 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 06_0653_08

一阶双曲问题的间断流线扩散法的后验误差估计*

康 彤, 余德浩

(中国科学院 数学与系统科学研究院 计算数学与科学工程计算研究所,
科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100080)

(张鸿庆推荐)

摘要: 研究了求解一阶双曲问题的间断流线扩散法的后验误差估计, 并依此来实现空间网格局部的合理调整, 所给的数值算例也验证了此方法的正确性和可行性•

关 键 词: 后验误差估计; 间断流线扩散法; 一阶双曲方程
中图分类号: O241.82; O242.21 文献标识码: A

引 言

众所周知, 自适应有限元方法(见[1]) 在数值求解双曲型方程方面有着广泛的应用, 如计算流体力学、计算空气动力学、电子工程等• 其中 h_型自适应有限元法是指利用近似解的后验误差估计, 通过在局部区域进行网格加密来提高计算精度• 在偏微分方程数值求解中, 后验误差估计是用一个已知的显式的量来控制误差, 这些量只依赖于初边值和已解得的离散解• 因此对问题的后验误差估计的研究是自适应方法的重要任务之一•

通常, 求解一阶双曲问题时间断(discontinuous) Galerkin 有限元法(简称 DG 法) 与流线扩散(streamline diffusion) 有限元法(简称 SD 法) 是两种具有鲜明特点, 较为成功的非标准有限元算法• 具体地, DG 法是一种迎风型显式算法, 它从入流边界开始, 沿流场方向, 自上游往下游, 逐个单元进行解算, 计算十分简便且可局部并行化• SD 法则是一种 Petrov_Galerkin 型的人工粘性法, 由于它在流线方向引进了人工粘性(扩散) 项, 使计算过程具有良好的稳定性• 理论分析表明: DG 法与 SD 法均具有比 Galerkin 法更好的计算精度与稳定性能• 但是, DG 法仍然是 Galerkin 型的, 在解呈急剧变化的局部区域内, 数值解仍可能出现一定程度的震荡; SD 法是一种隐式方法, 需在计算区域上整体求解离散化方程组, 工作量较大• 孙澈等[2] 将 DG 法与 SD 法相结合, 提出了求解一阶双曲问题的间断流线扩散(discontinuous_streamline_diffusion) 法(简称 DSD 法)• 其基本思想是: 保持 DG 算法的基本结构, 但在从上游往下游逐个单元作显示计算时, 将 Galerkin 框架改为 SD 框架• 这样, 既保持了 DG 法迎风、显示的优点, 又可进一步改善

* 收稿日期: 2000_04_25; 修订日期: 2001_12_21
基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1999032804)
作者简介: 康彤(1967—), 男, 辽宁海城人, 讲师, 博士, 通讯址: 北京广播学院 信息工程学院, 北京 100024.

DG 法的稳定性.

本文我们将讨论求解一阶双曲问题的 DSD 法的后验误差估计, 依此来实现空间网格的局部加密. 基本思想是先在一个粗网格上求解, 然后根据后验估计式和使误差在空间网格的元素上均匀分布的原则, 在真解比较平坦的地方, 网格比较稀疏, 而在真解变化剧烈或数值解剧烈震荡的地方, 将网格局部加密, 这样便可以尽可能少的代价达到提高计算精度的目的.

1 一阶双曲问题的 DSD 格式

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为二维多边形区域, 其边界为 Γ. 考虑一阶双曲模型问题

$$\begin{cases}\beta\cdot\nabla u+u=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=g(x), & x\in\Gamma_-.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ 为给定非零常向量, ∇ 为梯度算符, $\Gamma=\Gamma_-\cup\Gamma_+$:

$$\Gamma_-=\left\{x\in\Gamma:\beta\cdot n(x)<0\right\},\quad n(x)\text{ 为 }\Gamma\text{ 在 }x\text{ 处的单位外法向},$$
$$\Gamma_+=\left\{x\in\Gamma:\beta\cdot n(x)\geqslant 0\right\}=\Gamma/\Gamma_-.$$

称 Γ_- 为方程(1) 之入(内) 流边界, Γ_+ 为出(外) 流边界.

