应用数学和力学, 第 23 卷 第 5 期(2002 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 05_0518_08

Steiner 选择和算子的集值扩张(Ⅱ)
——对逼近理论的应用*

皮佐尔•特尔文, 米古尔•拉皮兹•迪亚兹

(西班牙 奥威索大学, s/ n 33007 奥威索, 西班牙)

(张石生推荐)

摘要: 在(Ⅰ) 的基础上, 得出对集值函数逼近理论的某些应用: Korovkin 型定理, 一种将经典逼近算子扩张到集值族的方法, 以及 Jackson 估算•

关 键 词: 集值扩张; Steiner 选择; Jackson 估算

中图分类号: 177.91 文献标识码: A

引 言

在本文的第(Ⅰ) 部分(见[1]) 中, 提出了一种将在连续函数空间中定义的算子 T 通过 Steiner 选择扩张到在连续集值函数空间中定义的算子 T^* 中去的方法, 研究这种扩张的一些特性并分析线性算子序列收敛性和扩张算子的关系•

在本文中, 得到第(Ⅰ) 部分理论对逼近理论的应用• 特别在第 1 节中, 得到 Korovkin 定理; 在第 2 节中, 提出将 $\mathbf{R}^n$ _值函数的经典逼近扩张到集值函数的方法, 并研究这些扩张的不同特性, 最后在第 3 节中, 用 Nikoliskii 提出的方法, 给出了一个 Jackson 估算的简单证明•

Korovkin 型理论和 Feller 逼近在扩散方程的定性研究中是非常有用的• 本文结果对于微分包含的进一步研究具有潜在的应用价值• 另一个有关的应用领域是集值马尔科夫(Markov) 过程的处理法•

所需的概念及记号, 读者可参阅第(Ⅰ) 部分•

1 Korovkin 定理

Korovkin 定理解决下列问题: 在函数空间中给出一个算子序列, 确定测试函数族, 以便用族映象的收敛性确定在整个函数空间中的收敛性• P. P. Korovkin[2, 3] 对这样的线性正算子, 它在紧区间上的实连续函数空间中收敛于恒等算子, 取 $\left\{1, x, x^2\right\}$ 作为测试函数, 证明了这样类型的第一个定理• 这已是逼近理论及应用(见[4]) 中的一个成果累累的课题, 包括在不同领域中的应用, 如偏微分方程中的应用(见[4, 第 6 章] 及[5 ~ 8])• 一些集值 Korovkin 定理在[9

* 收稿日期: 2001_05_20
基金项目: 本文中的研究得到西班牙 FPI 基金资助课题(98_71701353 号) ; DGES 基金资助课题(PB98_1534) ; DGESIC 基金资助课题(PB97_1286)

注: 原稿为英文, 由陈兴芜 译, 张石生 校

~ 12] 中可找到• 它们是建立在嵌入到 Banach 空间中的基础• 现在将尝试通过不同的方法来建立两种收敛性间的联络: 对于算子的限制情况, 收敛于单位元; 对于完整算子情况, 收敛于单值函数• 在这一尝试中, 由第(Ⅰ)部分定理 3.1 所得出的收敛特性将是非常有用的•

将采用下列定义, 它们由 D.E.Wulbert 提出[13], D. E. Wulbert 利用较弱的假设代替 Korovkin 的假设, 即算子范数收敛到 1• 下面的等价性表述与第(Ⅰ)部分定理 3.1 中的假设密切相联系•

定义 1.1　族$\{f_i\}_{i\in\mathbf{I}}\subset C(\Omega,\mathbf{R}^n)$称为具有$C(\Omega,\mathbf{R}^n)$的 Korovkin_Wulbert 族, 如果对任意线性连续算子序列$T_m: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, $m\in\mathbf{N}$, 且$\{\|T_m\|_{m\in\mathbf{N}}\}$有界, 则得到: 对于一切$i\in\mathbf{I}$, $\|T_mf_i-f_i\|\to 0$时, 就蕴含 $\forall f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, $\|T_mf-f\|\to 0$•

定义 1.2　给定$X, Y\in C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, 若对于一切$t\in\Omega$, $X(t)\subset Y(t)$, 则我们可写成$X\subset Y$• 如果对于一切$X, Y\in C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, 且$X\subset Y$, 我们可得$TX\subset TY$, 则映象$T: C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$称为正的• 称算子$T$是线性的, 如果对于一切$X, Y\in C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$, $a, b\geqslant 0$, 都有$T(aX+bY)=aTX+bTY$•

