文章编号: 1000_0887(2002) 06_0611_08

构造 m_增生算子方程解的 Ishikawa 迭代程序*

曾 六 川

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 设 X 是一致光滑 Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 是具闭的定义域 $D(T)$ 的 m_增生算子· 不经假设值域 $R(T)$ 有界与对 $[0, 1]$ 中序列 $\{\beta_n\}$ 作任何限制, 就表征了用于构造 m_增生算子方程 $x + Tx = f$ 的解的具误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性· 而且, 若 T 还是局部 Lipschitz 算子, 则给出了 m_增生算子方程 $x + Tx = f$ 的逼近解的误差估计·

关 键 词: m_增生算子; Ishikawa 迭代序列; 一致光滑 Banach 空间
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言与预备知识

设 X 是具范数 $\|\cdot\|$ 的实 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表 X 与 X^* 之间的广义对偶对· 正规对偶映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 定义如下:

$$J(x) = \{ f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \} \qquad x \in X·$$

回顾到, X 的光滑模 $\rho_X(\cdot)$ 定义为

$$\rho_X(\tau) = \sup\{ (\|x + y\| + \|x - y\|)/2 - 1: x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| \leqslant \tau\} \qquad \tau > 0,$$

并且, X 称为一致光滑的, 如果 $\lim_{\tau \downarrow 0} \rho_X(\tau)/\tau = 0$· 已熟知[1], X 是一致光滑的, 当且仅当, 正规对偶映象 J 是单值的, 且在 X 的任何有界子集上是一致连续的· 一个在 X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的算子 T 称为增生的, 如果对每个 $x, y \in D(T)$, 都有 $j(x - y) \in J(x - y)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x - y) \rangle \geqslant 0·$$

一个增生算子 T 称为 m_增生的, 若 $R(T + \lambda I) = X$, 对一切 $\lambda > 0$ (或, 等价地, 对某个 $\lambda > 0$), 其中, I 是恒等算子· Browder[2] 已证, 若 $T: X \to X$ 是一满足局部 Lipschitz 条件的增生算子, 则 T 是 m_增生; 即 $R(I + T) = X$· 这个结果随后被 Martin[3] 推广到了连续增生算子·

回顾到, 一类与增生算子类密切相关的算子是散逸算子类· 一个算子 $T: D(T) \subset X \to X$

* 收稿日期: 2000_07_11; 修订日期: 2001_12_31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19801023); 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目
作者简介: 曾六川(1965—), 男, 湖南人, 教授.

称为散逸算子[4], 若 $-T$ 是增生算子• 而散逸算子T 称为 m_散逸算子, 如果对一切 $\lambda > 0$, 都有 $R(I - \lambda T) = X$• Browder[5] 已证, 若T: $X \to X$ 是一满足局部Lipschitz 条件的散逸算子, 则T 是 m_散逸算子•

现在, 让我们回顾一下归功于 Liu[6] 的如下迭序程序•

具误差的 Ishikawa 迭代程序定义如下: 给定 Banach 空间 X 的非空子集D 与映象 T: $D \subset X \to X$, 在 D 中定义序列$\{x_n\}$:

$$x_0 \in D,$$

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + u_n,$$

$$y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n + v_n \qquad n \geqslant 0,$$

其中, $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是X 中满足某些条件的两序列, 而$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是$[0, 1]$ 中满足某些限制的两序列•

最近, Zhu[7], Chidume 与 Osilike[8], 及 Liu[9] 证明了, 若 X 是一致凸和$(q_)$ 一致光滑 Banach 空间(这里, $q > 1$), 则(具误差的)Mann 和 Ishikawa 迭代序列, 在适当的条件下, 强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的解, 其中, T: $D(T) \subset X \to X$ 是具闭的定义域$D(T)$ 与有界值域 $R(T)$ 的 m_增生算子• 另一方面, Zhang[10] 证明了, 若 X 是一致光滑 Banach 空间, T: $D(T) \subset X \to X$ 是具闭的定义域$D(T)$ 和有界值域 $R(T)$ 的 m_增生算子, 则具误差的 Mann 和 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解• Zhang 的结果改进与推广了先前由许多作者得到的许多熟知的结果, 包括 Tan 与 Xu[11], Chidume 与 Osilike[8], Ding[12], Ding 与 Deng[13], Zhu[7], Liu[9], 及 Zeng[14~15]•