对 Ω 作拟均匀三角剖分, 记单元为 K, 网格为 $T_h=\left\{K:K\in\Omega\right\}$. h_k 为单元 $K\in T_h$ 的直径, $h=\max\limits_{K\in T_h}h_k$. 通常, 设 $h\leqslant h_0<1$.

用 ∂K 表示 K 的边界, n 表示 ∂K 的单位外法向. 定义

$$\partial K_-=\left\{x\in\partial K:\beta\cdot n(x)<0\right\},$$
$$\partial K_+=\left\{x\in\partial K:\beta\cdot n(x)\geqslant 0\right\}.$$

依次称 ∂K_-、∂K_+ 为单元 K 之入流、出流边界. 因 β_i 为常数, $\forall K\in T_h$, 在组成 ∂K 之 3 条边线上, $\beta\cdot n(x)$ 分别为常数, 因而 ∂K 之每一边均整体地为入流边或出流边, 且 ∂K_-、∂K_+ 非空.

用 $P_r(K)$ 表示 K 上次数 $\leqslant r$ 的多项式集合. 定义

$$V_h=\left\{v\in L^2(\Omega),v|_K\in P_r(K),\ \forall K\in T_h\right\},\qquad r\geqslant 0,$$
$$W_h=\left\{w\in L^2(\Omega),w|_K\in C(K)\cap H^1(K),\ \forall K\in T_h\right\}.$$

显然, $V_h\subset W_h$. 一般地, 当 $w\in W_h$ 时, w 在各 ∂K 上是间断的.

设 $w\in W_h$, $K\in T_h$. 对 $\forall x\in\partial K$, 定义

$$w_+(x)=\lim_{s\to 0^+}w(x+s\beta),\quad w_-(x)=\lim_{s\to 0^-}w(x+s\beta),$$
$$[w(x)]=w_+(x)-w_-(x).$$

$w_+(x)$ 是 w 在 x 处沿 β 方向之下游值, $w_-(x)$ 是 w 在 x 处沿 β 方向之上游值, $[w(x)]$ 是 w 在越过 $x\in\partial K$ 时之跳跃值.

对于 Ω 中任意具有 Lipschitz 边界 γ 的开子集 ω, 我们定义 $L^2(\omega)$、$H^s(\omega)$、$L^2(\gamma)$ 为标准的 Sobolev 空间, 其相应范数为

$$\|\varphi\|_\omega=\|\varphi\|_{L^2(\omega)},\quad \|\varphi\|_{s,\omega}=\|\varphi\|_{H^s(\omega)},\quad \|\varphi\|_\gamma=\|\varphi\|_{L^2(\gamma)}.$$

如果 $\omega=\Omega$, 我们省去指标 ω.

记 $(w,v)_K=\int_K wv\,\mathrm{d}x$, $(w,v)=\int_\Omega wv\,\mathrm{d}x$, 求解问题(1) 的 DSD 格式定义为: 求 $U\in V_h$, 使得 $\forall K\in T_h$, 有

$$\begin{cases}(\beta\cdot\nabla U+U, v+\delta\beta\cdot\nabla v)_K+\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U]v_+|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s= \\ \qquad (f, v+\delta\beta\cdot\nabla v)_K, \qquad \forall v\in P_r(K), \\ U_-|_{\partial K_-}=g|_{\partial K_-}, \qquad \partial K_-\in\Gamma_-\cdot\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\delta\geqslant 0$ 为适当选定的人工扩散(粘性) 参数.

将(2) 对 $K\in T_h$ 相加, 得 DSD 格式之整体形式, 求 $U\in V_h$, 使

$$\begin{cases}(\beta\cdot\nabla U+U, v+\delta\beta\cdot\nabla v)+\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U]v_+|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s= \\ \qquad (f, v+\delta\beta\cdot\nabla v), \qquad \forall v\in P_r(K), \\ U_-|_{\Gamma_-}=g\cdot\end{cases} \tag{3}$$

[2] 中给出了 DSD 格式(2) 之先验误差估计. 下面在讨论问题的后验误差估计和局部网格加密时, 我们对 δ 适当调整, 令 $h_{\min}=\min_{K\in T_h}h_K$, 取 $\delta=C_0(h_{\min})^2>0$.