下列线性正算子的引理是众所周知的•

引理 1.1　设$T: C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$是线性且正的, 则: $\|TX\|_C\leqslant\|TB\|_C\|X\|_C$•

下列命题说明在非常弱的假设下足以得到弱 Korovkin 型结论• 即: 若球的映象有一个公共边界, 则通过考查一族单值测试函数来得到 Korovkin 定理的下半极限, 而不管算子在其它集值函数上具有什么样的性质•

命题 1.2　设$\{f_i\}_{i\in\mathbf{I}}$是$C(\Omega,\mathbf{R}^n)$的 Korovkin_Wulbert 族, 设$S_m: C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $m\in\mathbf{N}$, 是线性正算子的序列, 使得:

1) $D_H(S_m\{f_i(\cdot)\},\{f_i(\cdot)\})\to 0$, 对一切$i\in\mathbf{I}$,

2) $\{\|S_mB\|_C\}_m$是有界的•

则有:

i) 存在连续算子的序列$\{U_m\}_m$, $U_m: C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 使得

$U_mX\subset S_mX$, 对所有的$X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$,

$D_H(U_mX,X)\to 0$, 对于一切$X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$,

ii) $X\subset\liminf_{m\to\infty} S_mX$, 对于一切$X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$•

证明　给定$S: C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$是正的和线性的, 我们定义$s: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, 且$sf=g$, 使得

$$S\{f(\cdot)\}=\{g(\cdot)\}•$$

由于g的存在性得以保证, 于是我们有

$$\{0\}=S\{0\}=S\{f(\cdot)-f(\cdot)\}=S\{f(\cdot)\}+S\{-f(\cdot)\},$$

这就意味着$S\{f(\cdot)\}(t)$对一切$t\in\Omega$是单元集, 从而我们定义$sf(t)$等于该点•

另外, 因$\{sf(\cdot)\}=S\{f(\cdot)\}\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$,

则$sf\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$• 显然, 因$S$是线性的, 故$s$也是线性的•

给定序列$\{S_m\}_m$, 并考虑与之相关的序列$\{s_m\}_m$, 我们得到$\{\|s_m\|\}_m$是有界的:

$$\|s_m\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|s_mf\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|\{s_mf(\cdot)\}\|_C=$$

$$\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|S_m\{f(\cdot)\}\|_C,$$

且按引理 1.1,得到该值不大于

$$\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|S_mB\|_C\|\{f(\cdot)\}\|_C=$$
$$\|S_mB\|_C\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|f\|=\|S_mB\|_C.$$

我们知道,对于一切 $i\in\mathbf{I}$,有 $D_H(S_m\{f_i(\cdot)\},\{f_i(\cdot)\})\to 0$ 且 $\|s_mf_i-f_i\|\to 0$. 因 $\{f_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ 是 Korovkin_Wulbert 族,故对于一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 我们得到 $\|s_mf-f\|\to 0$.

因 s_m 是连续的,可定义其扩张算子 s^*_m,它也是连续的. 且按第(Ⅰ)部分的定理 3.1 对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 可得 $D_H(s^*_mX,X)$.

我们注意到,对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $s^*_mX\subset S_mX$ 都成立.

给定 $t\in\Omega$,利用正性,我们得到

$$s^*_mX(t)=\mathrm{co}\{s_mf^X_a(t)\}_{a\in B}=\mathrm{co}\bigcup_{a\in B}S_m\{f^X_a(\cdot)\}(t)\subset$$
$$\mathrm{co}\bigcup_{a\in B}S_mX(t)=S_mX(t),$$

当计及 $U_m=s^*_m$,即得到 i)的结论.

关于 ii),对于一切 $t\in\Omega$,有

$$X(t)=\lim_{m\to\infty}s^*_mX(t)\subset\liminf_{m\to\infty}S_mX(t).$$

现在介绍 Korovkin 定理. 前面给出的弱的结果将用来证明这一定理. 我们应当指出 Steiner 参数化有关的渐近交换,是收敛的必要条件.

