应用数学和力学,第 23 卷 第 6 期(2002 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000_0887(2002)06_0558_05

δ_摄动方法的一点注释*

何吉欢

(上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

(我刊编委何吉欢来稿)

摘要: 研究了最近发展起来的一种新的 δ_摄动方法· 在这种方法里把非线性项转化为含人工参数 δ 的形式(如 u^3 转化为 $u^{1+\delta}$),然后把人工参数作为摄动参数· 指出了这种方法有好多优点,但也有很多局限性· 该文认为何吉欢提出的线化摄动方法可以很好地克服其存在的局限性·

关 键 词: 摄动方法; 人工参数; 非线性方程; 同伦方法

中图分类号: O242.2 文献标识码: A

引 言

最近 Bender 等[1]提出了一种新的摄动方法,在这种方法里引进了一人工摄动参数 δ,为了说明问题,我们考虑无小参数的 Duffing 方程:

$$u'' + u + 10u^3 = 0·$$

我们把非线性项 u^3 用 $u^{1+\delta}$ 代替· 很显然当 $\delta = 0$ 时,方程变成了一个线性方程,当 δ 从零逐渐增加时,其非线性逐渐显示出来·

Bender 等[1]把 δ 作为像传统摄动理论中的小参数 ε 一样,把解展开成 δ 的级数形式:

$$u = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \cdots·$$

应用上述思想,我们可以方便地得到一系列线性方程,从而我们可以逐一求解 u_i($i = 0, 1, 2, 3, \cdots$)·

1 一个简单例子

我们考虑一个非常简单的例子· 求下列方程的一个根[1]:

$$x^5 + x - 1 = 0· \tag{1}$$

应用牛顿迭代算法,我们可得

$$x = 0.754\,877\,67\cdots· \tag{2}$$

δ_摄动法的基本思想是引进一人工参数 δ,这样方程(1) 可写成:

---

* 收稿日期: 2001_01_08; 修订日期: 2002_01_25

基金项目: 中国科学院力学研究所非线性国家重点实验(LNM)室资助项目

作者简介: 何吉欢(1965—),男,浙江诸暨人,教授,博士,下列两个国际杂志的主编:International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation(英国Freund出版公司)和International Journal of Nonlinear Modelling in Science and Engineering(英国剑桥国际出版公司)(E_mail: jhhe@mail.shu.edu.cn).

$$x^{1+\delta}+x-1=0. \tag{3}$$

设方程的解可表示成 δ 的级数形式:

$$x(\delta)=c_0+\delta c_1+\delta^2 c_2+\cdots \tag{4}$$

我们可以方便地求得级数的系数, 我们只写出前面几项[1,2]:

$$c_0=0.5,\quad c_1=0.173\,28,\quad c_2=-0.086\,64,\quad c_3=0.051\,39,$$

$$c_4=-0.033\,77,\quad c_5=0.023\,77,\quad c_6=-0.017\,58.$$

为了便于比较, 我们写出前面几项近似解(δ= 4):

$$x_0=c_0=0.5,$$

$$x_1=c_0+4c_1=1.193\,12,$$

$$x_2=c_0+4c_1+16c_2=-0.193\,12,$$

$$x_3=c_0+4c_1+16c_2+64c_3=3.095\,84,$$

$$x_4=c_0+4c_1+16c_2+64c_3+256c_4=-5.549\,28,$$

$$x_5=c_0+4c_1+16c_2+64c_3+256c_4+1\,024c_5=18.791\,2,$$

$$x_6=c_0+4c_1+16c_2+64c_3+256c_4+1\,024c_5+4\,096c_6=-54.322\,4.$$

虽然 Bender 等[1]的文章得到了一个收敛的级数解, 但我们可以发现前面几项近似解发生激烈震荡.

