

文章编号: 1000-0887(2002) 07_0743_06

“Good” Boussinesq 方程的多辛算法^{*}

曾文平¹, 黄浪扬¹, 秦孟兆²

(1. 华侨大学 数学系, 福建 泉州, 362011;

2. 中科院 计算数学与科学工程计算研究所 科学与工程计算国家重点实验室, 北京, 100080)

(林宗池推荐)

摘要: 考虑非线性“Good” Boussinesq 方程的多辛形式, 对于多辛形式, 提出了一个新的等价于中心 Preissman 积分的 15 点多辛格式. 数值试验结果表明: 多辛格式具有良好的长时间数值行为.

关键词: “Good” Boussinesq 方程; 多辛; 守恒律

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引言

近年来, 一个重要的进展是对非线性发展偏微分方程的研究. 非线性“Good” Boussinesq 方程

$$u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xx} + (u^2)_{xx} \quad (1)$$

是表征向两个方向传播的非线性浅水波的一个例子. 其精确孤立波解为:

$$u(x, t) = -A \operatorname{sech}^2[(P/2)(\xi - \xi_0)], \quad \xi = x - ct, \quad (2)$$

其中 ξ_0 和 $P > 0$ 为实参数, 且振幅 A 和速度 c 与 P 的关系为

$$A = 3P^2/2, \quad c = \pm \sqrt{1 - P^2}. \quad (3)$$

注意到 ξ_0 是波的初始位置, 由方程(3) 知参数 P 的取值为 $0 < P \leq 1$, 这样, 方程(2) 的孤立波解只在速度 $-1 < c < 1$ 的有限范围内存在. 从已有的文献我们发现: 对 Korteweg-de Vries (KdV) 方程和 Schrödinger 方程的研究已经很多, 然而对非线性“Good” Boussinesq 方程的研究才刚刚开始^[1~3].

1984 年在北京召开的国际双微会议上, 我国学者冯康^[4~6] 首次从辛几何的观点提出了计算 Hamilton 系统的辛算法, 他系统地描述了从生成函数构造任意阶精度的辛差分格式的生成函数法. 对无穷维正则 Hamilton 方程组, 上述理论及方法的一般推广可见[7].

然而, 用此方法对偏微分方程进行辛离散时具有局限性, 具体表现在此方法是个全局性的概念. 为克服此局限性, Bridges 和 Reich 引入了一个基于某个守恒型偏微分方程多辛结构的多辛积分的概念^[8,9]. 理论结果^[9] 表明多辛结构的良好特征是它具有一个严格局部守恒的概

* 收稿日期: 2001_09_25; 修订日期: 2002_02_05

基金项目: 中科院计算数学与科学工程计算研究所科学与工程计算国家重点实验室资助项目; 华侨大学自然科学基金资助项目

作者简介: 曾文平(1940—), 男, 福建惠安人, 男, 教授(E-mail: qmz@lsec.cc.ac.cn).

念和它可以导出一个包含微分二形式的守恒律。这样,多辛积分具有良好的局部守恒不变性质。非线性“Good” Boussinesq 方程具有多辛结构,所以可用此方法得到它的多辛积分。

本文的目的在于提出基于方程(1)的多辛形式的多辛积分。我们导出非线性“Good” Boussinesq 的多辛形式,进而得到一个新的 15 点多辛格式。数值试验结果表明本文所提的多辛格式具有良好的长时间数值行为。

1 非线性“Good” Boussinesq 方程的多辛形式及多辛积分

首先给出由 Bridges 和 Reich 引入的多辛积分的概念^[8,9]。大量的偏微分方程(为简便起见,只考虑一维空间的情况)可改写为多辛方程组的形式:

$$Mz_t + Kz_x = \dot{z}S(z) \quad (z \in \mathbf{R}^n, (x, t) \in \mathbf{R}^2), \quad (4)$$

其中, M 和 K 是 \mathbf{R}^n ($n \geq 3$) 上的反对称矩阵, $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是某个光滑函数。我们称上述方程组是一个具多辛结构的多辛 Hamilton 方程组是由于它具有一个多辛守恒律:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + \frac{\partial}{\partial x}\kappa = 0. \quad (7)$$

其中, ω 和 κ 是预辛形式,

$$\omega = \frac{1}{2} dz \wedge Mdz \text{ 及 } \kappa = \frac{1}{2} dz \wedge Kdz.$$

对多辛方程组(4),还具有一个能量守恒律(ECL):

