

文章编号: 1000-0887(2002) 06-0588-09

有限振幅 T_S 波在非平行边界层中的非线性演化研究*

唐登斌, 夏 浩

(南京航空航天大学 空气动力学系, 南京 210016)

(周恒推荐)

摘要: 研究对非平行边界层稳定性有重要影响的非线性演化问题, 导出与其相应的抛物化稳定性方程组, 发展了求解有限振幅 T_S 波的非线性演化的高效数值方法。这一数值方法包括预估-校正迭代求解各模态非线性方程并避免模态间的耦合, 采用高阶紧致差分格式, 满足正规化条件, 确定不同模态非线性项表和数值稳定地作空间推进。通过给出 T_S 波不同的初始幅值, 研究其非线性演化。算例与全 Navier-Stokes 方程的直接数值模拟(DNS)的结果作了比较。

关键词: 边界层稳定性; 非线性演化; 非平行性; T_S 波; 紧致格式; 空间模态; 抛物化稳定性方程

中图分类号: V211.1 **文献标识码:** A

引 言

研究非平行性流边界层的非线性稳定性问题, 主要考虑不稳定波(T_S 波)的演化和不同频率波之间的相互干扰。这对于精确模拟边界层扰动演化规律、探讨向湍流转捩的过程是十分重要的, 其结果将会更接近于实际情况。

由于同时考虑非平行性和非线性演化问题的复杂性, 给研究工作带来了困难。到目前为止, 可用方法仍很有限。由 Herbert 提出的抛物化稳定性方程(PSE)方法是研究该类问题新的有效方法^[1]。考虑到在边界层内速度型、特征波长和增长率沿流向变化的缓慢性, 因而其流向二阶导数以及一阶导数的乘积小到可以忽略^[2], 这样从全 Navier-Stokes 方程导出的扰动方程呈抛物型。文中结合了用 Fourier 级数方法把扰动波分解为基本模态和低频谐波模态的组合, 导出其相应方程。

本文所发展的数值计算方法, 既有较高的精度, 又在与其他方法(如 DNS 方法、结合 Landau 振幅展开式的 OSE 方法等)相比时, 显示出简单和速度快的特点。

1 控制方程

从 Navier-Stokes 方程出发, 考虑主流的非平行性, 保留扰动的非线性项, 得到二维扰动方

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2002_02_09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972026)

作者简介: 唐登斌(1941—), 男, 江苏建湖人, 教授(E-mail: njdbtang@jlonline.com)。

程组, 并将扰动波写成如下谐波形式:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{u}_n(x, y) \\ \hat{v}_n(x, y) \\ \hat{p}_n(x, y) \end{pmatrix} e^{i \int_{x_0}^x \alpha_n(\xi) d\xi - in\omega t}, \quad (1)$$

式中: 用负模态表示共轭 c. c., u, v, p 分别为沿流向、法向的速度分量和压强. 依据剖面函数沿流向缓慢变化的特性, 并记 $\mathbf{q} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}]^T$, 可得到如下导数公式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[i\alpha_n \mathbf{q}_n + \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial x} \right] e^{i \int_{x_0}^x \alpha_n(\xi) d\xi - in\omega t}, \quad (2)$$

以及

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\alpha_n^2 \mathbf{q}_n + 2i\alpha_n \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial x} + i \frac{d\alpha_n}{dx} \mathbf{q}_n \right] e^{i \int_{x_0}^x \alpha_n(\xi) d\xi - in\omega t}. \quad (3)$$

同时注意到有下面的关系式:

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n \exp \left[i \int_{x_0}^x \alpha_n d\xi - in\omega t \right] \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{u}_m \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x \alpha_m d\xi - im\omega t \right] \right).$$

将上式右边第一项的求和指标减去 m , 则方程右边为:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-m} \exp \left[i \int_{x_0}^x \alpha_{n-m} d\xi - i(n-m)\omega t \right] \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{u}_m \right] \times \right. \\ & \left. \exp \left[i \int_{x_0}^x \alpha_m d\xi - im\omega t \right] \right) = \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-m} \left[\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{u}_m \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t). \quad (4) \end{aligned}$$