定理 1.3 设 $S_m: C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))\to C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $m\in\mathbf{N}$ 是一个线性正算子序列. 设 $s_m: C(\Omega,\mathbf{R}^n)\to C(\Omega,\mathbf{R}^n)$, $m\in\mathbf{N}$ 是这样的一个序列:对于一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 有

$$S_m\{f(\cdot)\}=\{s_mf(\cdot)\}.$$

设 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 $C(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 的一个 Korovkin_Wulbert 族,则下列条件是等价的:

i) $D_H(S_mX,X)\to 0$,对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$,

ii) $\|s_mf_i-f_i\|\to 0$,对于一切 $i\in I$, $\{\|S_mB\|_C\}$ 有界, $\|s_mf^X_a-f^{S_mX}_a\|\to 0$,对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $a\in B$.

证明 与命题 1.2 一样,我们考虑 $s_mf\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$. 由命题 1.2 知 $S_m\{f(\cdot)\}=\{s_mf(\cdot)\}$. 显然对于一切 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$,有 $\|s_mf-f\|\to 0$. 而且, $D_H(S_mB,B)\to 0$,从而 $\|S_mB\|_C$ 趋于 1.

另外还得到:

$$\|s_mf^X_a-f^{S_mX}_a\|\leqslant\|s_mf^X_a-f^X_a\|+\|f^X_a-f^{S_mX}_a\|,$$

且有 $\|s_mf^X_a-f^X_a\|$ 趋于 0,以及

$$\|f^X_a-f^{S_mX}_a\|\leqslant 10nD_H(X,S_mX),\text{ 也趋于 }0.$$

为证明逆命题成立,我们有:

$$D_H(S_mX,X)\leqslant D_H(S_mX,s^*_mX)+D_H(s^*_mX,X).$$

我们知道按命题 1.2, $D_H(s^*_mX,X)$ 趋于 0. 另外,因 $S_mX=\mathrm{co}S_mX$,故

$$D_H(S_mX,s^*_mX)=D_H(\mathrm{co}S_mX,\mathrm{co}\{s_mf^X_a(\cdot)\}_{a\in B})\leqslant$$
$$D_H(S_mX,\{s_mf^X_a(\cdot)\}_{a\in B})=D_H(\{f^{S_mX}_a(\cdot)\}_{a\in B}\{s_mf^X_a(\cdot)\}_{a\in B}\leqslant$$

$$\sup_{a\in B}\|f_a^{S_mX}-s_mf_a^X\|\cdot$$

假设 $\sup_{a\in B}\|f_a^{S_mX}-s_mf_a^X\|$ 不趋向于0, 则存在 $\varepsilon>0$ 和序列 $\{m_l\}_l\subset\mathbf{N}$, $\{a_l\}_l\subset B$, 且 $a_l\to a$ 对某一 $a\in B$ 使得对于一 $l\in\mathbf{N}$, 有

$$\varepsilon\leqslant\|f_{a_l}^{S_{m_l}X}-s_{m_l}f_{a_l}^X\|\leqslant\|f_{a_l}^{S_{m_l}X}-f_a^{S_{m_l}X}\|+$$
$$\|f_a^{S_{m_l}X}-s_{m_l}f_a^X\|+\|s_{m_l}f_a^X-s_{m_l}f_{a_l}^x\|\cdot$$

按引理1.1, 有

$$\|f_{a_l}^{S_{m_l}X}-f_a^{S_{m_l}X}\|\leqslant 5n\mid a_l-a\mid\|S_{m_l}X\|_C\leqslant$$
$$5n\mid a_l-a\mid\|S_{m_l}B\|_C\|X\|_C,$$

该式趋于0•

按照假设, 当 l 趋于无穷大, $\|f_a^{S_{m_l}X}-s_{m_l}f_a^X\|$ 趋于0, 而且正如命题1.2中所看到的 $\|s_{m_l}\|\leqslant\|S_{m_l}B\|_C$, 因此

$$\|s_{m_l}f_a^X-s_{m_l}f_{a_l}^X\|\leqslant\|s_{m_l}\|\|f_a^X-f_{a_l}^X\|\leqslant$$
$$\|S_{m_l}B\|_C\,5n\mid a_l-a\mid\|X\|_C\cdot$$

应该指出在定理1.3中, 条件 $\|s_mf_a^X-f_{a^m}^{S_X}\|\to 0$, 对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, $a\in B$, 即: 与Steiner参数化的渐近交换条件, 可按下列方法放松:

为证明由ii)可推出i), 仅对集值函数族 $\{f_iB\}_i$ 要求的条件是, 在定理的叙述中 $\{f_i\}_i$ 是Korovkin_Wulbert族• 同理可给出对于一切 $i\in I$, $D_H(S_m(f_iB),f_iB)\to 0$ 的证明• 因 $\{f_i\}_i$ 是Korovkin_Wulbert族, 显然在该族中线性正算子的收敛性意味着在整个连续函数空间中的收敛性(即它是Korovkin族)• 则采用[10]中的结果, 可得出结论: 对于一切 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 事实上有

$D_H(S_mX,X)\to 0$, 即 i) 成立•

2　集值函数的逼近算子

现在说明利用经典的 $\mathbf{R}^n$_值函数的逼近算子可以用来构造集值函数的逼近算子的方法• 设 T_m 是任一连续 $\mathbf{R}^n$_值函数的线性逼近算子, 按第(Ⅰ)部分的定理3.1所得到扩张算子 T_m^* 是连续集值函数的逼近算子• 我们采用Bernstein算子(例如见[14])来说明该方法, 即采用上述方式保持的原算子的不同特性• 我们应该指出这不是Bernstein算子专有的, 所谓Feller或Bernstein型算子同样可用于一大类逼近算子• 有关它们的简要说明以及概率语言的表述, 请参阅[15]• Bernstein算子对于鞅和微分方程的应用, 请阅[16, 17]•

现在起, 我们将处理定义在[0, 1]的集值函数• 若[0, 1]代表系统演变的时间段, 便具有了重要的物理意义• 这时可把函数值看成凸体的形状描述(演变的)[10], 包含一个运动质点的空间的凸域的描述, 其确切位置是未知的, 和有关系统状态的一些约束描述, 等•

设 $\Omega=[0,1]$, $X\in C(\Omega,\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $f\in C(\Omega,\mathbf{R}^n)$• f 的 m_Bernstein逼近定义为:

$$B_mf(t)=\sum_{i=0}^{m}f\left(\frac{j}{m}\right)\binom{m}{j}t^j(1-t)^{m-j},\ \text{对于一切}\ t\in[0,1]\cdot$$

故可定义“扩张算子” B_m^*X: $B_m^*X(t)=\mathrm{co}\{B_mf_a^X(t)\}_{a\in B}$, $\forall\,t\in[0,1]$•

下列引理表明可如下选取集值函数的选择, 即保持集值函数连续模的阶来进行• 必须说

明,这不仅对于[0,1]而且对任何紧度量空间 Ω 均是成立的•　该引理将运用于下列结果•

引理 2.1　若 $X:[0,1]\to\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$,则有:

$$\sup_{a\in B}\omega_{f_a^X}(\delta)\leqslant 10n\omega_X(\delta)\text{•}$$

证明　由上确界的概念,我们得到:

$$\sup_{a\in B}\omega_{f_a^X}(\delta)=\sup_{a\in B}\sup_{|t-t'|\leqslant\delta}|f_a^X(t)-f_a^X(t')|\leqslant$$
$$\sup_{|t-t'|\leqslant\delta}10nd_H(X(t),X(t'))=10n\omega_X(\delta)\text{•}$$

下列命题表明:若集值函数是连续函数与 $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 的一个元素的乘积,则它的广义 Bernstein 逼近是函数的紧的逼近的乘积•

命题 2.2　设 $g\in C([0,1],\mathbf{R})$ 和 $A\in\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$,则我们可得:

$$B_m^*(gA)=(B_mg)A\text{•}$$

证明　设 $t\in[0,1]$,则得到:$f_a^{gA}(t)=f_a^{g(t)A}=g(t)f_a^A$,故

$$B^*(gA)(t)=\mathrm{co}\left\{B_mf_a^{gA}(t)\right\}_{a\in B}=\mathrm{co}\left\{B_m(g(\bullet)f_a^A)(t)\right\}_{a\in B}=$$
$$\mathrm{co}\left\{B_mg(t)f_a^A\right\}_{a\in B}=B_mg(t)\,\mathrm{co}\left\{f_a^A\right\}_{a\in B}=B_mg(t)A\text{•}$$　证毕•

现在我们来建立逼近的整体性质与逼近集值函数连续模之间的关系•

命题 2.3　设 $g\in C([0,1],\mathbf{R})$, $X\in C([0,1],\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 及 $A\in\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$,则有:

ⅰ) $D_H(B_m^*X,X)\leqslant 11n\omega_X\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$,

ⅱ) $D_H(B_m^*(gA),gA)\leqslant\dfrac{11}{10}\|A\|_{\mathscr{K}}\,\omega_g\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$•