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}F = 0, \quad (6)$$

其中,能量密度为

$$E = S(z) - \frac{1}{2}z^T Kz_x,$$

能量流为

$$F = \frac{1}{2}z^T Kz_t.$$

多辛形式(4)的一个最重要性质是:它的多辛性质是一个完全局部守恒的概念。多辛是偏微分方程的一个几何性质,我们自然要求用一种离散来反映这个性质。基于这个思想, Bridges 和 Reich 引入了多辛积分的概念,即一种能够保持多辛守恒律离散说法的数值方法^[8]。理论结果已经表明:通常的中心 Preissmann 格式^[10]和蛙跳格式是多辛的,且这些格式具有重要的局部能量守恒性质和动量守恒性质^[8]。

现考虑下列广义非线性“Good” Boussinesq 方程

$$u_{tt} = -u_{xxxx} + u_{xx} + (G'(u))_{xx}, \quad (7)$$

其中, $G(u): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是某个非线性光滑函数。特别地取 $G(u) = u^3/3$, 则方程(7)恰好是方程(1)。

引入正则动量 $v = u_x$, $u_t = p_x$, $w_x = p$, 我们可得多辛偏微分方程组

$$\begin{cases} w_t + v_x - u - G'(u) = 0, \\ u_x = v, \\ u_t = p_x, \\ w_x = p. \end{cases}$$

且具状态变量 $z = (u, v, w, p)^T$, 其 Hamilton 函数为

$$S = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 - p^2) + G(u).$$

此时,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

其相应多辛守恒律为

$$\frac{\partial}{\partial t}(du \wedge dw) + \frac{\partial}{\partial x}(du \wedge dv + dw \wedge dp) = 0, \tag{8}$$

其相应能量守恒律为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + p^2) + G(u) \right] - \frac{\partial}{\partial x}(vu_t + pw_t) = 0. \tag{9}$$

命题 引入正则动量

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} &= \frac{1}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - u_i^{j+1/2}), \quad \frac{1}{\Delta t}(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - u_{i+\frac{1}{2}}^j) = \\ &= \frac{1}{\Delta x}(p_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - p_i^{j+1/2}), \\ p_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} &= \frac{1}{\Delta x}(w_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - w_i^{j+1/2}), \end{aligned}$$

则下列两种离散说法等价

$$\begin{aligned} &\frac{\partial_x^2 u_{i+2}^j + 4\partial_x^2 u_{i+1}^j + 6\partial_x^2 u_i^j + 4\partial_x^2 u_{i-1}^j + \partial_x^2 u_{i-2}^j}{16\Delta t^2} + \frac{\partial_x^4 u_i^{j+1} + 2\partial_x^4 u_x^j + \partial_x^4 u_i^{j-1}}{4\Delta x^4} = \\ &\frac{1}{4}(u_i^j + u_{i-1}^{j-1} + u_i^{j-1} + u_{i-1}^j)_{xx} + \frac{1}{4}([G'(u_i^j)] + [G'(u_{i-1}^{j-1})] + \\ &[G'(u_{i-1}^j)] + [G'(u_{i-1}^j)])_{xx}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} w_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - w_{i+\frac{1}{2}}^j \\ 0 \\ -u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} + u_{i+\frac{1}{2}}^j \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} v_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - v_i^{j+1/2} \\ -u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} + u_i^{j+1/2} \\ p_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} - p_i^{j+1/2} \\ -w_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} + w_i^{j+1/2} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} + G'(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2}) \\ -v_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} \\ 0 \\ -p_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $u_i^j \approx u(i \Delta x, j \Delta t)$, Δx 和 Δt 分别是空间步长和时间步长, 且

$$(u_i^j)_{xx} \equiv \partial_x^2 u_i^j = u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j, \quad \partial_x^2 u_i^j = u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1},$$

$$\partial_x^4 u_i^j = u_{i+2}^j - 4u_{i+1}^j + 6u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j, \quad u_i^j = \frac{1}{4}(u_i^j + u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i+1}^j),$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^{j+1} + u_{i+\frac{1}{2}}^j), \quad u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} + u_{i+\frac{1}{2}}^j), \quad u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}),$$

等等.