2 问题的后验误差估计

考虑二维对偶问题

$$\begin{cases}-\beta\cdot\nabla z+z=\theta=u-U, & x\in\Omega, \\ z=0, & x\in\Gamma_+\cdot\end{cases} \tag{4}$$

引理 设 z 为问题(4) 的解, 则

$$\|z\|^2+\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\leqslant\|\theta\|^2, \tag{5}$$

$$\|\beta\cdot\nabla z\|^2+\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\leqslant\|\theta\|^2\cdot \tag{6}$$

证明 分别对(4) 式两边乘以 z 和 $-\beta\cdot\nabla z$, 再对 x 在 Ω 上积分, 得:

$$(-\beta\cdot\nabla z, z)+\|z\|^2=(\theta, z),$$

$$\|\beta\cdot\nabla z\|^2+(z, -\beta\cdot\nabla z)=(\theta, -\beta\cdot\nabla z)\cdot$$

利用分部积分公式, 得:

$$(-\beta\cdot\nabla z, z)=(z, -\beta\cdot\nabla z)=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\cdot$$

从而有

$$\|z\|^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s=(\theta, z)\leqslant\frac{1}{2}(\|\theta\|^2+\|z\|^2),$$

$$\|\beta\cdot\nabla z\|^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s=(\theta, -\beta\cdot\nabla z)\leqslant\frac{1}{2}(\|\theta\|^2+\|\beta\cdot\nabla z\|^2)\cdot$$

即

$$\|z\|^2+\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\leqslant\|\theta\|^2,$$

$$\|\beta\cdot\nabla z\|^2+\int_{\Gamma_-}z^2|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\leqslant\|\theta\|^2\cdot$$

证毕.

(4) 式两边乘以 θ, 再对 x 在 Ω 上积分, 得

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|^2 &= (\theta, -\beta\cdot\nabla z + z) = (u, -\beta\cdot\nabla z + z) - \sum_{K\in T_h}(U, -\beta\cdot\nabla z + z)_K = \\
&(\beta\cdot\nabla u + u, z) - \int_{\Gamma_-} u z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s + \sum_{K\in T_h}\left\{\int_{\partial K} U z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s - (\beta\cdot\nabla U + U, z)_K\right\} = \\
&(\beta\cdot\nabla u + u, z) + \int_{\Gamma_-} u z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s + \sum_{K\in T_h}\left\{\int_{\partial K} U z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s\right\} - (\beta\cdot\nabla U + U, z) = \\
&(f, z) - (\beta\cdot\nabla U + U, z) + \int_{\Gamma_-} u z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s + \\
&\sum_{K\in T_h}\left\{\int_{\partial K_+} U_- z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s - \int_{\partial K_-} U_+ z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s\right\}.
\end{aligned}
$$

注意到,当 $\partial K_+ \notin \Gamma_+$ 时,∂K_+ 必为与 K 相邻之下游单元 K' 之入流边界,且满足

$$
U_-|_{\partial K'_-} = U_-|_{\partial K_+},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_+} U_- z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s &= \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-} U_- z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s + \\
&\int_{\Gamma_+} U_- z\, \beta\cdot n \mathrm{d}s - \int_{\Gamma_-} U_- z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|^2 = &(f, z) - (\beta\cdot\nabla U + U, z) + \int_{\Gamma_-}(u - U_-) z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s - \\
&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}[U] z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s + (\beta\cdot\nabla U + U, v + \delta\beta\cdot\nabla v) + \\
&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U] v_+ |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s - (f, v + \delta\beta\cdot\nabla v) = \\
&(f - \beta\cdot\nabla u - U, z - v - \delta\beta\cdot\nabla v) + \sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}\delta[U] z\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s - \\
&\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U](z - v_+)\, |\beta\cdot n|\, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

下面利用引理对上式右端各项分别进行估计. 令 $\mathrm{I}_h: C(\Omega) \to T_h$ 为Lagrange插值算子,对 $\forall K \in T_h$,取 $v|_K = \mathrm{I}_h z|_K$,由有限元的逆性质和插值理论得

$$
\begin{aligned}
&\|\beta\cdot\nabla v\|_K \leqslant C h_K^{-1}\|v\|_K \leqslant C h_K^{-1}\|z\|_K, \\
&\|z - v\|_K \leqslant C h_K \|z\|_{1,K} \leqslant C h_K(\|z\|_K + \|\nabla z\|_K).
\end{aligned}
$$