本文, 设 X 是一致光滑的实 Banach空间, T: $D(T) \subset X \to X$ 是具闭的定义域$D(T)$ 的 m_增生算子• 不经假设值域 $R(T)$ 有界和对$[0, 1]$ 中序列$\{\beta_n\}$ 作任何限制, 我们就表征了用于构造 m_增生算子方程$x + Tx = f$ 的解的具有误差的 Ishikawa 迭代序列的收敛性• 此外, 一个相关结果讨论了用于构造 m_散逸算子方程$x - Tx = f$ 的解的具误差的Ishikawa迭代序列的收敛性• 我们的结果是 Zhang[10] 的结果的改进、推广与发展•

在后面, 我们将需要下列引理•

引理 1.1[16] 设 X 是一实 Banach 空间, J: $X \to 2^{X^*}$ 是正规对偶映象, 则对任何的 $x, y \in X$, 有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \qquad \forall j(x + y) \in J(x + y)•$$

引理 1.2[6] 设$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 与$\{c_n\}$ 是三个非负实数序列满足条件:

$$a_{n+1} \leqslant (1 - t_n)a_n + b_n + c_n,$$

其中, $0 \leqslant t_n \leqslant 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$, $b_n = o(t_n)$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$• 则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$•

若在引理 1.2 中, 置 $c_n = 0$, 对一切 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 则引理1.2化为由Weng[17] 得到的结果•

引理 1.3[7] 设 X 是一Banach 空间, T: $D(T) \subset X \to X$ 是一m_增生算子, 则对任给的$f \in X$, 方程 $x + Tx = f$ 在$D(T)$ 中有唯一解•

2 主要结果

现给出本文的主要结果•

定理 2.1 设 X 是一致光滑的实 Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 是一具闭的定义域 $D(T)$ 的连续 m_增生算子. 设 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 X 中的序列, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, 满足条件:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \ \|v_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \alpha_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

对任给的 $f \in X$, 定义 $Sx = f - Tx, \ x \in D(T)$. 如果存在 $x_0 \in D(T)$ 使得由下式定义的序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

包含于 $D(T)$ 中, 则由 (1) 所定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $x + Tx = f$ 的唯一解 x^*, 当且仅当 $\{Ty_n\}$ 是有界的且 $\{x_n + Tx_n\}$ 强收敛到 f.

证 因 $T: D(T) \subset X \to X$ 是 m_增生的, 由引理 1.3, 方程 $x + Tx = f$ 有唯一解 $x^* \in D(T)$. 因 $Sx^* = f - Tx^* = x^*$, 故 x^* 是 S 的不动点. 又因 X 是一致光滑的, 故正规对偶映象 J 是单值的, 从而有

$$\begin{aligned} &\langle Sx - Sy, J(x - y)\rangle = \langle f - Tx - (f - Ty), J(x - y)\rangle = \\ &\quad -\langle Tx - Ty, J(x - y)\rangle \leqslant 0 \qquad \forall x, y \in D(T). \end{aligned} \tag{2}$$

设 $\{Ty_n\}$ 是有界的, 且 $\{x_n + Tx_n\}$ 强收敛到 f, 则易见 $\{Sy_n\}$ 是有界的, 且 $\|Sx_n - x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$. 今断言, $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 与 $\{Sx_n\}$ 都有界. 事实上, 令

$$d = \sup_{n \geqslant 0} \|Sy_n - x^*\| + \|x_1 - x^*\|, \tag{3}$$

$$M = d + \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| + 1, \tag{4}$$

则用归纳法可证,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant d + \sum_{j=1}^{n} \|u_j\| \leqslant M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