注1 格式(11)是中心 Preissman 格式^[8],且具离散多辛守恒律^[11]

$$\frac{du_{i+1/2}^{j+1} \wedge dw_{i+1/2}^{j+1} - du_{i+1/2}^j \wedge dw_{i+1/2}^j}{\Delta t} + \frac{(du_{i+1}^{j+1/2} \wedge dw_{i+1}^{j+1/2} - du_{i+1}^j \wedge dw_{i+1}^j) + (du_{i+1/2}^{j+1/2} \wedge dp_{i+1/2}^{j+1/2} - du_{i+1/2}^j \wedge dp_{i+1/2}^j)}{\Delta x} = 0 \quad (12)$$

和离散局部能量守恒律

$$\frac{E_{i+1/2}^{j+1} - E_{i+1/2}^j}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^{j+1} - F_{i+1/2}^j}{\Delta x} = 0,$$

$$E_{i+1/2}^j = \frac{1}{2} [(u_{i+1/2}^j)^2 + (v_{i+1/2}^j)^2 + (p_{i+1/2}^j)^2] + G(u_{i+1/2}^j),$$

$$F_{i+1/2}^j = v_{i+1/2}^j \left[\frac{u_{i+1/2}^{j+1} - u_{i+1/2}^j}{\Delta t} \right] + p_{i+1/2}^j \left[\frac{u_{i+1/2}^{j+1/2} - u_{i+1/2}^j}{\Delta t} \right].$$

注2 格式(10)是非线性“Good” Boussinesq 方程的一个新的十五点差分格式,由于它等价于中心 Preissman 格式(11),所以它是一个多辛积分。

2 数值例子

对非线性“Good” Boussinesq 方程(1)的孤立波及双孤立子碰撞的长时间行为用本文的多辛格式(10)进行数值模拟,并给出模拟结果。方程(2)表明这种解当 $|x| \rightarrow \infty$ 时按指数衰减,所以,对非线性“Good” Boussinesq 方程的差分格式,我们只在有限区间 (X_L, X_R) 上进行数值模拟,且对人工边界 X_L 和 X_R 取得足够远,以满足周期边界条件。本文中的数值模拟均用 Matlab5 语言进行编程计算。为简便起见,对三层格式中的第一层 U^1 也用精确值进行计算。

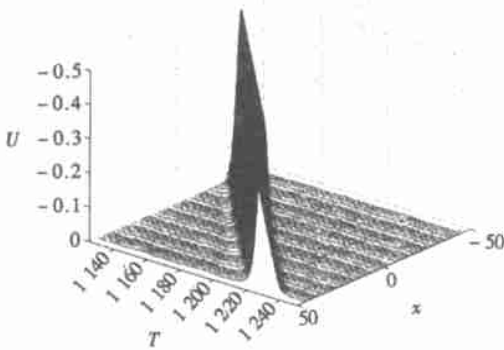


图1 单孤立子模拟结果

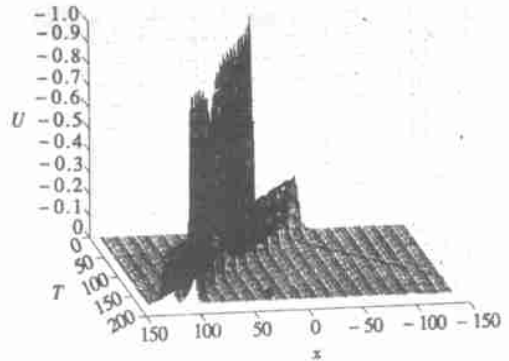


图2 双孤立子的碰撞模拟结果

i. 单孤立子解

首先考虑单孤立子的传播。在非线性“Good” Boussinesq 方程(1)的孤立子解(2)中,取振幅 $A = 0.5$,初值 $\xi_0 = 0$,且 $X_L = -60$, $X_R = 60$,时间步长为 $\Delta t = 0.125$,空间步长为 $\Delta x = 0.5$ 。计算10000次后我们发现方程(10)模拟孤立子运动的结果很好,不出现振荡现象。图1给出了多辛格式(10)在 $t \in [1125, 1250]$ 上的模拟结果。

ii. 双孤立子解

从现在起考虑积分(10)模拟两个孤立子同向传播的情况。图2为两个不同振幅及不同初相的碰撞过程:振幅分别为 $A = 1$ 和 $A = 0.25$,其相应的初相分别为 $\xi_0 = 0$ 和 $\xi_0 = -40$ 。并取 $X_L = -150$, $X_R = 150$,时间步长为 $\Delta t = 0.125$,空间步长为 $\Delta x = 0.5$ 。计算10000次后我们发现方程(10)能够很好地模拟孤立子的碰撞过程,碰撞后,两个孤立子保持原来的形状及