考虑到 $\delta = C_0(h_{\min})^2$,有

$$
\begin{aligned}
\|z - v - \delta\beta\cdot\nabla v\|_K &\leqslant \|z - v\|_K + \delta\|\beta\cdot\nabla v\|_K \leqslant \\
&C h_K(\|z\|_K + \|\nabla z\|_K + \delta h_K^{-2}\|z\|_K) \leqslant C h_K(\|z\|_K + \|\nabla z\|_K).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|(f - \beta\cdot\nabla U - U, z - v - \delta\beta\cdot\nabla v)| \leqslant \\
&\quad C\sum_{K\in T_h}(h_K\|f - \beta\cdot\nabla U - U\|_K(\|z\|_K + \|\nabla z\|_K)) \leqslant \\
&\quad C\left(\sum_{K\in T_h} h_K^2\|f - \beta\cdot\nabla U - U\|_K^2\right)^{1/2}\left(\sum_{K\in T_h}(\|z\|_K + \|\nabla z\|_K)^2\right)^{1/2} \leqslant
\end{aligned}
$$

$$C\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|f-\beta\cdot\nabla U-U\|_K^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{K\in T_h}(\|z\|_K^2+\|\nabla z\|_K^2)\Big)^{1/2}\leqslant$$

$$C\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|f-\beta\cdot\nabla U-U\|_K^2\Big)^{1/2}(\|z\|^2+\|\nabla z\|^2)^{1/2}\leqslant$$

$$C\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|f-\beta\cdot\nabla U-U\|_K^2\Big)^{1/2}\|\theta\|,$$

$$\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}\delta[u]z|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\Big|\leqslant$$

$$C\delta\Big(\sum_{K\in T_h}\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{K\in T_h}\|z\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}.$$

因为

$$\|z\|_{\partial K_-}\leqslant\|z\|_{\partial K}\leqslant C\|z\|_{1,K},$$

所以

$$\Big(\sum_{K\in T_h}\|z\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\leqslant C\Big(\sum_{K\in T_h}\|z\|_{1,K}^2\Big)^{1/2}=C\|z\|_1\leqslant C\|\theta\|.$$

因此

$$\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}\delta[U]z|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\Big|\leqslant C\delta\Big(\sum_{K\in T_h}\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\|\theta\|.$$

$$\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U](z-v_+)|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\Big|\leqslant$$

$$\sum_{K\in T_h}(\|(1+\delta)[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}\|z-v_+\|_{\partial K_-}).$$

因为

$$\|z-v_+\|_{\partial K_-}\leqslant\|z-v\|_{\partial K}\leqslant h_K^{1/2}\|z\|_{1,K},$$

所以

$$\Big|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K_-}(1+\delta)[U](z-v_+)|\beta\cdot n|\,\mathrm{d}s\Big|\leqslant$$

$$\sum_{K\in T_h}(\|(1+\delta)[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}-h_K^{1/2}\|z\|_{1,K})\leqslant$$

$$C(1+\delta)\Big(\sum_{K\in T_h}h_K\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\|z\|_1\leqslant$$

$$C(1+\delta)\Big(\sum_{K\in T_h}h_K\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\|\theta\|.$$

考虑到 δ 的选取,综上可得

$$\|u-U\|\leqslant C\Bigg(\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|f-\beta\cdot\nabla U-U\|_K^2\Big)^{1/2}+$$

$$\Big(\sum_{K\in T_h}(\delta^2+h_K(1+\delta)^2)\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\Bigg)\leqslant$$

$$C\Bigg(\Big(\sum_{K\in T_h}h_K^2\|f-\beta\cdot\nabla U-U\|_K^2\Big)^{1/2}+$$

$$\Big(\sum_{K\in T_h}h_K\|[U]|\beta\cdot n|\|_{\partial K_-}^2\Big)^{1/2}\Bigg).$$