证明　关于ⅰ),Sikkema 在[18]中发现了最佳常数 $M\in\mathbf{R}$,使得:

$$\|B_mf-f\|\leqslant M\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

我们无需 M 的精确值,只要 $M<\dfrac{11}{10}$ 上式即成立,于是有:

$$D_H(B_m^*X,X)\leqslant\sup_{a\in B}\|B_mf_a^X-f_a^X\|\leqslant M\sup_{a\in B}\left\{\omega_{f_a^X}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right\}\leqslant$$
$$10nM\omega_X\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\leqslant 11n\omega_X\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\text{•}$$

对于ⅱ),有

$$D_H(B_m^*(gA),gA)=D_H((B_mg)A,gA)\leqslant\|B_mg-g\|\,\|A\|_{\mathscr{K}},$$ 且

按 Sikkema 的[18],有:

$$D_H(B_m^*(gA),gA)\leqslant\|A\|_{\mathscr{K}}M\omega_g\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\leqslant\frac{11}{10}\|A\|_{\mathscr{K}}\,\omega_g\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\text{•}$$

定义 2.1　若 $X\in C(\Omega,\mathscr{K}(\mathbf{R}^n))$ 且 $\alpha>0$,且 X 是序数 α 的 Lipschitz 常数,我们记:$X\in\mathrm{Lip}(\alpha)$,如果它是 α 阶 Lipschitz 的,即 $\omega_X(\delta)\leqslant M\delta^\alpha$,对一常数 M,而 ω_X 是 X 的连续模•

若集值函数是某一阶的 Lipschitzian,则可得到收敛速率•

系 2.4　设 $X\in C([0,1],\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$,若 $X\in\mathrm{Lip}(\alpha)$,则

$$D_H(B_m^*X,X)=O(m^{-\alpha/2})\text{•}$$

下面给出一些结果来说明广义逼近光滑性的保持•

命题 2.5　设 $g\in C([0,1],\mathbf{R})$, $X\in([0,1],\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $A\in\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$,则:

i) $\omega_{B_m^* X}(\delta) \leqslant 20 n \omega_X(\delta)$;

ii) $\omega_{B_m^*(gA)}(\delta) \leqslant 2 \| A \|_{\mathscr{K}} \omega_g(\delta)$•

证明　Annastasiou 等在[19] 中, 证明了 $\omega_{B_m f}(\delta) \leqslant 2\omega_f(\delta)$, 于是有

$$\omega_{B_m^* X}(\delta) = \sup_{|t-t'|\leqslant\delta} d_H(B_m^* X(t), B_m^* X(t')) \leqslant$$

$$\sup_{|t-t'|\leqslant\delta} \sup_{a\in B} | B_m f_a^X(t) - B_m f_a^X(t') | =$$

$$\sup_{a\in B} \omega_{B_m f_a^X}(\delta) \leqslant 2 \sup_{a\in B} \omega_{f_a^X}(\delta) \leqslant 20 n \omega_X(\delta)•$$

对于第二个条件, 大家知道 $B_m^*(gA) = \left(B_m g\right) A$, 故

$$\omega_{B_m^*(gA)}(\delta) = \sup_{|t-t'|\leqslant\delta} d_H(B_m(gA)(t), B_m(gA)(t')) \leqslant$$

$$\sup_{|t-t'|\leqslant\delta} | B_m g(t) - B_m g(t') | \ \|A\|_{\mathscr{K}} =$$

$$\omega_{B_m g}(\delta) \|A\|_{\mathscr{K}} \leqslant 2\omega_g(\delta) \|A\|_{\mathscr{K}}•$$

证毕•

命题 2.6　设 $X \in C([0, 1], \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$, 若 $X \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, 则 $B_m^* X \in \mathrm{Lip}(\alpha)$•

证明　若 W 是使 $X \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ 的常数, 则 $f_a^X \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, 且常数为 $10nW$, 按[20, 21], 对于一切 $a \in B$, 有 $B_m f_a^X \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ 且有相同的常数, 故

$$\omega_{B_m^* X}(\delta) = \sup_{|t-t'|\leqslant\delta} d_H(B_m^* X(t), B_m^* X(t')) \leqslant \sup_{|t-t'|\leqslant\delta} \sup_{a\in B} | B_m f_a^X(t) - B_m f_a^X(t') | \leqslant$$

$$\sup_{|t-t'|^\alpha\leqslant\delta} \sup_{a\in B} 10 n W | t - t' |^2 \leqslant 10 n W \delta^\alpha•$$