进而可得到其他关系式:

$$v' \frac{\partial u'}{\partial y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial y} \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t), \quad (5)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-m} \left[\frac{\partial \hat{v}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{v}_m \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t), \quad (6)$$

$$v' \frac{\partial v'}{\partial y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t). \quad (7)$$

将这些表达式代入扰动方程组, 由于方程组左边是线性的(非线性项集中在方程的右端), 微分可以与求和交换次序, 于是得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[L_n \mathbf{q}_n + M_n \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial x} + \frac{d\alpha_n}{dx} N_n \mathbf{q}_n \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x \alpha_n d\xi - in\omega t \right] = \\ & \left(\begin{array}{c} 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_{n-m} \left[\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{u}_m \right] + \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial y} \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_{n-m} \left[\frac{\partial \hat{v}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{v}_m \right] + \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m) d\xi \right] \right\} \exp(-in\omega t) \end{array} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

式中: $L_n = L_n(\alpha_n)$ 、 $M_n = M_n(\alpha_n)$ 以及 $N_n = N_n(\alpha_n)$ 表示模态 n 的 y 方向线性微分算子。利用三角函数系的正交性, 上式两边同时乘以 $\exp(-il\omega t)$ 并作 $[-\pi/\omega, \pi/\omega]$ 上的积分, 只有 $n = l$ 的项不为零, 其余项均为零; 再由 l 的任意性, 所以可以去掉求和符号, 最后得到非线性非平行的抛物化稳定性方程组:

$$L_n \mathbf{q}_n + M_n \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial x} + \frac{d\alpha_n}{dx} N_n \mathbf{q}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_{n-m} \left(\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{u}_m \right) + \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial y} \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m - \alpha_n) d\xi \right] \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_{n-m} \left(\frac{\partial \hat{v}_m}{\partial x} + i\alpha_m \hat{v}_m \right) + \hat{v}_{n-m} \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial y} \right] \exp \left[i \int_{x_0}^x (\alpha_{n-m} + \alpha_m - \alpha_n) d\xi \right] \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。该方程左边就单个 n 来说, 在形式上是和线性的非平行抛物化稳定性方程一致的, 而在方程的右端则增加了非线性修正项。

初始条件: 利用线性的非平行抛物化稳定性方程解。

边界条件: 扰动在壁面上为零; 在远离壁面处逐渐消逝, 可写为:

$$\begin{cases} \hat{u}_n |_{y=0} = 0, \hat{v}_n |_{y=0} = 0, & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \hat{u}_n |_{y \rightarrow \infty} = 0, \hat{v}_n |_{y \rightarrow \infty} = 0 & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases} \quad (10)$$

2 正规化条件

考虑到主控方程(9)式是带未知参数 $\alpha(x)$ 的偏微分方程, 因而还需要另一个条件来定解。文中采用一种称之为“正规化条件”的表达式^[2]使慢变特性得到满足, 在每个推进的迭代过程中对如下扰动幅值的空间增长率变化作限制:

$$\gamma_m = -\alpha + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{A_m} \frac{dA_m}{dx} \right], \quad (11)$$

式中: $A_m = |\hat{u}_n|_{\max}$, “max”表示取最大值(对应的 $y = y_m$)。

需要指出的是, 在推导控制方程(9)式时, 将 T_S 波代入扰动方程组, 通过合并含谐波平方的项并令系数为零, 也可以使问题定解。但是这样所构成的方程太繁杂, 对数值求解极为不利。因此, 我们采用正规化条件的办法来使问题定解。

正规化条件可写成不同形式:

$$\frac{\partial \hat{u}_n(x, y_m)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

或者

$$\int_0^{\infty} [\hat{u}_n^+, \hat{v}_n^+] \cdot \frac{\partial [\hat{u}_n, \hat{v}_n]^T}{\partial x} dy = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (13)$$

式中的“+”表示取共轭复数。将对每一模态在每一推进计算中通过预估_校正迭代使得正规化条件得以满足。

3 数值方法

非线性的抛物化稳定性方程组比线性的方程组在右端多出了非线性项, 因而各个方程由于右端项耦合在一起会大大增加计算量。但是, 方程左端的线性形式则可以通过类似于求解

线性 PSE 的预估_校正方法来求解。同时我们从主控方程(9)式也可以看到在处理非线性方程时的特点:

(a) 不需要象 OSE 方法处理非线性问题那样由于没有 $\partial/\partial x$ 项而不得不作特征值迭代, 同时还要对控制方程作线性化处理后的 Newton 迭代。这样的解法其实是相当复杂的, 因为它必须把差分离散后的所有方程(包含所有离散点上的所有模态)均耦合在一起求线化解, 然后再作局部特征值迭代^[3]。

(b) 由于 $\partial/\partial x$ 项的存在, 在前后两站能施展迭代解法。解非线性抛物化稳定性方程组采用同线性 PSE 类似的预估_校正方法^[4], 各个模态在每一预估_校正迭代步中可以不用耦合独立地求解, 提供给其他模态的数据是该模态的上一次迭代值, 因而大大加快了计算速度。

3.1 差分离散和模态 Fourier 级数的截断

控制方程(9)中的流向导数采用逆风差分格式:

$$\left. \frac{\partial q_n}{\partial x} \right|_j = \frac{q_{n,j}^k - q_{n,j-1}^k}{x_j - x_{j-1}}, \quad (14)$$

式中, j, k 分别是 x, y 方向的网格下标。因为上式是隐式格式, 保证了推进时的数值稳定。引进 $\hat{s}_n = \partial \hat{u}_n / \partial y$ 作为新变量, 并扩充 $q_n = [\hat{u}_n, \hat{v}_n, \hat{p}_n, \hat{s}_n]^T$, 记(9)式的右端非线性项为 $T_n(\dots, q_{-N}, \dots, q_{N-1}, q_N, \dots)$, 化得如下半离散系统:

$$\frac{\partial q_{n,j}^k}{\partial y} = A_{n,j}^k \cdot q_{n,j}^k + B_{n,j}^k \cdot q_{n,j-1}^k + \left\{ T_{n,j}^k \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 q_{n,j}^k}{\partial y^2} = C_{n,j}^k q_{n,j}^k + D_{n,j}^k q_{n,j-1}^k + E_{n,j}^k \frac{\partial q_{n,j-1}^k}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial T_{n,j}^k}{\partial y} \right\}, \quad (16)$$

式中 A, B, C, D 和 E 均为 4×4 复矩阵, 参数取值在 (j, k) 处。为提高离散 y 方向导数的精度, 采用了两点 4 阶紧致差分格式^[5], 进一步把半离散系统再离散成:

$$q_{n,j}^k - q_{n,j}^{k-1} = \frac{hk}{2} \left[\frac{\partial q_{n,j}^k}{\partial y} + \frac{\partial q_{n,j}^{k-1}}{\partial y} \right] - \frac{h^2 k}{12} \left[\frac{\partial^2 q_{n,j}^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 q_{n,j}^{k-1}}{\partial y^2} \right] + o(h^5_k). \quad (17)$$

把(15)~(16)式带入(17), 并改写成矩阵形式:

$$-L_{n,j}^{k-1} \cdot q_{n,j}^{k-1} + M_{n,j}^k \cdot q_{n,j}^k = r_{n,j-1}^k + \left\{ t_{n,j}^k \right\}, \quad (18)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{n,j}^{k-1} = I + \frac{hk}{2} A_{n,j}^{k-1} + \frac{h^2 k}{12} C_{n,j}^{k-1}, \\ M_{n,j}^k = I - \frac{hk}{2} A_{n,j}^k + \frac{h^2 k}{12} C_{n,j}^k, \\ r_{n,j-1}^k = r_{n,j-1}^{k-1} - r_{n,j-1}^k, \\ r_{n,j-1}^k = \frac{hk}{2} \left[B_{n,j}^k + \frac{hk}{6} D_{n,j}^k \right] \cdot q_{n,j-1}^k + \frac{h^2 k}{12} E_{n,j}^k \frac{\partial q_{n,j-1}^k}{\partial y}, \\ t_{n,j}^k = \frac{hk}{2} (T_{n,j}^{k-1} + T_{n,j}^k) + \frac{h^2 k}{12} \left[\frac{\partial T_{n,j}^{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial T_{n,j}^k}{\partial y} \right]. \end{array} \right.$$