事实上, 当 $n = 0$ 时, 由 (3) 和 (4) 知 (5) 为真. 设 (5) 对 $n = k - 1$ 成立, 其中 $k \geqslant 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\| &= \|(1 - \alpha_k)(x_k - x^*) + \alpha_k(Sy_k - x^*) + u_k\| \leqslant \\ &(1 - \alpha_k)\|x_k - x^*\| + \alpha_k\|Sy_k - x^*\| + \|u_k\| \leqslant \\ &(1 - \alpha_k)\left\{d + \sum_{j=1}^{k-1}\|u_j\|\right\} + \alpha_k d + \|u_k\| \leqslant \\ &d + \sum_{j=1}^{k}\|u_j\| \leqslant M. \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 有界. 由于

$$\|Sx_n\| \leqslant \|Sx_n - x_n\| + \|x_n\|,$$

$$\begin{aligned} \|y_n\| &\leqslant \|y_n - x_n\| + \|x_n\| \leqslant \beta_n\|Sx_n - x_n\| + \|v_n\| + \|x_n\| \leqslant \\ &\|Sx_n - x_n\| + \|v_n\| + \|x_n\|, \end{aligned}$$

所以, $\{Sx_n\}$、$\{y_n\}$ 都有界. 于是由 (1) 及引理 1.1, 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Sy_n - x^*) + u_n\|^2 \leqslant \\ &(1 - \alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\langle Sy_n - x^*, J(x_{n+1} - x^* - u_n)\rangle + \\ &2\langle u_n, J(x_{n+1} - x^*)\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

现考察 (6) 右端第 3 项:

$$2\langle u_n, J(x_{n+1}-x^*)\rangle \leqslant 2\|u_n\|\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant 2\|u_n\|M. \tag{7}$$

再考察(6)右端第2项:

$$\begin{aligned}\langle Sy_n-x^*, J(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle =\\ &\langle Sy_n-x^*, J(x_n-x^*)\rangle+\langle Sy_n-x^*,\\ &J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\rangle=\\ &d_n+e_n,\end{aligned} \tag{8}$$

其中,

$$d_n=\langle Sy_n-x^*, J(x_n-x^*)\rangle,$$
$$e_n=\langle Sy_n-x^*, J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\rangle.$$

由(2)~(4),即得

$$\begin{aligned}d_n=\langle Sy_n-x^*, J(x_n-x^*)\rangle=\\ &\langle Sy_n-x^*, J(y_n-x^*)\rangle-\langle Sy_n-x^*, J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\rangle\leqslant\\ &-\langle Sy_n-x^*, J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\rangle\leqslant\\ &\|Sy_n-x^*\|\cdot\|J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\|\leqslant\\ &d\cdot\|J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\|.\end{aligned} \tag{9}$$

并且,当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|y_n-x^*-(x_n-x^*)\|=\|y_n-x_n\|=\\ &\|\beta_n(Sx_n-x_n)+v_n\|\leqslant\|Sx_n-x_n\|+\|v_n\|\to 0.\end{aligned}$$

因 X 是一致光滑的,故正规对偶映象 J 在 X 的任何有界子集上是一致连续的,于是有

$$\|J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

今证 $|e_n|\to 0\ (n\to\infty)$. 事实上,我们有

$$\begin{aligned}|e_n|=|\langle Sy_n-x^*, J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\rangle|\leqslant\\ &\|Sy_n-x^*\|\cdot\|J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\|\leqslant\\ &d\cdot\|J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\|,\end{aligned}$$

