (a_{(2)} m)^{(2)} a_{(1)}\Big) =$$

$$\sum \langle x, \beta_i a_{(1)} \rangle \alpha_i (a_{(2)} m) = \sum \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle x_{(2)}, \beta_i \rangle \alpha_i (a_{(2)} m) =$$

$$\sum \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle \Big(\sum_i \langle x_{(2)}, \beta_i \rangle \alpha_i\Big) (a_{(2)} m) =$$

$$\sum \langle x_{(1)}, a_{(1)} \rangle x_{(2)} (a_{(2)} m)\bullet \tag{27}$$

比较上述两等式即知: (24) 和(25) 相等•

综上所述, M 是量子 Yang_Baxter A_模, 证毕•

类似地, 有如下定理

定理 5　设 M 是 $D(X, A)$, 如果 X 是有限维的, 那么 M 是量子 Yang_Baxter X_模•

$D(X, A)$_模理论是量子偶 $D(H)$_模理论的一种很自然的推广, 但在一般的二重交叉积 $A \infty B$ 中, 尚未见到类似于定理 1～ 5 的结论•

致谢: 感谢审稿人的宝贵意见•

[参　考　文　献]

[1] Yang C N . S matrix for the one_dimensionae N _body problem with repulsive or attractive δ _function interaction[J]. *Physical Review*, 1968, **168**(5): 1920—1923.

[2] Baxter R J. Partition function of the eight_vertex lattice model[A]. In: Jimb M Ed. *Yang_Baxter Equation in Intergrable Systems*[C]. *Adv Series in Math Phys*, Vol. **10**. Singapor: World Scientific, 1989, 14—49.

[3] Drinfeld V G. Quantum groups [A]. In: ICM Ed. *ICM Proceedings*, Berkeley, 1986[C]. Providence: AMS, 1987, 798—820.

[4] Majid S. Physics for algebraists: non_commutative and Non_Cocommutative Hopf algebras by a

bicrossproduct construction[J]. J Alg, 1990, **130**(1): 17—64.

[5] 潘庆年, 郝志峰. Skew_Hopf 对的二重交叉积[J]. 数学学报, 2000, **43**(3): 569—576.

[6] Sweedler M. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

[7] Abe E. Hopf Algebras[M]. London/New York: Cambridge University Press, 1977.

[8] Takeuchi M. Some topics on $GL_q(n)$ [J]. J Alg, 1992, **147**(1): 379—410.

[9] Radford D E. Solutions to the quantum Yang_Baxter equation and the Drinfeld double[J]. J Alg, 1993, **161**(1): 20—32.

[10] 潘庆年. 关于( )*、( )^{o}函子与(余)反射的扩张[J]. 科学通报, 1992, **37**(10): 957—958.

[11] Smith S P. Quantum groups: an introduction and survey for ring theorists[A]. in Non_Commutative Rings. In: Montgomery S, Small W L Eds. Math Sci Res Inst Publications 24[C]. Berlin: Springer, 1992, 78—131.

Modules Over Double Crossproducts of Skew_Hopf Pairs

PAN Qing_nian[1], HAO Zhi_feng[2]

(1. Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou, Guangdong 516015, P R China;
2. Department of Applied Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: The purpose is to study modules of double crossproducts $D(X, A)$ of Skew_Hopf pairs (X, A). A sufficient and necessary condition for M to be $D(X, A)$_mod is shown. Relations between $D(X, A)$_mod and quantam Yang_Baxter A_mod or X_mod are revealed.

Key words: Skew_Hopf pair; double crossproduct; module; quantum Yang_Baxter module