当(18)式取遍 $k = 0, 1, \dots$ 时, 可得非线性方程组。在讨论它的解法之前先对展开式(1)作截断分析和确定模态的选取。

考虑到展开式(1)中的 n 不可能真正取得 ∞ , 只能是取有限项(事实上, 我们分析的还是小振幅, 如 $0.25\% U_\infty \sim 0.3\% U_\infty$, 因此要选取的项应该十分有限); 所以将式中的级数截取为

N 阶谐波以下, 即以上所有求和均成为: $\sum_{n=-N}^{n=N} \dots$ 和 $\sum_{m=-N}^{m=N} \dots$ 。按分析, 非线性将会在由基本流和单频率的波组成的初始场产生高阶谐波, TS 波和它的谐波序列 $0F, F, 2F, 3F, \dots$ 具有幅值: A^2, A, A^2, A^3, \dots 。我们取 $U_\infty = 1, A = 0.3\%$, 则 $A^2 = 0.0009\%, A^3 = 0.0000027\%, \dots$ 。可见随着谐波阶数的增加, 其幅值却很快地衰减。为了便于研究, 本文仅仅截取二阶以下的谐波进行分析和计算。这样, 模态一共只有 5 个: $-2, -1, 0, 1, 2$, 即 $N = 2$ 。 n 的取值范围是 $[-2, 2]$ 。由于剖面函数都是复的, 而扰动物理场应该是实的, 所以由展开式(1) 不难有下面的关系式:

$$\hat{u}_n = \hat{u}_{-n}, \hat{v}_n = \hat{v}_{-n}, \hat{p}_n = \hat{p}_{-n} \tag{19}$$

对于波数也有类似的结果:

$$(\alpha_r)_n = -(\alpha_r)_{-n}, \gamma_n = \gamma_{-n} \tag{20}$$

写成合成波数:

$$\alpha_n = -\alpha_{-n}^+ \tag{21}$$

式中 $\alpha_r = \text{Re}(\alpha), \gamma = -\text{Im}(\alpha)$ 。

用了负模态表示, 就可以减少待求模态数, 现在剩下的只有 $N + 1 = 3$ 个了。

3.2 非线性项 T_n 中各阶模态的确定

如果考虑 N 阶谐波, 由于复模态的谐波和对应的正模态的谐波一一对应, 最后要求解的有且只有 $N + 1$ 个模态: $0, 1, \dots, N$ 。下面的表格就是针对具体选取 $N = 2$ 时, 所确定出来的模态对应关系以及它们的数量级分析。

表 1 模态 $n = 0$ 及其非线性项的确定

该模态初始幅值为 A^2						
m	$n - m$	模态 m	模态 $n - m$	对应幅值	合成波数	状态
-2	2	2	2	A^4	$2\alpha_2 - \alpha_0$	取
-1	1	1	1	A^2	$2\alpha_1 - \alpha_0$	取
0	0	0	0	A^4	α_0	取
1	-1	1	1	A^2	$2\alpha_1 - \alpha_0$	取
2	-2	2	2	A^4	$2\alpha_2 - \alpha_0$	取

表 2 模态 $n = 1$ 及其非线性项的确定

该模态初始幅值为 A						
m	$n - m$	模态 m	模态 $n - m$	对应幅值	合成波数	状态
-2	3	2	3	A^5	$\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_1$	舍
-1	2	1	2	A^3	α_2	取
0	1	0	1	A^3	$\alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_1$	取
1	0	1	0	A^3	α_0	取
2	-1	2	1	A^3	$\alpha_{-1} + \alpha_2 - \alpha_1$	取
3	-2	3	2	A^5	$\alpha_{-2} + \alpha_3 - \alpha_1$	舍

表中加下划线的表示该值超出了其取值范围或者表示量级可以忽略。由于 $N = 2$, n 及 m 的取值范围是 $[-2, 2]$, 由此可确定出非线性项中模态的取舍(见表中最右一栏)。显然, 舍去的就是数量级更小的项(从表中“对应幅值”可以看出)。根据上述分析, 可方便地计算非线性项 T_n 及 $\partial T_n / \partial y$ 了。而初始幅值的确定, 则是把线性 PSE 的结果 q 除以 $|\hat{u}|_{\max}$ 作归一化后, 再在计算(18)式时根据对应的模态乘以相应的幅值。