对一般函数 f 和 g,精确求出上式右端出现的积分项代价太高或甚至不可能,故需要利用合适

的求积公式来近似计算。我们用 $I_h f$ 与 $I_h g$ 替代 f 与 g，得到如下结论：

定理　设 u 是问题(1)的解，U 为问题(2)的解，则有

$$\| u - U \| \leqslant C(A_1 + A_2),$$

其中：

$$A_1 = \left(\sum_{K \in T_h} h_K^2 \| R \|_K^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in T_h} h_K \| [U] | \beta \cdot n | \|_{\partial K_-}^2 \right)^{1/2}.$$

$$A_2 = \left(\sum_{K \in T_h} h_K^2 \| I_h f - f \|_K^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in T_h, \partial K_- \subset \Gamma_-} h_K \| (I_h g - g) | \beta \cdot n | \|_{\partial K_-}^2 \right)^{1/2}.$$

$$R = I_h f - \beta \cdot \nabla U - U.$$

3　空间网格局部加密

由定理可知，当 h 充分小时，$\| u - U \|$ 充分小，因此所得的后验误差估计为可靠的。给出误差控制量 e_{TOL}，若

$$\| u - U \| < e_{\mathrm{TOL}},$$

需要适当选取初始网格满足 $A_2 \leqslant e_{\mathrm{TOL}}/2C$，以及利用后验误差估计局部加密来满足 $A_1 \leqslant e_{\mathrm{TOL}}/2C$。考虑到定理中的常数 C 难以确定，适当选取 C，即后验误差分析是在某倍数下进行的，这并不影响利用下面定义的误差指示项来比较各个单元误差的大小。选定一个初始网格 T，I 为与 T 相对应的 Lagrange 插值，U 是在此网格下求(2)的解，令误差指示项

$$\eta^2(K, T, U) = h_K^2 \| R \|_K^2 + h_K \| [U] | \beta \cdot n | \|_{\partial K_-}^2,$$

其中：

$$R = If - (\beta \cdot \nabla U + U).$$

如果

$$\left(\sum_{K \in T} \eta^2(K, T, U) \right)^{1/2} < \frac{e_{\mathrm{TOL}}}{2C}, \tag{7}$$

则网格不需要调整。若

$$\left(\sum_{K \in T} \eta^2(K, T, U) \right)^{1/2} \geqslant \frac{e_{\mathrm{TOL}}}{2C},$$

则需要根据误差指标项 η 来修改网格。对所有 $K \in T$，若

$$\eta(K, T, U) > \theta \frac{e_{\mathrm{TOL}}}{2C \cdot N_K^{1/2}},$$

则 K 需加密，同时调整 δ，直到满足(7)为止。这里 $\theta \approx 1$ 为调节系数，N_K 为 T 的元素个数。

4　数 值 算 例

DSD 格式及其理论结果可直接应用于非定常问题(见[2])。

例　设已知函数

$$u(x, t) = 0.2\sin 2\pi x \cos 2\pi t - 0.8\exp(10r^2)\cos \frac{3}{2} r^2$$

为一维非定常问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u = f(x, t) & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = g_0(t) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