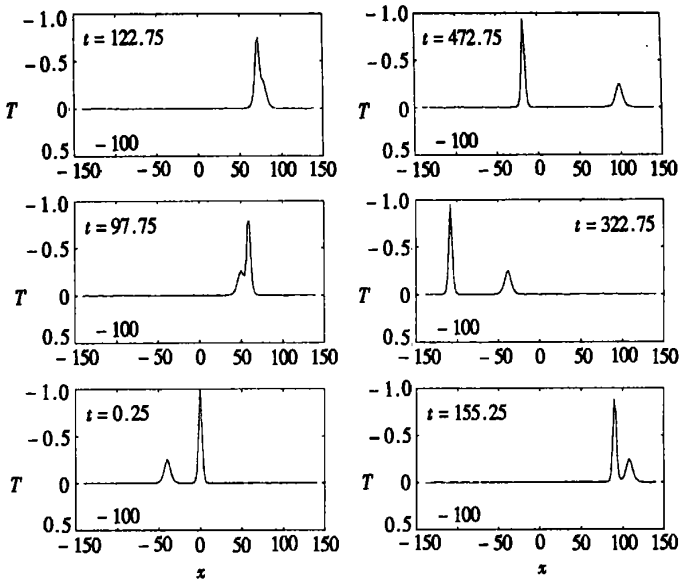


图3 双孤立子的碰撞过程

速度传播, 好象碰撞没有发生过的。图2为 $t \in [0.25, 175]$ 及 $x \in [-145, 145]$ 上的模拟结果。

最后, 方程(10)的两种不同的孤立子在不同时间的碰撞分离过程用图3表示。

数值结果表明, 多辛格式具有良好的长时间数值行为, 它们适合于长时间的数值计算。数值结果与理论分析相符合。

[参 考 文 献]

- [1] Ortega T, Sanz_Serma J M. Nonlinear stability and convergence of finite difference methods for the “Good” Boussinesq equation[J]. Numer Math, 1990, 58(3): 215—229.
- [2] Manoranjan V S, Mitchell A R, Morris J L L. Numerical solutions of the “Good” Boussinesq equation [J]. SIAM J Sci Stat Comput, 1984, 5(4): 946—957.
- [3] Manoranjan V S, Ortega T, Sanz_Serma J M. Solution and anti_solution interactions in the “Good” Boussinesq equation[J]. J Math Phys, 1988, 29(9): 1964—1968.
- [4] FENG Kang, Qin M Z. The symplectic methods for the computation of Hamiltonian equations[A]. In: ZHU You_lan, GUO Ben_yu Eds. Proc of 1st Chinese Cong. on Numerical Methods of PDE's Shanghai, 1986, Lecture Notes in Math [C]. No 1279, Berlin: Springer, 1987, 1—37.
- [5] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[A]. In: FENG Kang Ed. Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Computation of Partial Differential Equations [C]. Beijing: Science Press, 1985, 42—58.
- [6] FENG Kang. Difference schemes for Hamiltonian formulism and symplectic geometry[J]. J Comput Math, 1986, 4(3): 279—289.
- [7] QIN Meng_zhao, Zhu W J. Construction of symplectic schemes for wave equations via hyperbolic functions $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$ [J]. Computers Math Applic, 1993, 26(8): 1—11.
- [8] Bridges TH J, Reich S. Multi_symplectic integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[R].
- [9] Bridges TH J. Multi_symplectic structures and wave propagation[J]. Math Proc Cam Phil Soc,

1997, **121**(2): 147—190.

- [10] Abbott M B, Basco D K. Computational Fluid Dynamics [M]. London: Longman Scientific & Technical, 1989.
- [11] Reich S. Multi_symplectic Runge_Kutta methods for Hamiltonian wave equations [J]. J Comput Phys, 2000, **157**(5): 473—499.

The Multi_Symplectic Algorithm for “Good” Boussinesq Equation

ZENG Wen_ping¹, HUANG Lang_yang¹, QIN Meng_zhao²

(1. Department of Mathematics, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362011, P R China;
2. The State Key Laboratory of Scientific/ Engineering Computing, Institute of Computational
Mathematics and Scientific/ Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, P R China)

Abstract: The multi_symplectic formulations of the “Good” Boussinesq equation were considered. For the multi_symplectic formulation, a new fifteen_point difference scheme which is equivalent to the multi_symplectic Preissman integrator was derived. The numerical experiments show that the multi_symplectic scheme have excellent long_time numerical behavior.

Key words: “Good” Boussinesq equation; multi_symplectic; conservation law