表 3 模态 $n = 2$ 及其非线性项的确定

$n = 2$		该模态初始幅值为 A^2				
m	$n - m$	模态 m	模态 $n - m$	对应幅值	合成波数	状态
-2	<u>4</u>	2	<u>4</u>	<u>A^6</u>	$\alpha_4 + \alpha_{-2} - \alpha_2$	舍
-1	<u>3</u>	1	<u>3</u>	<u>A^4</u>	$\alpha_3 + \alpha_{-1} - \alpha_2$	舍
0	2	0	2	A^4	α_0	取
1	1	1	1	A^2	$2\alpha_1 - \alpha_2$	取
2	0	2	0	A^4	α_0	取
<u>3</u>	-1	<u>3</u>	1	<u>A^4</u>	$\alpha_3 + \alpha_{-1} - \alpha_2$	舍
<u>4</u>	-2	<u>4</u>	2	<u>A^6</u>	$\alpha_4 + \alpha_{-2} - \alpha_2$	舍

3.3 非线性 PSE 的空间推进解法

(a) 计算域的坐标变换

实际计算是不可能将 $y \in [0, \infty)$, 必须进行坐标变换。倘若采用将 $y \in [0, \infty)$ 变换到 $\eta \in [0, 1]$, 因(15)式中显含 $\partial / \partial y$, 整个变换会导致奇异。为避免奇性, 这里采用将 $y \in [0, y_{\max}]$ 变换到 $\eta \in [0, 1]$ 的办法, 即:

$$y = \frac{a\eta}{b - \eta} \quad (22)$$

其中: $b = 1 + a/y_{\max}$, $a = y_{\max}y_i / (y_{\max} - 2y_i)$, y_i 是一个可选择的参数。

(b) 边界条件和初始条件

经过上述坐标变换后, 为了确保“空间推进”过程的数值稳定, 外边界条件须作修改。应由原来的 Dirichlet 形式改为 Neumann 形式或混合型的边界条件。因为在边界层外的流动是无粘的, 于是外边界条件可由令(9)式算子 L_n, M_n, N_n 中的 $Re \rightarrow \infty$ 得到。

控制方程组(9)在 x 方向是抛物型的, 求解还需要初始值 $\alpha_{n,0}$ 和 \hat{q}_n, δ 。这里是采用线性抛物化稳定性方程的解作为初始值。

(c) 空间推进解法

将采用预估-校正的空间推进方法来求解非线性抛物化稳定性方程。这里只需研究(0, 1, 2)3个模态, 因此这也是 n 和 $n - m$ 的值域。下面分步说明解法。首先, 3个模态互不相干的同时推进计算是很容易实现的, 只是由于每个模态的方程右端都多了一个修正项, 所以要迭代多次来求解相当于线性 PSE 情况下的一次简单求解线性方程组。在非线性修正项中, 属于自身模态的变量取前次迭代值, 而属于其他模态的量可视为给定。然后, 再来考虑将3个模态的“协助”式求解, 即按顺序的依次迭代求解 0、1、2 模态的方程, 分别对 3 个模态使用正规化条件(12)式计算 $q^{(p+1)}$:

$$\alpha_j^{(p+1)} = \alpha_j^{(p)} - i \left[\frac{1}{\hat{u}_{(\max),j}} \frac{\hat{u}_{(\max),j} - \hat{u}_{(\max),j-1}}{\Delta x_j} \right], \quad (23)$$

直到满足判据: $\frac{1}{\hat{u}_{(\max),j}} \frac{\hat{u}_{(\max),j} - \hat{u}_{(\max),j-1}}{\Delta x_j} \leq \varepsilon \approx 10^{-8}$, 然后向前推进。

需指出的是, 该法在求解非线性方程(18)式时采用了迭代, 而该迭代依赖于所有模态的已计算结果, 但避免了模态间的耦合求解, 使计算简单而快速, 这正是该法的优势所在。