3　Jackson 型估计

Jackson 定理通过多项式函数来确定连续函数一致逼近的收敛速度的数值•　在本节, 将提出一个集值函数 Jackson 估计的初等证明•

本结果(对非凸情况同样有效) 源于 Nikulokii 的[22], 但他的证明是相当复杂而且沉重地依赖于 Artststein[23] 更早在度量空间 $(\mathscr{K}(\mathbf{R}^n), d_H)$ 中用 Frechet 插象线段逼近集值函数的结果•　我们将利用 Steiner 参数化来得出一个简单的证明•

引理 3.1(Jackson 估计)　存在一个万有常数 $c > 0$, 使得对于一切 $f \in C([0, 1], \mathbf{R}^n)$ 和 $m \in \mathbf{N}$, 存在一个最高 m 次的多项式函数 p_m(其系数在 $\mathbf{R}^n$ 中), 且 $\|f - p_m\| \leqslant c\omega_f\left(\frac{1}{m}\right)$•

Nikolskii 利用定义多项式的 m_簇来推广多项式•　采用系数为紧集的多项式, 也许会更自然, 但在通常情况下, 它又使估计不成立•　事实上存在一些连续的集值函数不能用多项式函数一致逼近•

定义 3.1　函数 $P_m: [0, 1] \rightarrow \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$ 称为多项式的 m_簇, 其中 $P_m(t) = \boldsymbol{L}_m(t)\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{K}(R^{n(m+1)})$, $\boldsymbol{L}_m(t)$ 是 $n \times n(m+1)$ 的矩阵, $\boldsymbol{L}_m(t) = [\boldsymbol{E}, t\boldsymbol{E}, \ldots, t^m\boldsymbol{E}]$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵•

这样即可得到下列结果:

引理 3.2　设 $X: [0, 1] \rightarrow \mathscr{K}(\mathbf{R}^n)$, 则 X 为多项式的 m_簇, 当且仅当存在一个次数至多为 m 的多项式函数族 $\mathscr{P}$(系数在 $\mathbf{R}^n$ 中), 使得对于一切 $t \in [0, 1]$ 有

$$X(t) = \left\{p(t)\right\}_{p\in\mathscr{P}}•$$

下列结果把 Jackson 的估计推广到凸集值情形•

定理 3.3　存在一个万有常数 $c' > 0$, 使得对一 $X \in C([0,1], \mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n))$ 和 $m \in \mathbf{N}$, 存在一个 m_簇的多项式 Y_m, 使得:

$$D_H(X, Y_m) \leqslant c' n \omega_X\left(\frac{1}{m}\right).$$

证明　采用 Steiner 表示, $X(t) = \left\{f_a^X(t)\right\}_{a \in B}$. 于是对每一个 $a \in B$ 和 $m \in \mathbf{N}$, 由引理 3.1, 可求出一个最高次数为 m 的多项式 $p_{a,m}^X$, 使得: $\|f_a^X - p_{a,m}^X\| \leqslant c\omega_{f_a^X}\left(\frac{1}{m}\right)$, Y_m' 和 Y_m 由下式定义:

$$Y_m'(t) = \left\{p_{a,m}^X(t)\right\}_{a \in B, m \in \mathbf{N}}, \quad Y_m(t) = \overline{\mathrm{co}}\, Y_m'(t).$$

对于一切 $t \in [0,1]$, 其中, $\overline{\mathrm{co}}$ 是闭凸包. 考虑到引理 3.2 及这样的事实上, 次数最高为 m 的多项式集合对凸组合和关于一致拓扑都是闭的故得知, 每一个 Y_m 是多项式的 $\mathscr{K}_c(\mathbf{R}^n)$ 值 m_簇. 则由引理 2.1 有:

$$D_H(X, Y_m) = D_H(\mathrm{co}X, \overline{\mathrm{co}}\, Y_m') \leqslant D_H(X, Y_m') \leqslant$$

$$\sup_{a \in B}\|f_a^X - p_{a,m}^X\| \leqslant \sup_{a \in B} c\omega_{f_a^X}\left(\frac{1}{m}\right) \leqslant 10cn\omega_X\left(\frac{1}{m}\right),$$

取 $c' = 10c$, 证明就完成了.

事实上, 该逼近量改善了 Bernstein 算子(与定理 3.3 和命题 2.3 相比).