在工程应用中, 我们希望通过很少的几项来很好地逼近真解. 我们知道摄动解的阶数越高, 计算量就越大. 作者提出的一些新的摄动理论[3~5]可以很好地克服这一困难, 在文献[6], 我们对一些新的摄动方法进行了评述. 在本文里我们将用线化摄动方法[5]来克服 δ摄动方法中的缺陷.

2　线化摄动方法

线化摄动方法[5]也是引进一人工参数 p, 但引进方式与 δ摄动方法不同. 在这种方法里, 我们把方程(1) 中的非线性项线化:

$$x^5\sim bx, \tag{5}$$

式中 b 为线化系数, 它可以用很多方法确定. 令

$$\int_0^1 x(bx-x^5)\,\mathrm{d}x=0, \tag{6}$$

即可得

$$b=\frac{3}{7}, \tag{7}$$

这样我们可以得到方程(1) 的线化方程:

$$(1+b)x-1=0. \tag{8}$$

我们再把方程(1) 写成如下形式

$$(1+b)x-1=bx-x^5, \tag{9}$$

在上述方程中引进一人工参数 p:

$$(1+b)x-1=p(bx-x^5), \tag{10}$$

很显然当人工参数 p 单调地从 0 增加到 1 时, 就是线化方程(8) 逐渐地变形到原方程(1). 因此如果我们能寻找到方程(10) 的一个级数解, 这个级数解将随着人工参数的逐渐增加而趋向于真解.

由于 $0 \leqslant p \leqslant 1$, 所以我们有理由把它看成是摄动参数, 这和同伦摄动方法相一致[3,4]• 我们把方程(10) 称为含人工参数的摄动方程•

按照传统的摄动理论, 我们可以假设方程(10) 的解可表示为

$$x = c_0 + pc_1 + p^2c_2 + \cdots, \tag{11}$$

其中的系数可以非常方便地求得• 我们只写出前几项:

$$c_0 = \frac{1}{1+b} = 0.7,$$

$$c_1 = \frac{bc_0 - c_0^5}{1+b} = 0.092\ 35,$$

$$c_2 = \frac{bc_1 - 5c_0^4c_1}{1+b} = -0.032\ 355,$$

这样我们前二阶近似解:

$$x_0 = c_0 = 0.7,\quad x_1 = c_0 + c_1 = 0.792\ 35,\quad x_2 = c_0 + c_1 + c_2 = 0.759\ 99$$

可以看出二阶近似与精确解的误差只有 0.6%• 通过简单的计算, 我们可以得到精度更高的高阶近似•

3 应　　用

作为应用, 我们考虑圆球在无摩擦弯管里的运动• 设恢复力与位移立方成正比, 于是我们可得以下方程[7~9]

$$u'' + \varepsilon u^3 = 0, \tag{12}$$

初始条件为 $u(0) = A$, $u'(0) = 0$•

在这里系数 ε 不要求是小参数, 即可以 $0 < \varepsilon < \infty$• 对这一简单的方程, 即使 $\varepsilon \ll 1$, 传统的摄动理论也无能为力•

我们把非线性项线化:

$$\varepsilon u^3 \sim \omega^2 u,$$

于是可得线化方程:

$$u'' + \omega^2 u = 0, \tag{13}$$

我们再把方程(12) 写成如下形式:

$$u'' + \omega^2 u = \omega^2 u - \varepsilon u^3, \tag{14}$$

这样我们可引进一人工参数:

$$u'' + \omega^2 u = p(\omega^2 u - \varepsilon u^3)• \tag{15}$$

假设方程(15) 的解可表示为 p 的级数形式:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots,$$

我们可以得到求解 u_0 和 u_1 的微分方程:

$$u_0'' + \omega^2 u_0 = 0,\quad u_0(0) = A,\quad u_0'(0) = 0, \tag{16}$$

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = \omega^2 u_0 - \varepsilon u_0^3,\quad u_1(0) = 0,\quad u_1'(0) = 0• \tag{17}$$