尽管讨论的具体形式是 $N = 2$, 但不难发现把上面的“2”换成“ N ”是完全可行的。因此, 整个分析以及计算过程同样适合模态数大于 2 的情况。

4 结果和分析

对初始幅值 $A = 0.25\%$ 和 $A = 0.3\%$, 频率 $F = 86$ 的 T_S 波的非线性演化作了计算。其扰动幅值放大率分别见图 1a 和 1b。从与线性(LPSE)结果的比较可以看出, 非线性(NPSE)的作用使得扰动振幅放大率的峰值大大增加, 扰动的衰减则向下游移动, 这个非线性作用随初始振幅的增加而显著增大。由图还表明, 二阶谐波受 TS 波的影响十分显著, 放大率从最初 $Re = 400$ 的 0.0009% 到 $Re = 820$ 时的峰值 0.272%, 其变化是相当剧烈的。

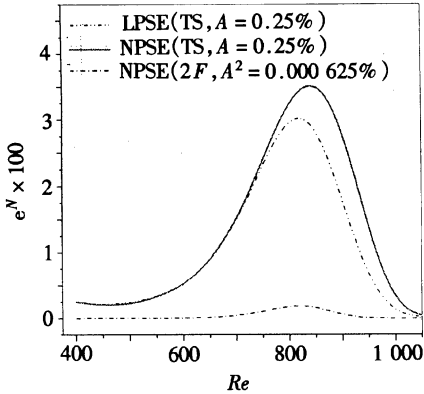


图 1a 二维 T_S 波及其二次谐波放大率的非线性演化

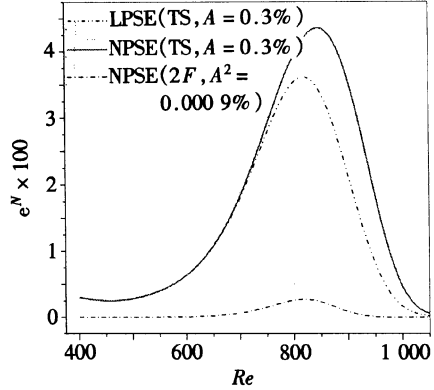


图 1b 二维 T_S 波及其二次谐波放大率的非线性演化

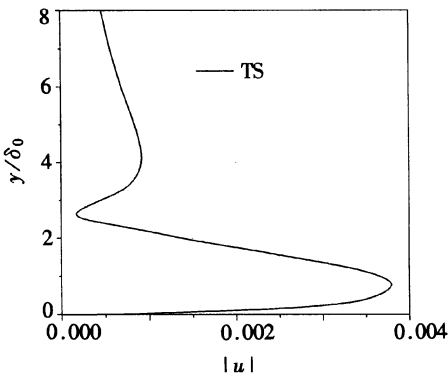


图 2a T_S 波扰动速度 u 的剖面模值函数

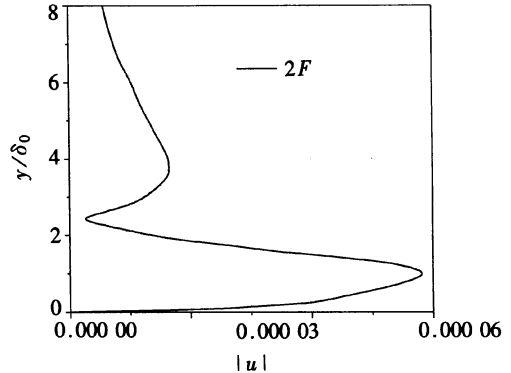


图 2b T_S 波二次谐波扰动速度 u 的剖面模值函数

再看扰动复速度剖面模值的变化, 图 2~ 图 3 显示的是对应于不同流向位置 ($Re = 600$ 、

800) 的速度剖面的模值函数 $|u|$ 分布曲线(为便于比较,取坐标轴比例与所比之图相同)• 从速度剖面上看,二次谐波的形状函数与 T_S 波十分相似,正是由于二阶模态的非线性项含有 T_S 波的乘积所致• 由此可以看出,高阶谐波模态受基本模态的影响是十分显著的,不仅从方程本身可看出,数值计算结果也证明了这一点•