并且,当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*-u_n-(x_n-x^*)\|=\|x_{n+1}-x_n-u_n\|=\\ &\alpha_n\|Sy_n-x_n\|\leqslant\alpha_n\left\{\|Sy_n-x^*\|+\|x_n-x^*\|\right\}\leqslant\\ &2\alpha_nM\to 0.\end{aligned}$$

于是,由正规对偶映象 J 的一致连续性,可得

$$\|J(x_{n+1}-x^*-u_n)-J(x_n-x^*)\|\to 0\qquad(n\to\infty),$$

从而 $|e_n|\to 0\ (n\to\infty)$. 于是由(6)~(8)得知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n(d_n+e_n)+2M\cdot\|u_n\|\leqslant\\ &(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n(k_n+|e_n|)+2M\cdot\|u_n\|,\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $k_n=d\cdot\|J(y_n-x^*)-J(x_n-x^*)\|\to 0\qquad(n\to\infty)$.

令 $\|x_n-x^*\|^2=a_n$, $\alpha_n=t_n$, $2\alpha_n(k_n+|e_n|)=b_n$, $2M\cdot\|u_n\|=c_n$. 于是(10)化为

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n.$$

据上述论证,易见

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty,\ b_n = o(t_n),\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty.$$

于是由引理 1.2, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|^2 = 0$, 即知由(1) 定义的序列$\{x_n\}$强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解x^*.

反之, 设由(1) 定义的序列$\{x_n\}$强收敛到方程$x + Tx = f$ 的唯一解x^*, 则由 T 的连续性, 得知序列$\{x_n + Tx_n\}$强收敛到f. 因$Sx_n - x_n = f - Tx_n - x_n$, 故 $\|Sx_n - x_n\| \to 0(n \to \infty)$. 注意到

$$\|y_n - x_n\| = \|\beta_n(Sx_n - x_n) + v_n\| \leqslant \|Sx_n - x_n\| + \|v_n\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

我们推得 $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. 再据T 的连续性, 得知,$\{Ty_n\}$强收敛到$Tx^*$. 所以,$\{Ty_n\}$是有界的. 证毕.

定理 2.2　设 X 是一致光滑的 Banach 空间, $T: X \to X$ 是一连续的增生算子. 设$\{u_n\}$、$\{v_n\}$是X 中的二序列,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0, 1]$ 中的二数列, 满足定理 2.1 中的条件(ⅰ) ~ (ⅱ). 对任给的$f \in X$, 定义 $Sx = f - Tx, x \in X$. 则对任一 $x_0 \in X$, 由(1) 所定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$强收敛到方程$x + Tx = f$ 的唯一解, 当且仅当$\{Ty_n\}$是有界的且$\{x_n + Tx_n\}$强收敛到f.

证　因T 是连续的增生算子, 故据 Martin[3] 的一个结果,T 是 m_增生的. 从而, 方程 $x + Tx = f$ 有唯一解$x^* \in X$. 因而, 定理的结论就象在定理 2.1 的证明中一样可得.

下面, 我们给出在 m_散逸算子的情形时的收敛定理, 即, 在方程 $x - Tx = f$ 的唯一解的迭代逼近方面的结果, 其中, $T: D(T) \subset X \to X$ 是一 m_散逸算子.

定理 2.3　设 X 是一实的一致光滑的 Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 是一连续的 m_散逸算子. 设$\{u_n\}$、$\{v_n\}$是X 中的序列, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0, 1]$ 中的序列, 满足定理 2.1 中的条件(ⅰ) ~ (ⅱ). 对任给的$f \in X$, 定义 $Sx = f + Tx,\ x \in D(T)$. 如果存在 $x_0 \in D(T)$, 使得由(1) 所定义的序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$包含于$D(T)$, 则由(1) 所定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$强收敛到方程$x - Tx = f$ 的唯一解, 当且仅当$\{Ty_n\}$是有界的且$\{x_n - Tx_n\}$强收敛到f.

证　因T 是 m_散逸算子, 故 $-T$ 是 m_增生算子, 从而, 由定理 2.1 即得结论.