方程(16) 的解为 $u_0(t) = A\cos\omega t$• 把 u_0 代入方程(17) 得:

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = A\left(\omega^2 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)\cos\omega t - \frac{1}{4}\varepsilon A^3\cos 3\omega t• \tag{18}$$

为了消除长期项, 令

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3\varepsilon A^2}. \tag{19}$$

解方程(18),并考虑初始条件 $u_1(0) = 0$ 和 $u_1'(0) = 0$,我们可得:

$$u_1(t) = -\frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2}(\cos 3\omega t - \cos\omega t). \tag{20}$$

令 $p = 1$,我们可得一阶近似:

$$u = u_0 + u_1 = A\cos\omega t - \frac{\varepsilon A^3}{32\omega^2}(\cos 3\omega t - \cos\omega t), \tag{21}$$

其近似周期为

$$T = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3\varepsilon^{1/2}A} = \frac{7.255}{\varepsilon^{1/2}A}. \tag{22}$$

而其精确周期为[9]

$$T_{ex} = 7.4164\varepsilon^{-1/2}A^{-1}. \tag{23}$$

可见对于所有 $\varepsilon > 0$,其相对误差小于 2.2%.

4　结　　论

我们这里给出了一种新的摄动方法,这种方法有效地把线化摄动方法和同伦摄动方法相结合,很显然这种方法比 δ 摄动方法要优越得多. 该方法比其他摄动理论也具有一定的优越性,如改进的 L_P 方法[10~13],记帐式的参数摄动方法[14]. 这一方法可归类于同伦摄动方法[3,4]. 这一新的摄动方法有望在工程中得到广泛的应用.

[参　考　文　献]

[1] Bender C M, Pinsky K S, Simmons L M. A new perturbative approach to nonlinear problems[J]. J Math Phys, 1989, **30**(7): 1447—1455.

[2] Awrejcewicz J, Andrianov I V, Manevitch L I. Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications[M]. Heidelberg: Springer, 1998.

[3] HE Ji_huan. Homotopy perturbation technique[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, **178**(3/4): 257—262.

[4] HE Ji_huan. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems[J]. Int J Nonl Mech, 2000, **35**(1): 37—43.

[5] HE Ji_huan. A new perturbation technique which is also valid for large parameters[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **229**(5): 1257—1263.

[6] HE Ji_huan. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000, **1**(1): 51—70.

[7] Andrianov I, Awrejcewicz J. Construction of periodic solution to partial differential equations with nonlinear boundary conditions[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000, **1**(4): 327—332.

[8] HE Ji_huan. Iteration perturbation method for strongly nonlinear oscillations[J]. Journal of Vibration and Control, 2001, **7**(5): 631—642.

[9] Acton J R, Squire P T. Solving Equations With Physical Understanding[M]. Bristol and Boston: Adam Hilger Ltd, 1985.

[10] HE Ji_huan. Modified Lindstedt_Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part Ⅰ:

expansion of a constant[J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 2002, **37**(2): 309—314.

[11] HE Ji_huan. Modified Lindstedt_Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part Ⅱ: a new transformation[J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 2002, **37**(2): 315—320.

[12] HE Ji_huan. Modified Lindstedt_Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations Part Ⅲ: double series expansion[J]. International Journal of Non_Linear Science and Numerical Simulation, 2001, **2**(4): 317—320.

[13] HE Hi_huan. Bookkeeping parameter in perturbation methods[J]. International Journal of Non_Linear Science and Numerical Simulation, 2001, **2**(3): 257—264.

A Note on Delta_Perturbation Expansion Method

HE Ji_huan

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechancis, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: The Delta_perturbation expansion method, a kind of new perturbation technique depending upon an artificial parameter Delta was studied. The study reveals that the method exits some advantages, but also exits some limitations. To overcome the limitations, the so_called linearized perturbation method proposed by HE Ji_huan can be powerfully applied.

Key words: perturbation method; artificial parameter; nonlinear equation; homotopy