文中比较了在 $Re = 800$ 时本方法的计算结果和 Spalart 的用全 Navier_Stokes 方程的精确 DNS 结果^[2](图 3),两者符合甚好,可见本方法有较高的精度,而计算时间比 DNS 方法成数量级地减少,又有其速度快的优势•

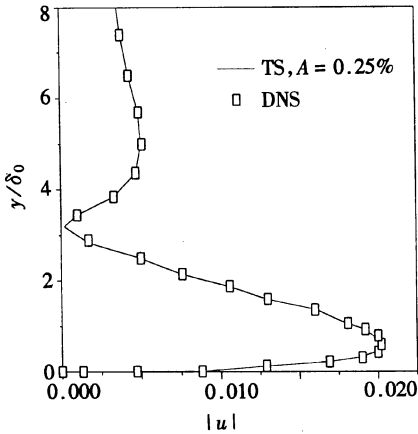


图 3a T_S 波扰动速度 u 的剖面模值函数和 Spalart 的 DNS 结果

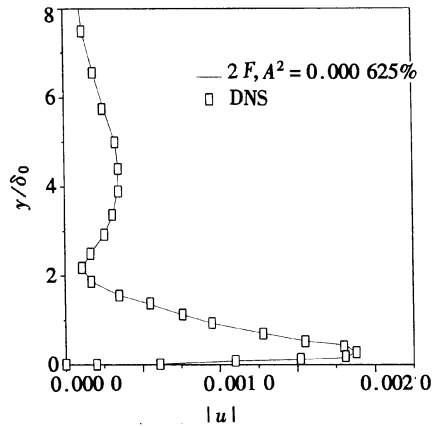


图 3b T_S 波二次谐波扰动速度 u 的剖面模值函数和 Spalart 的 DNS 结果

5 结 论

本文基于 PSE 理论,发展了数值计算方法,研究有限振幅 T_S 波在平行边界层中的非线性演化问题• 非线性作用将显著地增加扰动振幅放大率的峰值,推迟了衰减的发生,直接影响所产生的高阶谐波和波之间的干扰,特别是这个作用随扰动的初始振幅的增大而显著增强• 计算表明了文中方法是精确和高效的•

[参 考 文 献]

- [1] Herbert T. Parabolized stability equations[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, Palo Alto, CA Annual Reviews Inc, 1997, 29: 245—283.
- [2] Bertolotti F P, Herbert T, Spalart P R. Linear and nonlinear stability of the blasius boundary layer [J]. J Fluid Mech, 1992, 242: 441—474.
- [3] Balakumar P. Finite amplitude stability of attachment line boundary layers[Z]. AIAA paper 98_0338, 1998.
- [4] XIA Hao, TANG Deng_bin. A detailed non_parallel stability analysis using parabolized stability equations[A]. In: ZHANG Han_xin Ed Proc 4th Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 2000_09_18_22[C]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China Press, 2000, 392—397.
- [5] Malik M R. Numerical methods for hypersonic boundary layer stability[J]. J Computational Physics, 1990, 86: 376—413.

Nonlinear Evolution Analysis of T_S Disturbance Wave at Finite Amplitude in Nonparallel Boundary Layers

TANG Deng_bin, XIA Hao

(Department of Aerodynamics, Nanjing University of Aeronautics
and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: The nonlinear evolution problem in nonparallel boundary layer stability was studied. The relative parabolized stability equations of nonlinear nonparallel boundary layer were derived. The developed numerical method, which is very effective, was used to study the nonlinear evolution of T_S disturbance wave at finite amplitudes. Solving nonlinear equations of different modes by using predictor-corrector and iterative approach, which is uncoupled between modes, improving computational accuracy by using high order compact differential scheme, satisfying normalization condition, determining tables of nonlinear terms at different modes, and implementing stably the spatial marching, were included in this method. With different initial amplitudes, the nonlinear evolution of T_S wave was studied. The nonlinear nonparallel results of examples compare with data of direct numerical simulations (DNS) using full Navier-Stokes equations.

Key words: boundary layer stability; nonlinear evolution; nonparallelism; T_S disturbance wave; compact scheme; spatial mode; parabolized stability equation