最后, 我们研究具局部 Lipschitz 条件的 m_增生算子的方程解的 Ishikawa 迭代逼近问题. 我们有如下结果:

定理 2.4　设 X 是一实 Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 是一满足局部 Lipschitz 条件的 m_增生算子, $L \geqslant 1$ 是T 的局部 Lipschitz 常数. 设 $D(T)$ 是开的, 对任给的$f \in X$, 设 x^* 是方程 $x + Tx = f$ 在$D(T)$ 中的唯一解, 再设$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0, 1]$ 中的序列, 满足下列条件:

(ⅰ) $0 \leqslant \beta_n \leqslant \alpha_n \leqslant 1/2[1 + L(2 + L)]^2$;

(ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

如果在 $D(T)$ 中存在 x^* 之一闭凸领域 B 及一点$x_0 \in B$, 使得T 在 B 上是 Lipschitz 的, 而且由下式定义的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n(f - Ty_n) \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{11}$$

包含在 B 中, 则序列$\{x_n\}$强收敛到方程$x + Tx = f$ 在$D(T)$ 中的唯一解x^*, 并有下面的误差估

计式:

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\|x_0-x^*\|.$$

证 定义 $S: D(T)\subset X\to X$ 为 $Sx=f-Tx$, $x\in D(T)$. 显然, x^* 是 S 的不动点, 而且, S 也是具局部 Lipschitz 常数 $L\geqslant 1$ 的局部 Lipschitz 算子, 且在 B 上是 Lipschitz 的. 另外, $(-S)$ 在 $D(T)$ 上是增生的, 即对任意的 $x,y\in D(T)$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$, 使得

$$\langle(-S)x-(-S)y, j(x-y)\rangle\geqslant 0,$$

故有

$$\langle Sx-Sy, j(x-y)\rangle\leqslant 0. \tag{12}$$

由(11)及引理 1.1 即知, 对一切 $j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$, 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &= \|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-x^*)\|^2\leqslant\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle.\end{aligned}\tag{13}$$

因 $(-S)$ 是增生的, 故由(12) 知, 存在 $j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*)$ 使得

$$\langle Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant 0. \tag{14}$$

于是由(13)及(14)可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+\\ &2\alpha_n\langle Sy_n-Sx_{n+1}+Sx_{n+1}-x^*, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-Sx_{n+1}, j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\|Sy_n-Sx_{n+1}\|\cdot\|x_{n+1}-x^*\|.\end{aligned}\tag{15}$$

另一方面, 我们有下列估计:

$$\begin{aligned}\|y_n-x^*\| &= \|(1-\beta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(Sx_n-x^*)\|\leqslant\\ &[1+\beta_n(L-1)]\|x_n-x^*\|\leqslant L\|x_n-x^*\|,\\ \|x_n-Sy_n\| &\leqslant \|x_n-x^*\|+L\|y_n-x^*\|\leqslant[1+L^2]\|x_n-x^*\|,\\ \|Sx_{n+1}-Sy_n\| &\leqslant L\|(1-\alpha_n)(x_n-y_n)+\alpha_n(Sy_n-y_n)\|\leqslant\\ &L(1-\alpha_n)\beta_n(1+L)\|x_n-x^*\|+\alpha_n(1+L)L^2\|x_n-x^*\|\leqslant\\ &L[(1+L)\beta_n+(1+L)L\alpha_n]\|x_n-x^*\|,\\ \|x_{n+1}-x^*\| &\leqslant \|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x^*\| =\\ &\alpha_n\|x_n-Sy_n\|+\|x_n-x^*\|\leqslant\\ &[\alpha_n(1+L^2)+1]\|x_n-x^*\|.\end{aligned}$$