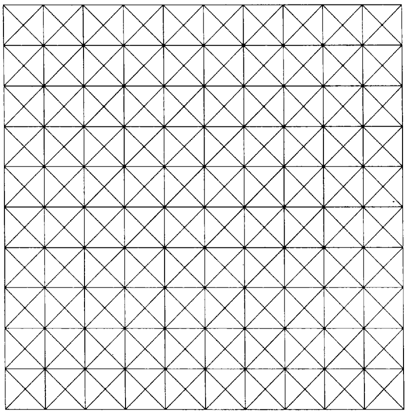

图 1　初始网格

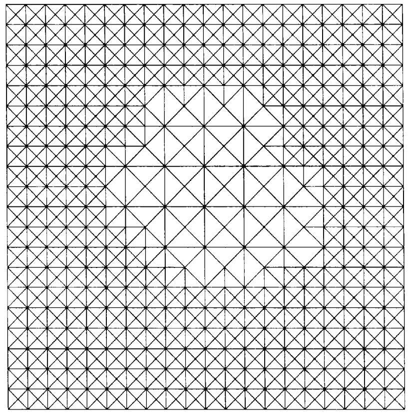

图 2　第一层网格

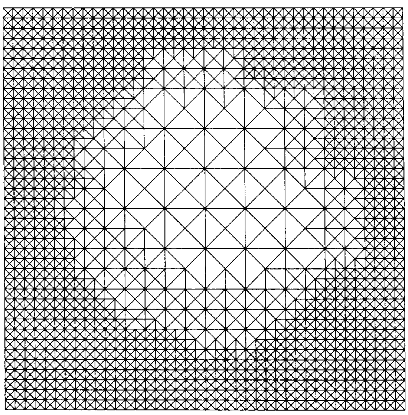

图 3　第二层网格

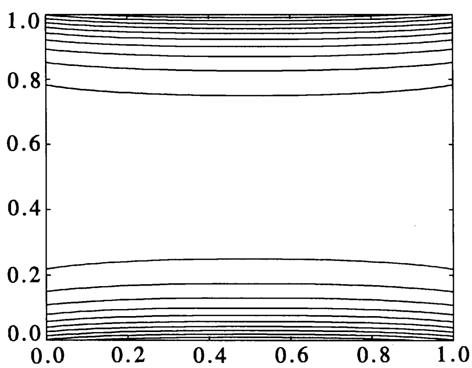

图 4　真解等值线图

之解, 其中 $r^2 = (x - 1/2)^2 + (t - 1/2)^2$、$f$、$g_0$ 及 u_0 由已给定的 $u(x, t)$ 算出•

下面将非定常一阶双曲问题改写为"定常"问题的形式• 设 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, 前面$(0, 1)$ 为空间域, 后面$(0, 1)$ 为时间域, Γ 表示 Ω 的边界, $n = (n_x, n_t)$ 表示 Γ 的单位外法向• 改写 x 为x_1, t 为x_2, 重新记$x = (x_1, x_2)$, $n = (n_1, n_2)$, 并记 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\beta = (1, 1)$, 则上式可改写成

$$\beta \cdot \nabla u + u = f(x), \qquad x \in \Omega•$$

在 $x_1 = 0 (x = 0)$ 和 $x_2 = 0 (t = 0)$ 上, 亦有 $\beta \cdot n = -1 < 0$, 因此上述问题之入流边界 Γ_- 恰由这两部分组成, 将 Γ_- 上的分段函数 u_0、g_0 统一记为 $g(x)$, 即为

$$u(x) = g(x) \qquad x \in \Gamma_- •$$

此时对问题的剖分实为时空三角有限元剖分•

计算中, 采用线性元, 取 $C = 0.5$, $e_{TOL} = 4$• 选取一个初始网格(图 1), 利用后验误差估计局部调整空间网格• 下面给出加密的前两级网格情况(图 2, 图 3)• 与图 4 相比, 真解变化剧

烈的区域网格得到了加密.

[参 考 文 献]

[1] YU Xi_jun, YU De_hao, BAO Yu_zhen. The adaptive finite element methods and a posteriori error estimates[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1998, **15**(5): 513—530.
[2] 孙澈, 汤怀民, 吴克俭. 一阶双曲问题的间断流线扩散法[J]. 计算数学, 1998, **20**(1): 35—44.
[3] 康彤, 余德浩. 发展型对流占优扩散方程的 FD_SD 法的后验误差估计及空间网格调节技术[J]. 数值计算与计算机应用, 2000, **21**(2): 194—207.
[4] 康彤, 余德浩. 二维发展型对流占优扩散方程的 FD_SD 法的后验误差估计[J]. 计算数学, 2000, **21**(4): 487—500.
[5] Babuska I, YU De_hao. Asymptotically exact a posteriori error estimator for biquadratic elements[J]. Finite Element in Analysis and Design, 1987, **3**(2): 341—354.
[6] YU De_hao. The adaptive methods in the finite element and boundary element computation[J]. Progress in Natural Science, 1994, **2**(1): 142—148.
[7] Verfurth R. A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques [M]. New York: John Wiley & Sone Ltd and B G Teubner, 1996.

A Posteriori Error Estimate of the DSD Method for First_Order Hyperbolic Equations

KANG Tong, YU De_hao
(State Key Laboratory of Scientific and Engineering Computing, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

Abstract: A posteriori error estimate of the discontinuous_streamline diffusion method for first_order hyperbolic equations was presented, which can be used to adjust space mesh reasonably. A numerical example is given to illustrate the accuracy and feasibility of this method.

Key words: posteriori error estimate; discontinuous_streamline diffusion method; first_order hyperbolic equation