[参 考 文 献]

[1]　皮佐尔·特尔文, 米古尔·拉皮兹·迪亚兹. Steiner 选择和算子的集值扩张(Ⅰ)—理论结果[J]. 应用数学和力学, **23**(5): 507—517.

[2]　Korovkin P P. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions[J]. Doklady Akad Nauk SSSR(N S), 1953, **90**: 961—964.

[3]　Korovkin P P. Linear operators and approximation theory[A]. In: Russian Monographs and Texts on Advanced Mathematics and Physics[C]. Vol. Ⅲ. New York: Gordon and Breach Publishers Inc, 1959, Delhi: Hindustan Publishing Corp, Delhi 1960. (English version)

[4]　Altomare F, Campiti M. Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications. In: De Gruyter Studies in Mathematics[M]. Vol. 17, Berlin/New York: De Gruyter, 1994.

[5]　Altomare F. Lototsky_Schnabl operators on the unit interval and degenerate diffusion equations[A]. In: Progress in Functional Analysis[C]. Peniscola, 1990, North_Holland Math, Stud, **170**, Amsterdam: North_Holland, 1992, 259—277.

[6]　Altomare F. On some approximation processes and their associated parabolic problems[J]. Rend Sem Mat Fis Milano, 1994, **61**: 231—255.

[7]　Clement P, Timmermans C A. On C_0_semigroups generated by differential operators satisfying ventcel's boundary conditions[J]. Nederl Akad Wetensch Inday Math, 1986, **48**: 379—387.

[8]　Favini A, Fuhrman M. Approximation results for semigroups generated by multivalued linear operators and applications[J]. Differential Integral Equations, 1998, **11**: 781—805.

[9]　Roth W. Korovkin approximation for weighted set_valued functions[J]. J Approx Theory, 1999, **100**: 94—112.

[10]　Keimel K, Roth W. A Korvkin type approximation theorem for set_valued functions[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, **104**: 819—924.

[11] Campiti M. A Korovkin type theorem for set_valued Hausdorff continuous functions[J]. Matematiche(Catania), 1987, **42**(1_2): 29—35.

[12] Vitale R A. Approximation of convex set_valued functions[J]. J Approx Theory, 1979, **26**: 301—316.

[13] Wulbert D E. Convergence of operators and Korovkin's theorem[J]. J Approx Theory, 1968, **1**: 381—390.

[14] Lorentz G C. Bernstein Polynomials[M]. New York: Chelsea Publishing Co, 1986.

[15] Adell J A, Cal J. De la Bernstein_type operators diminish the φ_variation[J]. Constr Approx, 1996, **12**: 489—507.

[16] Neven J. Discrete_Parameter Martingales North_Holland Mathematical Library[M]. Vol. **10**, Amsterdam_Oxford: North_Holland Publishing Co, 1975.

[17] Varadhan S R S. Lectures on Diffusion Problems and Partial Differential Equations[M]. In: Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, **64**, Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1980.

[18] Sikkema P C. Der wert einiger konstanten in der theorie der approximation mit bernstein_polynomen [J]. Numer Math, 1961, **3**: 107—116.

[19] Annastasiou G A, Cottin C, Gonska H. Global smoothness of approximation operators[J]. Analysis, 1991, **11**: 43—57.

[20] Brown B M, Elliott D, Paget D F. Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function[J]. J Approx Theory, 1987, **49**: 196—199.

[21] Lindvall T. Bernstein polynomials and the law of large numbers[J]. Math Scientist, 1982, **7**: 127—139.

[22] Nikolskii S N. Jackson's order of approximation in the problem of approximation of continuous set_valued map[J]. Math Balkanica, 1991, **4**: 396—400.

[23] Artstein Z. Piecewise linear approximations of set_valued maps[J]. J Approx Theory, 1989, **56**: 41—47.

Set_Valued Extension of Operators via Steiner Selections(Ⅱ)—Applications to Approximation

TERAN Pedro, LÓPEZ_DIAZ MIGUEL

(Facultad de Ciencias, Universidad de Oviedo, C/Calvo Sotelo,

s/n. 33007 Oviedo. Spain)

Abstract: On the basis of Part (Ⅰ) of this series some applications to the approximation of set_valued functions are obtained: Korovkin type theorems, a method to extend classical approximation operators to the set_valued setting and a Jackson type estimate.

Key words: set_valued extension; Steiner selection; a Jackson type estimate