现在, 令 $L(2+L)=L_*$, 则利用 $\beta_n\leqslant\alpha_n$, 我们得到估计:

$$\begin{aligned}\|Sx_{n+1}-Sy_n\| &\leqslant L[(1+L)\alpha_n+(1+L)L\alpha_n]\|x_n-x^*\| =\\ &L[1+L(2+L)]\alpha_n\|x_n-x^*\|\leqslant\\ &L_*(1+L_*)\alpha_n\|x_n-x^*\|,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant[\alpha_n(1+L_*)+1]\|x_n-x^*\|. \tag{17}$$

把(16)和(17)代入(15), 并利用条件(ⅰ), 化简得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\\ &\left\{(1-\alpha_n)^2+\alpha_nL_*(2\alpha_n^2(1+L_*)^2+2\alpha_n(1+L_*))\right\}\|x_n-x^*\|^2\leqslant\\ &\left\{(1-\alpha_n)^2+\alpha_nL_*(\alpha_n+2\alpha_n(1+L_*))\right\}\|x_n-x^*\|^2=\end{aligned}$$

$$\left\{(1-\alpha_n)+\alpha_n[\alpha_n(1+3L_*+2L_*^2)-1]\right\}\|x_n-x^*\|^2\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|^2\qquad(n=0,1,2,\cdots)\cdot\tag{18}$$

运用不等式 $1-x\leqslant e^{-x}$, 于是由(18) 得到

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant e^{-\alpha_n}\|x_n-x^*\|^2\leqslant\cdots\leqslant$$
$$\exp\left(-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\|x_0-x^*\|^2\qquad(n=0,1,2,\cdots),\tag{19}$$

故由条件(ii)知, $\|x_{n+1}-x^*\|\to 0\ (n\to\infty)\cdot$ 又在(19) 两端开平方, 即得 $x_n\to x^*$ 的误差估计式:

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\right)\|x_0-x^*\|\cdot$$

证毕•

[参 考 文 献]

[1] Xu Z B, Roach G F. Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1991, **157**: 189—210.

[2] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 875—882.

[3] Martin R H, Jr. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces [J]. Proc Amer Math Soc, 1970, **26**: 307—314.

[4] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Leyden: Nordhoff, 1976.

[5] Browder F E. Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces[J]. Proc Nat Acad Sci U S A, 1968, **61**: 388—392.

[6] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**: 114—125.

[7] Zhu L C. Iterative solution of nonlinear equations involving m_accretive operators in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1994, **188**: 410—415.

[8] Chidume C E, Osilike M O. Approximation methods for nonlinear operator equations of the m_accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1995, **189**: 225—239.

[9] Liu L S. Ishikawa_type and Mann_type iterative processes with errors for constructing solutions of nonlinear equations involving m_accretive operators in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1998, **34**: 307—317.

[10] 张石生. m_增生算子方程解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(12): 1215—1223.

[11] Tan K K, Xu H K. Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**: 9—21.

[12] Ding X P. Iterative process with errors of nonlinear equations involving m_accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 191—201.

[13] Ding X P, Deng L. Iterative solution of nonlinear equations of the monotone and dissipative types in uniformly smooth Banach spaces[J]. J Sichuan Normal Univ, 1994, **17**(1): 43—48.

[14] Zeng L C. Error bounds for approximation solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 67—80.

[15] 曾六川. Lipschitz 局部强增殖算子的非线性方程的解的迭代构造[J]. 应用数学和力学, **16**(6): 543—552.

[16] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**: 149—165.

[17] Weng X. Fixed point iteration for local strictly pseudo_contractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, **113**: 727—731.

Ishikawa Iterative Process for Constructing Solutions of m_ Accretive Operator Equations

ZENG Liu_chuan

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P R China)

Abstract: The convergence of the Ishikawa iteration sequences with errors for constructing solutions of m_accretive operator equations is characterized. Moreover, the error estimates of approximate solutions for locally Lipschitzian and m_accretive operator equations are established.

Key words: m_accretive operator; Ishikawa iterative sequence; uniformly smooth Banach space